出版说明

根据原国家教育委员会《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》的要求，国家统计局经过专家评审，五种教材被立项，其中：三种教材是在“八五”期间规划统计教材的基础上进行修订的，二种教材属“九五”期间新编规划统计教材，这五本教材的编审工作由全国统计教材编审委员会负责审定。

“抓重点，出精品”是“九五”期间普通高等教育教材建设与改革工作的核心。按照教育部的要求，国家级重点教材都应建设成“九五”普通高等教育的精品教材。根据这一精神，这批教材力求适应我国政治、经济、科技、教育等改革的形势，充分反映改革的成果，同时适应专业目录调整及专业面拓宽以后教学改革的实际需要，科学、合理地设置教材体系和安排教材内容，努力提高教材质量。

相信通过这批教材的出版、发行，对我国普通高等教育统计教材建设工作将起到较好的示范、导向作用；对提高统计教育水平和培养面向 21 世纪的统计人才也将发挥积极的促进作用。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，诚恳欢迎教材的使用单位、广大教师和同学们提出批评和建议。

全国统计教材编审委员会

1999 年 3 月

概率论与数理统计

第一版序言

本书是按照全国统计教材编审委员会制定的《概率论与数理统计教学大纲》编写的，是供全国高等学校统计专业本科生学习用的教科书。全书十章分二部分，前四章是概率论部分，主要讲述概率论的基本概念和基本结论，其中心内容是随机变量及其分布，后六章是数理统计部分，主要讲述数理统计基本概念和常用统计方法，其中心内容是统计推断的三个内容：抽样分布、参数估计和假设检验。

学习这门课的读者主要是着眼于社会、经济管理领域中的应用，因此我们尽量用社会、经济、管理方面的例子讲述各种基本概念、基本理论和基本方法，努力说明其丰富的实际背景、特有的思维方式、广泛的应用范围。虽然全书有200个例子，为数不少，但毕竟有限，为了今后能很好应用统计方法，现在要把学习重点放在对概念、定理和方法的直观理解和数学表达上，只有理解了的东西才能更深刻地感觉它，从而才能正确地使用它，准确的数学表达是检验你是否理解了，基于这个考虑，我们在叙述上尽量启发你的思维，推理和演算上坚持严谨，能证则证，这一种严格训练对进一步学习后继的统计课程和今后的应用是十分必须的。书中部分节与段打 * 号，在教学中可以删去，因为这都是扩大和加深知识面的内容。

本书各章后都附有大量习题，其中大部分是练习性的，以巩固本书内容为

主要目的，真正有难度的题目只占少部分，独立地完成这些题目对掌握这门课程是必不可少的。如果在做习题上不肯花功夫，有畏难情绪，那今后在应用中遇到困难时，怎能有攻关的勇气和能力呢？

本书的编写自始至终得到国家统计局统计干部培训中心的关心和帮助，中国人民大学倪加勋教授耐心细致地审阅全书也使本书增色不少，中国统计出版社副总编谢鸿光先生为编辑出版此书花了很多心血，尤进红亦为本书提供大量习题，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，错谬之处在所难免，恳请国内同行和广大读者批评指正。

茆诗松　周纪芗

1996 年 2 月 6 日

第二版序言

本书是按经济类统计专业本科生教科书的要求编写的,出版后反映尚可,肯定了我们在与经济、管理相结合上所做的努力,意见主要集中在内容深浅和多少上,说深的也有,说浅的也有,但都认为内容过多。内容深浅确难于掌握,为适应将来的应用和研究生入学考试的需要,内容不宜过浅,为使多数学生能达到基本要求,通过合格考试,内容又不宜过深。根据教师和学生的这些意见,我们对全书作了较大的变动。

首先是减少内容,突出基础部分,把原来的十章压缩为七章。把极限定理一章压缩为一节(§3.5),把方差分析和回归分析压缩成为一章,把贝叶斯统计初步压缩为一节(§5.7),然后在每章中或多或少地删去一些内容,或把一些内容转入习题。估计讲完全书可能需要72~80节课。为了适应不同的课时计划,我们又在一些章节打上"*"号,以示可以不讲或少讲。假如把这些打上"*"号的章节都不讲授的话,那么本书还可以作为经济类和管理类各专业使用的《概率论与数理统计》课程的教材。

其次,我们力图通过例子和习题把概率论与数理统计的基本内容渗透到经济和管理各专业中去,为此我们把自己经受过的实例和看到的国内外例子经过改写大量地引入本书,目的是使学生认识到手中有无概率统计工具对自己今后学习、工作和发展将会有重要影响,掌握了这个工具至少对先进的成果

你能听懂或看懂，不至于“坐飞机”。

最后一个大的变动就是把习题分节设置，另立成册，并附答案，部分题目给提示或详细解答，这样习题的针对性强了，习题数量也明显增多，几乎增加了40%左右，但增加的习题大多为基本题，大多能为学生做出，以期引起学生动手的兴趣，提高学生学好这一门课的信心。

原书中的一些特色仍被保留，用学生熟知的一些事实来引进每个基本概念，启发和培养概率统计的思维方式，在推理和演算上仍坚持严谨，能证则证。此外，对零概率事件（几乎处处）、渐近分布、描述性统计、检验的p值等基本概念也加重了笔墨，力图把基本思想讲清楚，今后敢于去使用它们。

以上这些想法，我们努力去做，做得如何还要广大教师和同学评议，欢迎批评，我们将进一步改进。趁此机会，我们对批评过第一版书的教师和同学表示深深的感谢，没有他们的意见，我们不会下决心改成这个样子。同时还要感谢仔细审阅新版手稿的北京大学陈家鼎教授、耿直教授和中国人民大学倪加勋教授，由于采纳了他们的改进意见，使本书质量提高了一步。最后对国家统计局教育中心教材处和统计出版社表示感谢，没有他们的热心指导和出色的组织工作不可能使本书新版迅速问世。

茆诗松　周纪芗

1999年12月26日

目　录

第一章　随机事件及其概率 ………………………………………… (1)
§1.1　随机事件及其运算 ………………………………………… (1)
1.1.1　随机现象 ………………………………………… (1)
1.1.2　基本空间(样本空间) ………………………………………… (2)
1.1.3　随机事件 ………………………………………… (3)
1.1.4　必然事件与不可能事件 ………………………………………… (5)
1.1.5　事件间的关系 ………………………………………… (5)
1.1.6　事件的运算 ………………………………………… (7)
§1.2　事件的概率 ………………………………………… (9)
1.2.1　事件的概率 ………………………………………… (9)
1.2.2　排列与组合概要 ………………………………………… (10)
1.2.3　古典方法 ………………………………………… (11)
1.2.4　频率方法 ………………………………………… (17)
1.2.5　主观方法 ………………………………………… (19)
§1.3　概率的性质 ………………………………………… (22)
§1.4　独立性 ………………………………………… (26)
1.4.1　两个事件的独立性 ………………………………………… (27)

1.4.2 多个事件的独立性 …………………………………………………… (29)
1.4.3 试验的独立性 …………………………………………………… (31)
1.4.4 n重贝努里试验 …………………………………………………… (34)
§1.5 条件概率…………………………………………………… ( )
1.5.1 条件概率…………………………………………………… (37)
1.5.2 条件概率的性质 …………………………………………………… (40)
1.5.3 全概率公式 …………………………………………………… (44)
1.5.4 贝叶斯公式 …………………………………………………… (48)

第二章 随机变量及其概率分布 …………………………………………………… (48)
§2.1 随机变量…………………………………………………… (48)
2.1.1 随机变量…………………………………………………… (48)
2.1.2 随机变量的概率分布 …………………………………………………… (50)
2.1.3 概率的可列可加性公理 …………………………………………………… (54)
§2.2 离散随机变量…………………………………………………… (55)
2.2.1 离散随机变量的分布列 …………………………………………………… (55)
2.2.2 离散随机变量的数学期望…………………………………………………… (57)
2.2.3 二项分布…………………………………………………… (61)
2.2.4 泊松分布…………………………………………………… (65)
*2.2.5 超几何分布 …………………………………………………… (70)
§2.3 连续随机变量…………………………………………………… (71)
2.3.1 连续随机变量的概率密度函数 …………………………………………………… (71)
2.3.2 连续随机变量的分布函数…………………………………………………… (76)
2.3.3 随机变量函数的分布 …………………………………………………… (78)
2.3.4 连续随机变量的数学期望…………………………………………………… (82)
2.3.5 正态分布…………………………………………………… (83)
2.3.6 伽玛分布…………………………………………………… (90)
2.3.7 贝塔分布…………………………………………………… (93)
§2.4 方差…………………………………………………… (95)
2.4.1 随机变量函数的数学期望…………………………………………………… (95)
2.4.2 方差 …………………………………………………… (99)
2.4.3 方差的性质 …………………………………………………… (102)
2.4.4 切比雪夫不等式 …………………………………………………… (105)
2.4.5 贝努里大数定律 …………………………………………………… (107)
§2.5 随机变量的其它特征数 …………………………………………………… (108)

2.5.1 矩 …………………………………………………………………… (108)
2.5.2 变异系数 …………………………………………………………… (109)
*2.5.3 偏度 ……………………………………………………………… (110)
*2.5.4 峰度 ……………………………………………………………… (111)
2.5.5 中位数 ……………………………………………………………… (112)
2.5.6 分位数 ……………………………………………………………… (113)
*2.5.7 众数 ……………………………………………………………… (114)

第三章 多维随机变量 ……………………………………………… (116)
§3.1 多维随机变量及其联合分布 ………………………………… (116)
3.1.1 多维随机变量 ……………………………………………… (116)
3.1.2 联合分布函数 ……………………………………………… (117)
3.1.3 多维离散随机变量 ………………………………………… (118)
3.1.4 多维连续随机变量 ………………………………………… (122)
§3.2 随机变量的独立性 ……………………………………………… (127)
3.2.1 随机变量的独立性 ………………………………………… (127)
3.2.2 随机变量函数的独立性 …………………………………… (130)
3.2.3 最大值与最小值的分布 …………………………………… (131)
3.2.4 卷积公式 …………………………………………………… (133)
§3.3 多维随机变量的特征数 ……………………………………… (139)
3.3.1 多维随机变量函数的数学期望 …………………………… (139)
3.3.2 数学期望与方差的运算性质 ……………………………… (141)
3.3.3 协方差 ……………………………………………………… (143)
3.3.4 相关系数 …………………………………………………… (147)
*§3.4 条件分布与条件期望 ………………………………………… (152)
3.4.1 条件分布的概念 …………………………………………… (152)
3.4.2 离散随机变量的条件分布 ………………………………… (153)
3.4.3 连续随机变量的条件分布 ………………………………… (155)
3.4.4 构造联合分布 ……………………………………………… (157)
3.4.5 条件期望 …………………………………………………… (159)
§3.5 中心极限定理 …………………………………………………… (163)
3.5.1 一个重要现象 ……………………………………………… (163)
3.5.2 独立同分布下的中心极限定理 …………………………… (167)
3.5.3 二项分布的正态近似 ……………………………………… (168)
*3.5.4 独立不同分布下的中心极限定理 ………………………… (173)

第四章　统计量及其分布……………………………………………………（178）
§4.1　总体与样本 ……………………………………………………（179）
4.1.1　总体与个体 ……………………………………………………（179）
4.1.2　样本 ……………………………………………………………（182）
4.1.3　从样本去认识总体……………………………………………（185）
4.1.4　正态概率纸 ……………………………………………………（192）
§4.2　统计量与抽样分布 ……………………………………………（198）
4.2.1　统计量及其分布 ………………………………………………（198）
4.2.2　样本均值及其分布……………………………………………（199）
4.2.3　样本方差与样本标准差 ………………………………………（203）
*4.2.4　样本的高阶矩 …………………………………………………（207）
§4.3　次序统计量及其分布 …………………………………………（209）
4.3.1　次序统计量的概念……………………………………………（209）
4.3.2　次序统计量的抽样分布 ………………………………………（211）
4.3.3　样本极差 ………………………………………………………（214）
4.3.4　样本中位数与 p 分位数 ………………………………………（216）
4.3.5　箱线图 …………………………………………………………（219）
*4.3.6　用随机模拟方法寻找统计量的近似分布 ……………………（220）

第五章　参数估计……………………………………………………………（223）
§5.1　矩法估计 ………………………………………………………（224）
5.1.1　矩法估计的基本点……………………………………………（224）
5.1.2　分布中未知参数的矩法估计 …………………………………（225）
§5.2　点估计优劣的评价标准 ………………………………………（226）
5.2.1　无偏性 …………………………………………………………（227）
5.2.2　有效性 …………………………………………………………（230）
5.2.3　均方误差准则 …………………………………………………（230）
5.2.4　相合性 …………………………………………………………（232）
§5.3　极大似然估计 …………………………………………………（232）
5.3.1　极大似然估计的思想与概念 …………………………………（232）
5.3.2　求极大似然估计的方法 ………………………………………（234）
5.3.3　极大似然估计的不变原则 ……………………………………（238）
5.3.4　极大似然估计的渐近正态性 …………………………………（239）
§5.4　区间估计 ………………………………………………………（240）
5.4.1　区间估计的概念 ………………………………………………（241）

5.4.2 枢轴量法 …………………………………………………… (242)
5.4.3 正态均值 μ 的置信区间(σ 已知) …………………………… (244)
5.4.4 正态均值 μ 的置信区间(σ 未知) …………………………… (246)
5.4.5 正态方差 σ^2 与标准差 σ 的置信区间 ……………………… (248)
5.4.6 两个正态均值差的置信区间 ……………………………… (250)
5.4.7 两个正态方差比的置信区间 ……………………………… (253)
§5.5 单侧置信限 …………………………………………………… (256)
5.5.1 单侧置信限的概念 ………………………………………… (256)
5.5.2 基于连续分布函数构造置信限 …………………………… (257)
5.5.3 基于阶梯分布函数构造置信限 …………………………… (260)
§5.6 比率 p 的置信区间 …………………………………………… (265)
5.6.1 小样本场合下 p 的置信区间 ……………………………… (265)
5.6.2 大样本场合下 p 的近似置信区间 ………………………… (268)
* §5.7 贝叶斯估计 …………………………………………………… (269)
5.7.1 统计推断中的三种信息 …………………………………… (269)
5.7.2 贝叶斯公式的密度函数形式 ……………………………… (272)
5.7.3 共轭先验分布 ……………………………………………… (274)
5.7.4 贝叶斯点估计 ……………………………………………… (277)
5.7.5 贝叶斯区间估计 …………………………………………… (282)

第六章 假设检验 ……………………………………………………… (285)
§6.1 假设检验的概念与步骤 ……………………………………… (285)
6.1.1 什么是假设检验 …………………………………………… (285)
6.1.2 假设 ………………………………………………………… (289)
6.1.3 两类错误 …………………………………………………… (290)
6.1.4 水平为 α 的检验 ………………………………………… (291)
6.1.5 假设检验问题的类型 ……………………………………… (292)
§6.2 正态总体参数的假设检验 …………………………………… (294)
6.2.1 关于均值的检验 …………………………………………… (295)
6.2.2 关于方差的检验 …………………………………………… (300)
6.2.3 关于两个正态总体方差的检验 …………………………… (302)
6.2.4 关于两个正态总体均值的检验 …………………………… (304)
§6.3 比率 p 的检验 ………………………………………………… (309)
6.3.1 关于比率 p 的检验 ………………………………………… (309)
6.3.2 两个比率的比较 …………………………………………… (313)

* §6.4 泊松分布参数 λ 的检验 …… (314)
§6.5 检验的 p 值 …… (317)
§6.6 广义似然比检验 …… (320)
§6.7 χ^2 拟合优度检验 …… (322)
6.7.1 总体可分为有限类,且总体分布不含未知参数 …… (323)
6.7.2 总体可分为有限类,且总体分布含有未知参数 …… (324)
6.7.3 总体为连续分布的情况 …… (326)
6.7.4 列联表的独立性检验 …… (328)
§6.8 正态性检验 …… (331)
6.8.1 小样本($3\leqslant n\leqslant 50$)场合的 W 检验 …… (331)
6.8.2 大样本($n>50$)场合的 D 检验 …… (333)

第七章 方差分析和回归分析 …… (335)
§7.1 单因子方差分析 …… (335)
7.1.1 问题的提出 …… (335)
7.1.2 单因子方差分析的统计模型 …… (336)
7.1.3 检验方法 …… (338)
7.1.4 效应与误差方差的估计 …… (344)
7.1.5 重复数相同的方差方析 …… (346)
§7.2 多重比较 …… (349)
7.2.1 重复数相等场合的 T 法 …… (349)
7.2.2 重复数不等场合的 S 法 …… (351)
* §7.3 方差齐性检验 …… (353)
7.3.1 样本容量相等场合 …… (353)
7.3.2 样本容量不等场合 …… (355)
§7.4 一元线性回归 …… (357)
7.4.1 一元线性回归模型 …… (357)
7.4.2 回归系数的最小二乘估计 …… (359)
7.4.3 最小二乘估计的性质 …… (361)
7.4.4 回归方程的显著性检验 …… (363)
7.4.5 利用回归方程作预测 …… (368)
7.4.6 重复观察(试验)的情况 …… (371)
§7.5 可化为一元线性回归的曲线回归 …… (375)
7.5.1 模型的确定 …… (375)
7.5.2 参数估计 …… (377)

7.5.3 回归曲线的比较 …………………………………………………… (378)

附录:统计数表

附表 1 二项分布表 …………………………………………………… (382)
附表 2 泊松分布表 …………………………………………………… (392)
附表 3 正态分布表 …………………………………………………… (397)
附表 4 t 分布分位数 $t_{1-\alpha}(n)$表 …………………………………… (398)
附表 5 χ^2 分布分位数 $\chi_{1-\alpha}(n)$表 …………………………………… (399)
附表 6 F 分布分位数 $F_{1-\alpha}(f_1,f_2)$表 …………………………… (401)
附表 7 随机数表 …………………………………………………… (409)
附表 8 正态性检验统计量 W 的系数 $a_i(n)$的值 …………………… (410)
附表 9 正态性检验统计量 W 的 α 分位数 W_α 表 …………………… (412)
附表 10 正态性检验统计量 Y 的 α 分位数 Y_α 表 …………………… (413)
附表 11 多重比较的 $q_{1-\alpha}(r,f)$表 ………………………………… (414)
附表 12 F_{max}的分位数表 …………………………………………… (417)
附表 13 G_{max}的分位数表 …………………………………………… (418)
附表 14 检验相关系数 $\rho=0$ 的临界值表 ………………………… (419)

参考文献 …………………………………………………………… (421)

第一章 随机事件及其概率

§1.1 随机事件及其运算

概要

1. **随机现象**:在一定条件下,并不总是出现相同结果的现象。

随机试验:可重复的随机现象。

基本结果 ω:随机现象的最简单的结果,它将是统计中抽样的基本单元,故又称**样本点**。

基本空间 Ω:随机现象所有基本结果的全体。

2. 事件与集合的对应关系。

(2)一位顾客在超市购买的商品件数；

(3)一位顾客在超市排队等候付款的时间；

(4)一颗麦穗上长着麦粒个数；

(5)一台电视机的寿命(从开始使用到第一次维修的时间)；

(6)某城市一天内发生交通事故的次数；

(7)测量某物理量(长度、直径等)的误差。

读者还可列举很多有趣的随机现象。

很多随机现象是可以大量重复的，如抛一枚硬币可以无限次重复，不同麦穗上的麦粒数可以大量观察等，这种可重复的随机现象又称为**随机试验**，简称试验。以后常把检验一件产品看作做一次试验，观察一颗麦穗上的麦粒数也看作一次试验。也有很多随机现象是不能重复的，明年世界经济是增长还是衰退，一场足球赛的输赢都是不能重复的随机现象。本书主要研究能大量重复的随机现象，但也十分注意研究不能重复的随机现象。因为后者在我们经济生活中占有重要地位。

1.1.2 基本空间(样本空间)

认识一个随机现象首要的是能罗列出它的一切可能发生的基本结果，这里"**基本结果**"是指随机现象的最简单的结果，如抛一枚硬币就有两个基本结果：

正面，　反面

掷一颗骰子就有六个基本结果：

1 点，2 点，3 点，4 点，5 点，6 点

随机现象所有基本结果的全体称为这个随机现象的**基本空间**。常用 $\Omega=\{\omega\}$ 表示，其中元素 ω 就是基本结果。在统计学中，基本结果 ω 将是抽样的基本单元，故基本结果又称为**样本点**，基本空间又称为**样本空间**，如抛一枚硬币的基本空间为

$$\Omega_1=\{\omega_0,\omega_1\}=\{正面,反面\}$$

其中，ω_0 表示正面，ω_1 表示反面，又如掷一颗骰子的基本空间为

$$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$$

基本空间可以由有限个(至少二个)基本结果组成(如 Ω_1 和 Ω_2 那样)，也可由无限个基本结果组成，对有限的基本空间要注意其中基本结果的个数，对无限的基本空间要注意区分其中基本结果是可列个，还是不可列个。

例 1.1.2　例 1.1.1 中 7 个随机现象的基本空间有如下三种：

(1)“一天内进入某超市的顾客数”的基本空间 Ω_3 可用非负整数集表示，即

$$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,500,\cdots,10^5,\cdots\}$$

这是一个含有可列个基本结果的基本空间，其中“0”表示“无人光顾超市”。这在流行性感冒盛行的日子里，“超市无人光顾”不是没有可能发生的，为了不遗漏任一种可能结果，应把“0”作为基本结果放入基本空间，另外，该基本空间还含有“十万”，“百万”等基本结果，当然，“一天内有十万人进入该超市”是不可想象的，但我们仍把它放入基本空间 Ω_3，原因有二：一是我们不能确切地说出一天进入超市的最多人数，若随便说一个很大的数，那它与十万也无本质差别，因为对超市来说，都可当作无穷多人数了；二是数学抽象的需要，这会使数学处理方便，而又不失真。

类似地可以看出，例 1.1.1 中的第 2、第 4、第 6 个随机现象都可用基本空间 Ω_3 来描述。

(2)“一台电视机的寿命”的基本空间可用非负实数集表示，即

$$\Omega_4=\{x:x\geqslant 0\}$$

其中“0”表示电视机在开始使用时就发生故障需要维修，“10000”表示电视机工作 10000 小时时发生故障需要维修，类似地可以看出，“一位顾客在超市排队等候付款的时间”的基本空间也可用 Ω_4 描述，这两个随机现象的基本空间相同，但它们最可能发生的时间段有很大差别，电视机寿命常在 1 万到 10 万小时内，而排队等候付款时间常在 10 分钟以内。

(3)“测量某物理量的误差”的基本空间常用整个实数集表示，即

$$\Omega_5=\{x:-\infty<x<\infty\}$$

因为测量误差可正可负、可大可小，具体是多少，人们事先无法知道，以后会看到，用 Ω_5 作测量误差的基本空间会给数学处理带来很多方便，但又不会失真。

1.1.3 随机事件

随机现象的某些基本结果组成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 A、B、C 等表示，如在掷一颗骰子，“出现奇数点”是一个事件，它是由 1 点、3 点、5 点等三个基本结果组成，若记这个事件为 A，则有 $A=\{1,3,5\}$。

从这个定义可见，事件有如下几个特征：

(1)任一事件 A 是相应基本空间 Ω 中的一个子集，在概率论中常用一个长方形示意基本空间 Ω，用其中一个园(或其它几何图形)示意事件 A，见图 1.1.1，这类图形称为**维恩**(Venn)**图**。

(2)事件 A 发生当且仅当 A 中某一基本结果发生，或者说，当 $\omega_1(\in A)$发

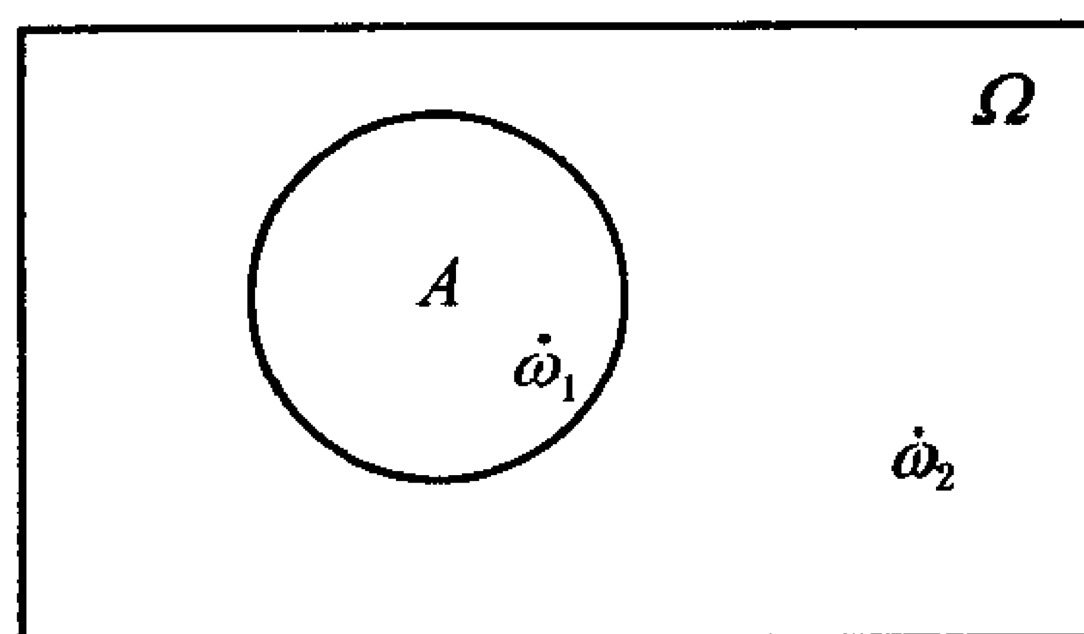


图 1.1.1　事件 A 的维恩图

生，则说事件 A 发生；当 $\omega_2(\overline{\in} A)$发生，则说事件 A 不(没)发生。

(3)事件 A 的表示可用集合，也可用语言，但所用语言要使大家明白无误。

例 1.1.3　抛两枚硬币的基本空间 Ω 由下列四个基本结果组成：

$$\omega_1=(\text{正},\text{正})\qquad \omega_2=(\text{正},\text{反})$$

$$\omega_3=(\text{反},\text{正})\qquad \omega_4=(\text{反},\text{反})$$

下面几个事件可用集合形式表示，也可用语言形式表示。

$$A=\text{“至少出现一个正面”}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$$

$$B=\text{“最多出现一个正面”}=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$$

$$C=\text{“恰好出现一个正面”}=\{\omega_2,\omega_3\}$$

$$D=\text{“出现二面相同”}=\{\omega_1,\omega_4\}$$

例 1.1.4　掷一颗骰子，“出现 6 点”、“出现偶数点”、“出现点数不超过 2”、“出现点数不等于 3”都是事件，若依次记为 A、B、C、D，那它们都可以用其基本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$的某个子集表示。

$$A=\{6\}\qquad B=\{2,4,6\}$$

$$C=\{1,2\}\qquad D=\{1,2,4,5,6\}$$

可以设想你处在这样一种情况，在掷骰子前约定，出现偶数点(事件 B)就中奖。若掷的结果出现 4 点，你就中奖了(事件 B 发生了)，若掷出 2 点或 6 点，你也中奖了，这说明，事件 B 虽由三个基本结果组成，但只要其中任一个出现就说事件 B 发生了。

假如掷二颗骰子，这时基本结果可用一个数对(x,y)表示，其中 x 表示第一颗骰子出现的点数，y 表示第二颗骰子出现的点数，这一随机现象的基本空间为

$$\Omega_1=\{(x,y):x,y=1,2,3,4,5,6\}$$

它含有 36 个基本结果。下列事件都可看作 Ω_1 的某个子集。

A_1=“点数之和等于 2”$=\{(1,1)\}$。

B_1=“点数之和等于 5”$=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$。

C_1=“点数之和超过 9”={(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)}。

D_1=“点数之和不小于 4,也不超过 6”={(1,3),(2,3),(3,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,5),(2,4),(3,3)(4,2)(5,1)}。

上述事件 A_1,B_1,C_1,D_1 都是基本空间的子集。它们可用图 1.1.2 直观地表示出来。

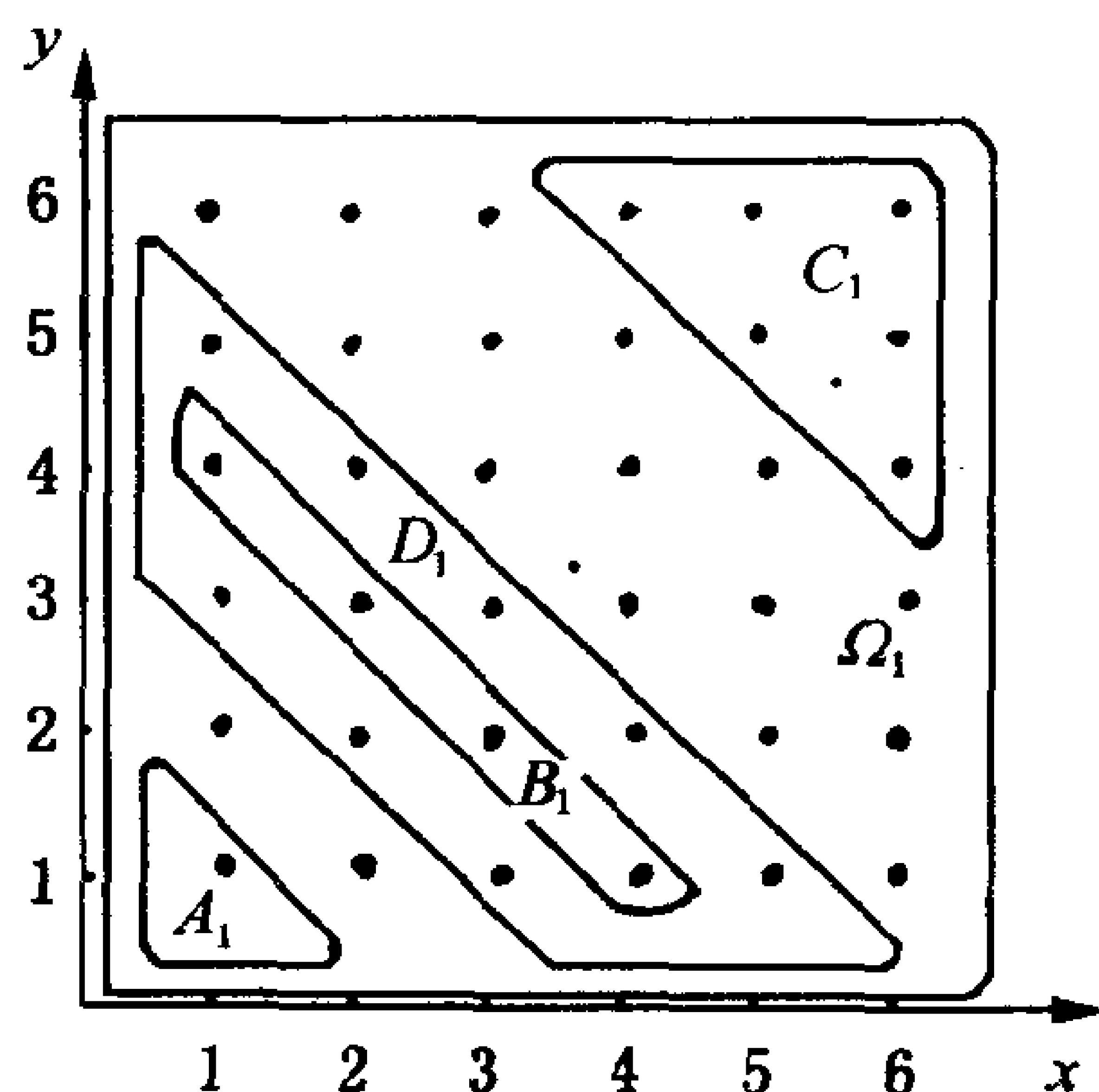


图 1.1.2　基本空间 Ω_1 与某些事件的示意图

1.1.4　必然事件与不可能事件

任一个基本空间 Ω 都有一个最大子集(基本空间本身 Ω)和一个最小子集(空集 ϕ),最大子集称为**必然事件**,仍用 Ω 表示,最小子集称为**不可能事件**,用空集符号 ϕ 表示。

如掷一颗骰子,“出现点数不超过 6”就是一个必然事件,因为它含有基本空间 Ω={1,2,3,4,5,6}中一切可能的基本结果,任何一个基本结果 ω 出现必导致 Ω 发生,由此可见必然事件是肯定要发生的事件。又如掷一颗骰子,“出现 7 点”就是一个不可能事件,因为它不含有基本空间 Ω 中任一个基本结果,即它是 Ω 的空集,由此可见,不可能事件 ϕ 是肯定不会发生的事件。

1.1.5　事件间的关系

为以后的概率计算化繁就简,需要研究事件间的关系与事件的运算规则,这里先研究事件间关系,事件间关系与集合间关系一样主要有以下三种:

(1)**事件的包含**。设在同一个试验里有两个事件 A 与 B,若事件 A 中任一基本结果必在 B 中,则称 A 被包含在 B 中,或 B 包含 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset$

A，这时事件 A 的发生必导致事件 B 的发生，如图 1.1.3 所示，如掷一颗骰子，事件 A＝“出现 4 点”的发生必导致事件 B＝“出现偶数点”的发生，故 $A\subset B$。

显然，对任一个事件 A，必有 $\Omega\supset A\supset\phi$。

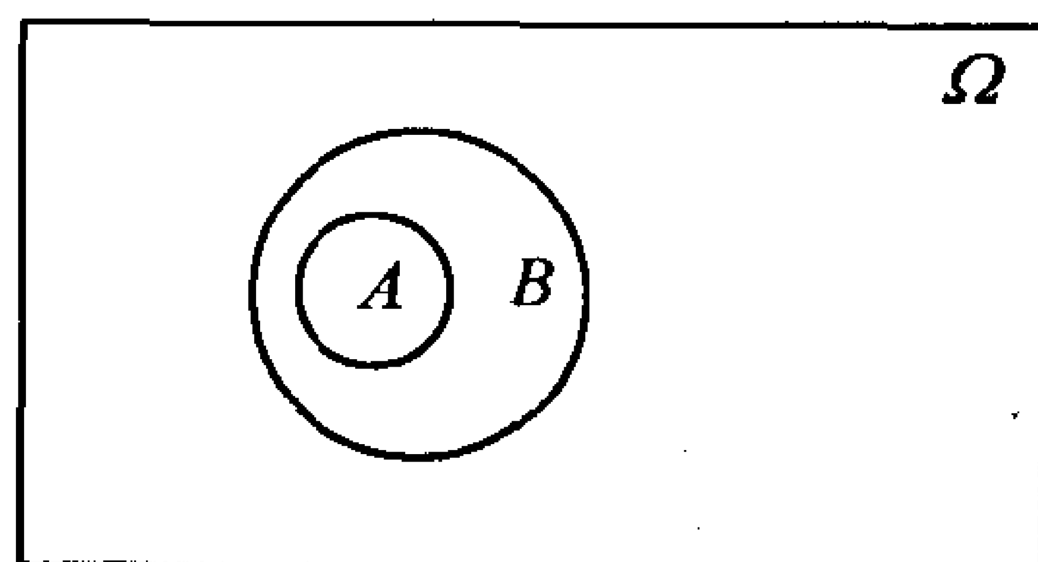


图 1.1.3　$B\supset A$

(2)**事件的相等**。设在同一试验里有两个事件 A 与 B。若 A 中任一基本结果必在 B 中($A\subset B$)，而 B 中任一基本结果也必在 A 中($B\subset A$)，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$，这时 A 与 B 必含有相同的基本结果。如掷两颗骰子的基本结果记为(x,y)，其中 x 与 y 分别为第一和第二颗骰子出现的点数，定义如下两个事件：

$$A=\text{“}x+y=\text{奇数”}$$

$$B=\text{“}x\text{ 与 }y\text{ 的奇偶性不同”}$$

现来证明这二个事件相等。若$(x,y)\in A$，即 $x+y$＝奇数，则 x 与 y 中必是一个奇数，另一个是偶数，这表明 x 与 y 的奇偶性不同，即$(x,y)\in B$，亦即 $A\subset B$。反之，若$(x,y)\in B$，即 x 与 y 的奇偶性不同，则其和必为奇数，这又有$(x,y)\in A$，即 $B\subset A$，这样我们就证明了 $A=B$。

(3)**事件的互不相容性**。在同一个试验里，若两个事件 A 与 B 没有相同的基本结果，则称事件 A 与 B 互不相容，或称互斥。这时事件 A 与 B 不可能同时发生，见图 1.1.4(a)。如在电视机寿命试验中，“电视机寿命小于 1 万小时”与“电视机寿命大于 5 万小时”是两个互不相容事件，因为它们不可能同时发生。

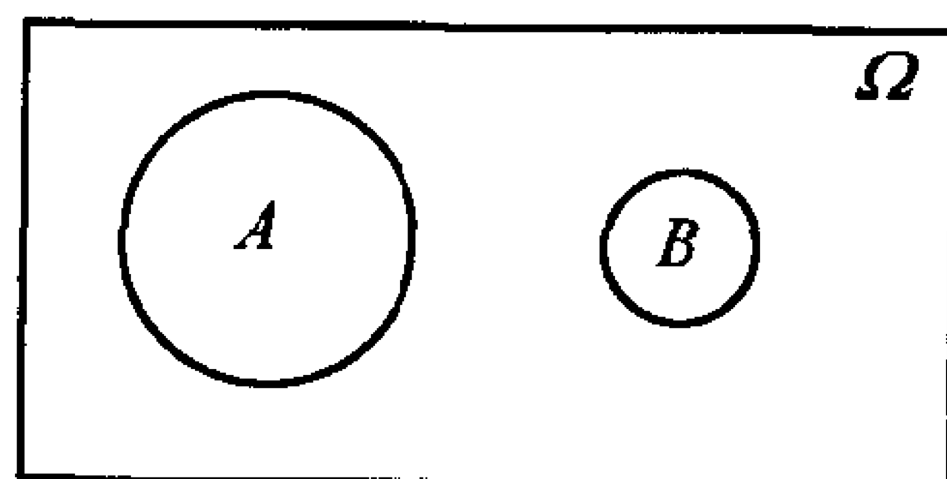


图 1.1.4(a)　A 与 B 互不相容

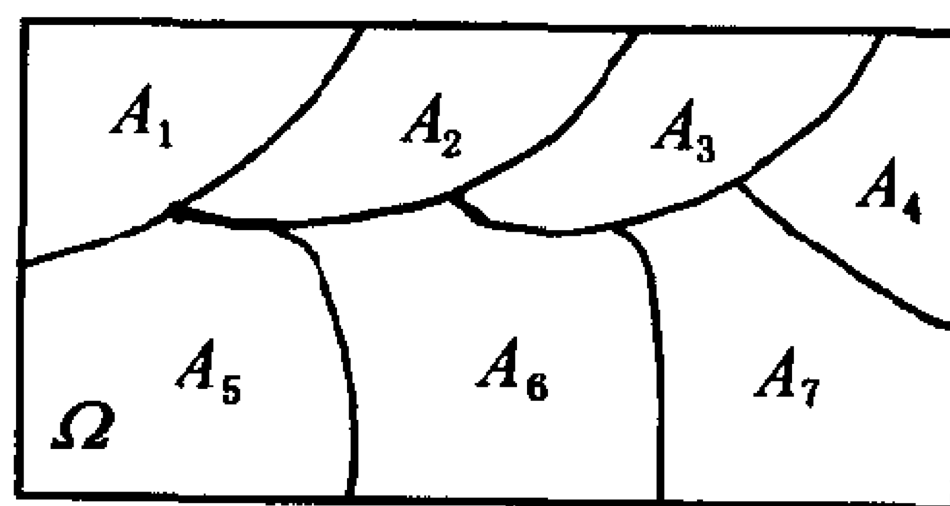


图 1.1.4(b)　多个事件互不相容

两个事件间的互不相容性可以推广到多个事件间的互不相容性。设在同一个试验里有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$，若其中任意两个事件都是互不相容的，则称这 n 个事件互不相容，见图 1.1.4(b)。

1.1.6 事件的运算

事件的基本运算有四种：对立、并、交和差。它们与集合的余、并、交和差是完全一样的。

(1)**对立事件**。设 A 为一个试验里的事件，则由不在 A 中的一切基本结果组成的事件称为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$。图 1.1.5 上的阴影部分就表示 A 的对立事件 $\overline{A}$。可见，$\overline{A}$ 就是"A 不发生"。如在掷一颗骰子的试验中，事件 A="出现偶数点"的对立事件 $\overline{A}$="出现奇数点"。因为不出现偶数点必出现奇数点。

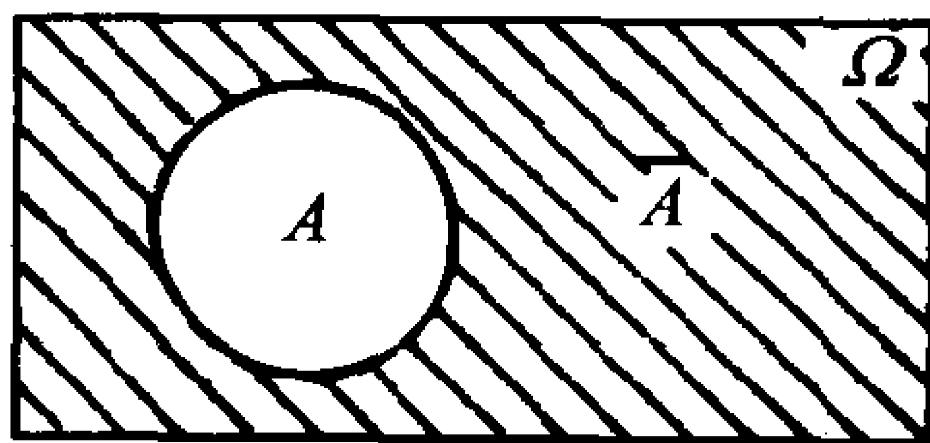


图 1.1.5 A 的对立事件 $\overline{A}$

对立事件是相互的，A 的对立事件是 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 的对立事件必是 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$。特别，必然事件 Ω 与不可能事件 ϕ 互为对立事件。即 $\overline{\Omega}=\phi$，$\overline{\phi}=\Omega$。

(2)**事件 A 与 B 的并**。是由事件 A 与 B 中所有基本结果(相同的只计入一次)组成的一个新事件，记为 $A\cup B$。在掷一颗骰子的试验中，事件 A="出现奇数点"$=\{1,3,5\}$与事件 B="出现点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$的并为 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$。可见，事件 A 与 B 中重复元素只须记入并事件一次。图 1.1.6 是事件 A 与 B 的并的示意图。从图上可见，并事件 $A\cup B$ 发生意味着"事件 A 与 B 中至少一个发生"。

从对立事件的定义(见图 1.1.5)可见：$A\cup\overline{A}=\Omega$。即在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 必出现一个。

(3)**事件 A 与 B 的交**。是由事件 A 与 B 中公共的基本结果组成的一个新事件，记为 $A\cap B$ 或 AB。如在掷一颗骰子的试验里，A="出现奇数点"$=\{1,3,5\}$与事件 B="出现点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$的交 $AB=\{1,3\}$。可见，若交事件 AB 发生，则事件 A 与 B 必同时发生，反之亦然。图 1.1.7 是交事件 AB 的示意图。

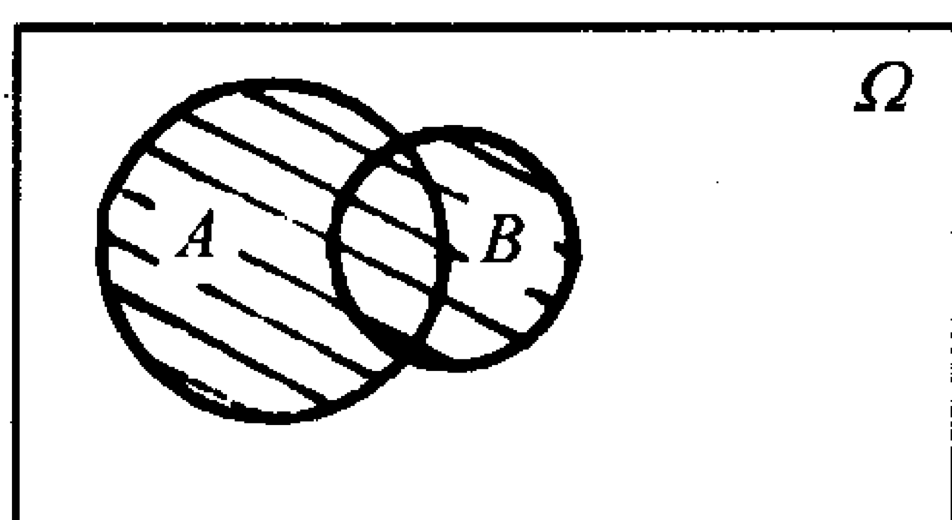


图 1.1.6　A 与 B 的并

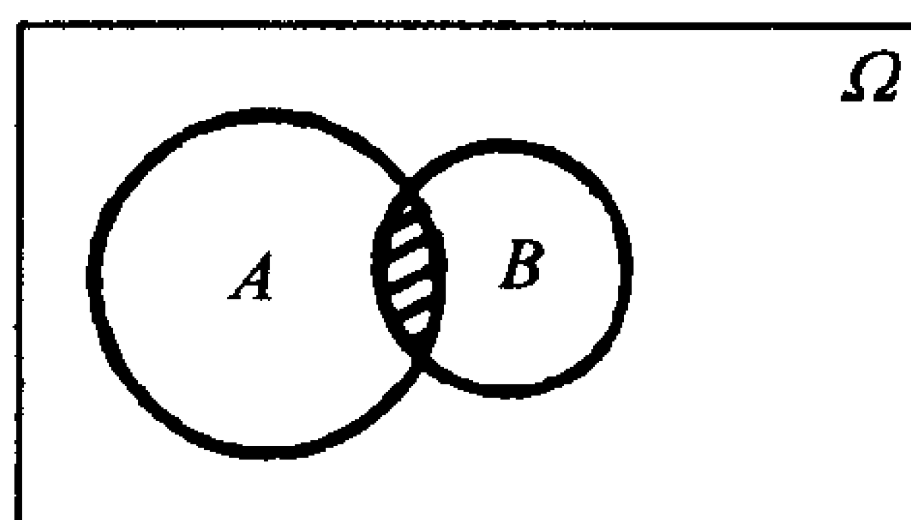


图 1.1.7　A 与 B 的交

若事件 A 与 B 互不相容，则 $AB=\phi$，反之亦然。

(4)**事件 A 对 B 的差**。是由在事件 A 中而不在事件 B 中的基本结果组成的一个新事件，记为 $A-B$。如在掷一颗骰子试验里，事件 A＝"出现奇数点"$=\{1,3,5\}$对事件 B＝"出现点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$的差事件是 $A-B=\{5\}$。而 B 对 A 的差事件 $B-A=\{2\}$。这是两个不同的差事件。可见，差事件 $A-B$ 是表示事件 A 发生而事件 B 不发生这样一个事件。图 1.1.8(a)与(b)是两种场合下差事件的示意图。从图 1.1.8 可以看出，$A-B=A-AB=A\overline{B}$。

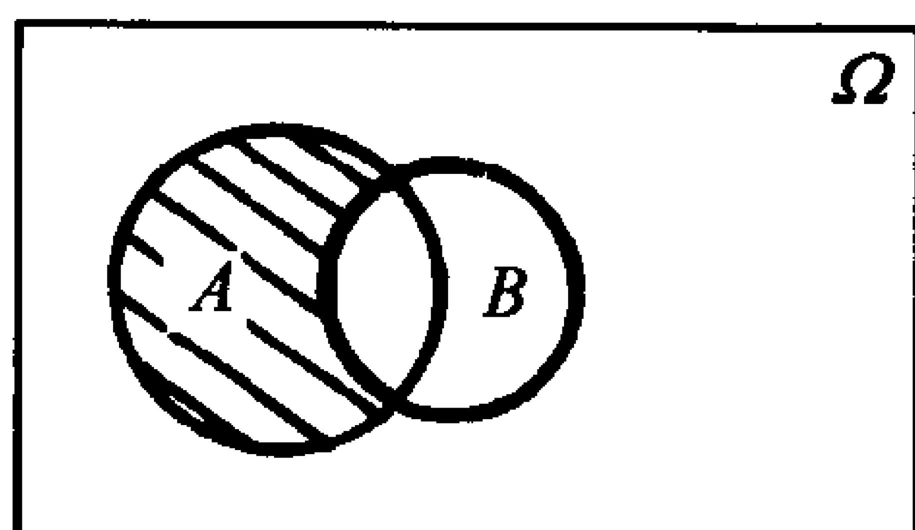


图 1.1.8(a)　$A-B$

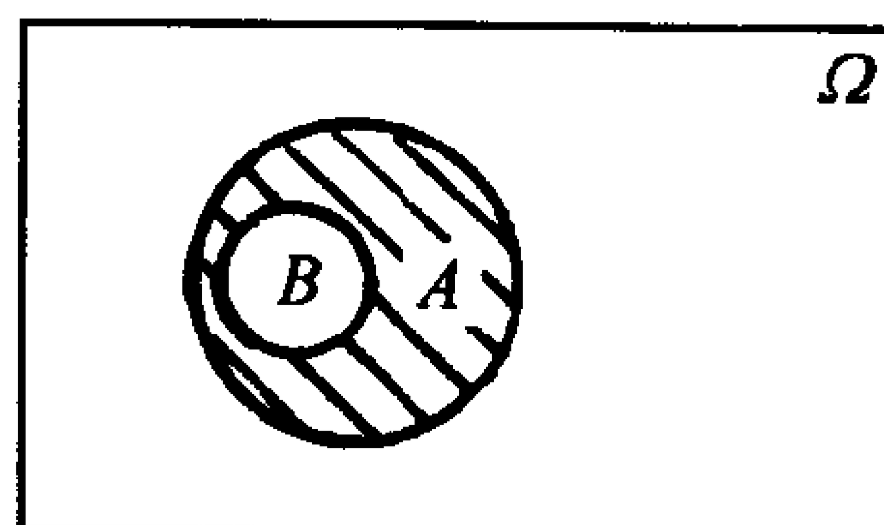


图 1.1.8(b)　$A-B(A\supset B)$

(5)**事件的并和交可以推广到更多个事件上去(见图 1.1.9)**。

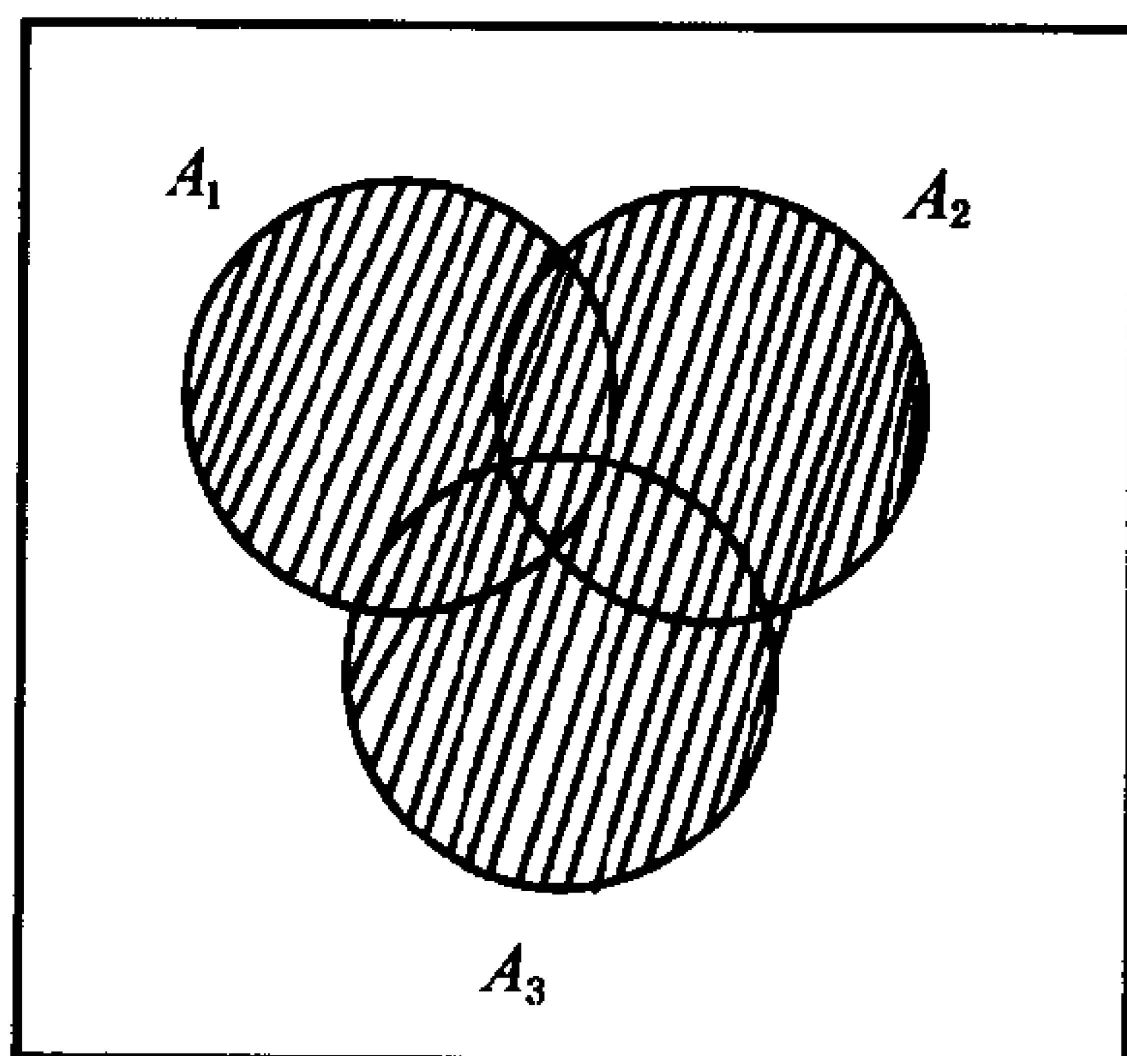


图 1.1.9(a)　$A_1\cup A_2\cup A_3$

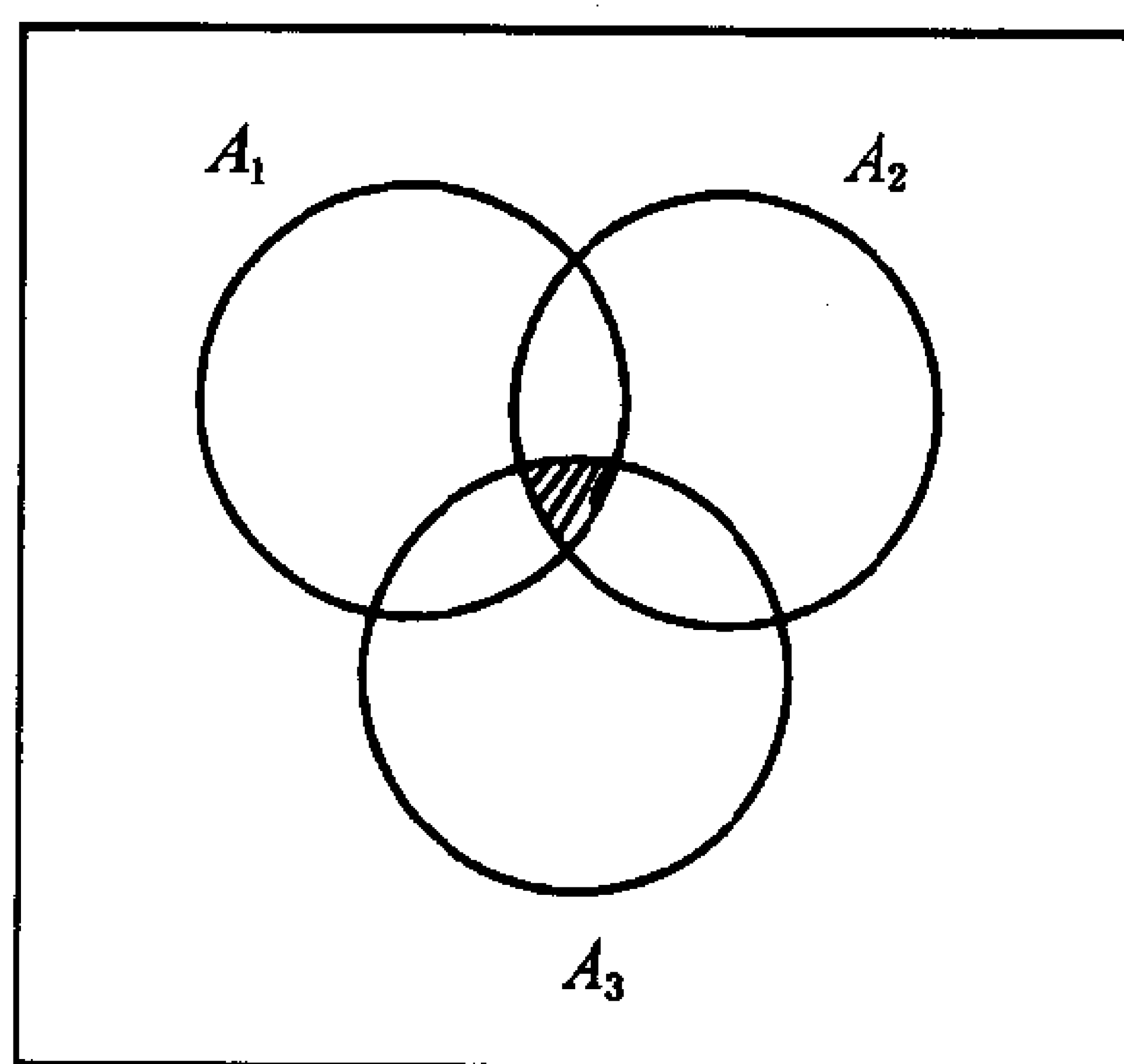


图 1.1.9(b)　$A_1A_2A_3$

"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"称为此 **n 个事件的并**，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$。类似可定义可列个事件的并。

"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"称为此 **n 个事件的交**，记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$。类似可定义可列个事件的交。

例 1.1.5 设 A,B,C 是某个试验中的三个事件，则

(1)事件"A 与 B 发生，C 不发生"可表示为 $AB\overline{C}$。

(2)事件"A,B,C 中至少有一个发生"可表示为 $A\cup B\cup C$。

(3)事件"A,B,C 中至少有两个发生"可表示为 $AB\cup BC\cup AC$。

(4)事件"A,B,C 中恰好发生两个"可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$。

(5)事件"A,B,C 中有不多于一个事件发生"可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$。

§1.2 事件的概率

1.2.1 事件的概率

随机事件的发生是带有偶然性的。但随机事件发生的可能性还是有大小之别的，是可以设法度量的。而在生活、生产和经济活动中人们很关心一个随机事件发生的可能性大小。譬如：

(1)抛一枚硬币，出现正面与出现反面的可能性是相同的，各为 1/2。足球裁判就是用抛硬币的方法让双方队长选择场地，以示机会均等。

(2)某厂试制成功一种新止痛片在未来市场的占有率是多少呢?市场占有率高，就应多生产，获得更多利润；市场占有率低，就不能多生产，否则会造成积压，不仅影响资金周转，而且还要花钱去贮存与保管。市场占有率对厂长组织生产太重要了。

(3)购买彩券的中奖机会有多少呢？如 1993 年 7 月发行的青岛啤酒股票的认购券共出售 287 347 740 张，其中有 180 000 张认购券会中签。中签率是万分之 6.264(见 1993 年 7 月 30 日上海证券报)。

上述机会，市场占有率、中签率以及常见的废品率、命中率、男婴儿出生率等都是用来度量随机事件发生的可能性大小。尽管用的术语不同，但其共同点是用 0 到 1 间的一个数(也称为比率)来表示一个随机事件发生的可能性大

小。在概率论中，这种比率就是概率的原形。为了使这种比率真正成为概率，以致在今后概率运算中不引起麻烦，还需对这种比率增加某种可加性的要求。具体请看下面给出的概率定义。

定义 1.2.1 在一个随机现象中，用来表示任一个随机事件 A 发生可能性大小的实数(即比率)称为该**事件的概率**，记为 $P(A)$，并规定

(1)**非负性公理** 对任一事件 A，必有 $P(A)\geqslant 0$。

(2)**正则性公理** 必然事件的概率 $P(\Omega)=1$。

(3)**可加性公理** 若 A_1 与 A_2 是两个互不相容事件(即 $A_1A_2=\phi$)，则有

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$$

这就是著名的**概率的公理化定义**(它的进一步完善将在§2.1.3内叙述)。在这个定义出现之前，曾有过概率的古典定义、概率的统计定义、概率的主观定义。这些定义各适合一类随机现象。那么适合一切随机现象的概率的最一般定义应如何给出呢？很多人思索过这个问题。1900年大数学家希尔伯特(1862～1943)在巴黎第二届国际数学家大会上公开提出要建立概率的公理化体系。即从概率的少数几条性质出发来刻划概率的概念。直到1933年，前苏联数学家柯莫哥洛夫(1903～1987)在他的《概率论基本概念》(丁寿田译，1952)一书中首次提出上述概率的公理化定义。这个定义概括了历史上几种概率定义中的共同特性，又避免了各自的局限性和含混之处，不管什么随机现象，只有满足定义中的三条公理才能说它是概率。这一公理化体系的出现迅速获得举世公认。为现代概率论发展打下坚实基础，从此数学界才承认概率论是数学的一个分支。有了这个公理化体系之后，概率论得到很快发展。这个公理化体系是概率论发展史上的一个里程碑。

概率的公理化定义虽刻划了概率的本质，但没有告诉人们如何去确定概率。历史上概率的古典定义、概率的统计定义和概率的主观定义都有各自确定概率的方法。所以，在有了公理化定义之后，把它们看作确定概率的三种方法倒是很恰当的。下面先介绍排列与组合公式，然后将分别叙述这些方法。

1.2.2 排列与组合概要

排列与组合是两类计数公式。它们的推导都基于如下两条计数原理：

(1)**乘法原理** 如果某件事需经 k 个步骤才能完成，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，…，做第 k 步有 m_k 种方法，那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 种方法。

譬如，甲城到乙城有3条旅游线路，由乙城到丙城有2条旅游线路，那么

从甲城经乙城去丙城共有 3×2=6 条旅游线路。

(2)**加法原理** 如果某件事可由 k 类不同办法之一去完成，在第一类办法中又有 m_1 种完成方法，在第二类办法中又有 m_2 种完成方法，……，第 k 类办法中又有 m_k 种完成方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种方法。

例如，由甲城到乙城去旅游有三类交通工具：汽车、火车和飞机。而汽车有 5 个班次，火车有 3 个班次，飞机有 2 个班次，那么从甲城到乙城共有 5+3+2=10 个班次供旅游者选择。

(3)**排列** 从 n 个不同元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素排成一列称为一个排列，按乘法原理，此种排列共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$ 个，记为 P_n^r。若 $r=n$，称为**全排列**，全排列数共有 $n!$ 个，记为 P_n。

(4)**重复排列** 从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取下一个，如此连续取 r 次所得的排列称为重复排列，此种重复排列数共有 n^r 个。注意，这里的 r 允许大于 n。

(5)**组合** 从 n 个不同元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素并成一组(不考虑其间顺序)称为一个组合，按乘法原理，此种组合总数为

$$\binom{n}{r}=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

并规定 $0!=1$ 和 $\binom{n}{0}=1$，这里的 $\binom{n}{r}$ 还是二项式展开式的系数，即

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^rb^{n-r}$$

若在上式中令 $a=b=1$，可得一重要组合恒等式：

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

(6)**重复组合** 从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取下一个，如此连续取 r 次所得的组合称为重复组合。此种重复组合总数为 $\binom{n+r-1}{r}$。

上述四种排列组合及其总数计算公式将在古典概率计算中经常使用，这里不再举例说明，但应指出，在使用中要注意识别有序与无序、重复与不重复。

1.2.3 古典方法

古典方法是在经验事实的基础上对被考察事件发生可能性进行符合逻辑分析后得出该事件的概率。这种方法简单、直观、不需要做试验，但只能在一类

特定随机现象中使用。其基本思想如下：

(1)**所涉及的随机现象只有有限个基本结果**。不妨设基本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，其中 n 为其基本结果的总数。

(2)**每个基本结果出现的可能性是相同的(简称等可能性)**。确定一个随机现象的每个基本结果是等可能的，常凭经验事实和进行符合逻辑的分析。譬如在掷骰子试验中，如果骰子是均匀的正六面体，那就没有理由认为其中一面出现机会比另一面更多一些。故认为骰子各面出现的机会是等可能的。

(3)**假如被考察的事件 A 含有 k 个基本结果，则事件 A 的概率就是**

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中含基本结果的个数}}{\Omega\text{ 中基本结果总数}} \tag{1.2.1}$$

这种确定概率的方法曾是概率论发展初期的主要方法，故所得概率又称为古典概率。它满足概率定义 1.2.1 中的三条公理。非负性公理是显然满足的。必然事件概率 $P(\Omega)$ 按(1.2.1)式计算必为 $n/n=1$，故正则性公理成立。最后，对两个互不相容事件 A_1 和 A_2，若有

$$P(A_1)=\frac{k_1}{n}, \quad P(A_2)=\frac{k_2}{n}$$

这表明，事件 A_1 和 A_2 分别含有 k_1 和 k_2 个基本结果，由于 A_1 与 A_2 互不相容，故在 k_1+k_2 个基本结果中没有相同的基本结果，所以并事件 $A_1 \cup A_2$ 含有 k_1+k_2 个基本结果。这样一来，可得

$$P(A_1 \cup A_2)=\frac{k_1+k_2}{n}=P(A_1)+P(A_2)$$

故可加性公理成立。

下面一些例子说明如何用(1.2.1)式去计算古典概率。这要涉及到一些排列与组合的知识。

例 1.2.1(扑克游戏) 一副标准的扑克牌由 52 张组成，它有两种颜色、四种花式和 13 种牌形。具体分布如表 1.2.1 所示。

假如 52 张牌的大小、厚度和外形完全一样(一般的扑克牌都满足这一条件)，那末 52 张牌中任一张被抽出的可能性是相同的。我们来研究下面一些事件的概率。

(1)事件 A＝“抽出一张红牌”。在抽一张牌试验中，共有 52 种等可能基本结果，其中红牌有 26 张(13 张红心和 13 张红方块)。故事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{26}{52}=0.5$$

表 1.2.1 标准扑克牌的分布

黑桃	红心	黑草花	红方块
A	A	A	A
K	K	K	K
Q	Q	Q	Q
J	J	J	J
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7
6	6	6	6
5	5	5	5
4	4	4	4
3	3	3	3
2	2	2	2

(2)事件 B=“抽出一张不是红心”。在这个抽牌试验中，亦有 52 种等可能基本结果，但不是红心的牌只有 39 张，故事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{39}{52}=\frac{3}{4}=0.75$$

(3)事件 C=“抽出二张红心牌”。在这个抽二张牌的试验中，共有 $\binom{52}{2}$ 个等可能基本结果。其中二张牌全是红心必须在 13 张红心牌中抽取才能使事件 C 发生。故事件 C 所包含的基本结果总数为 $\binom{13}{2}$ 个。故

$$P(C)=\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{13\times 12}{52\times 51}=\frac{1}{17}=0.05882$$

(4)事件 D=“抽出二张不同颜色的牌”。在这个抽二张牌的试验中，亦有 $\binom{52}{2}$ 个等可能基本结果，要获得二张不同颜色的牌(即事件 D 发生)可以设想分二步完成此事，第一步从 26 张红牌中任取 1 张，第二步再从 26 张黑牌中任取 1 张。依据乘法原则，要获二张不同颜色的牌共有 26×26 种基本结果，故

$$P(D)=\frac{26\times 26}{\binom{52}{2}}=\frac{26}{51}=0.5098$$

可见，事件 D 比事件 C 发生的概率要高达 8.7 倍。

(5)事件 E=“抽出二张同花式的牌”。在这个抽二张牌的试验中，仍有 $\binom{52}{2}$ 个等可能基本结果。要获得二张同花式的牌可以有四种方式得到。

第一种方式，从 13 张黑桃中任取二张，共有 $\binom{13}{2}$ 种可能；

第二种方式，从 13 张红心中任取二张，共有 $\binom{13}{2}$ 种可能；

第三种方式，从 13 张草花中任取二张，共有 $\binom{13}{2}$ 种可能；

第四种方式，从 13 张方块中任取二张，共有 $\binom{13}{2}$ 种可能；

依据加法原则，要获得二张同花式的牌共有 $\binom{13}{2}+\binom{13}{2}+\binom{13}{2}+\binom{13}{2}=4\cdot\binom{13}{2}$ 种基本结果，故

$$P(E)=\frac{4\cdot\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{4}{17}=0.2353$$

(6)事件 F=“抽出 5 张，恰好是同花顺”。在这个抽 5 张牌的试验中，共有 $\binom{52}{5}$ 个等可能基本结果。要获得 5 张同花顺的牌可以有四种方式(即四种花式)得到，并且这四种方式获得的同花顺的基本结果数是相同的，现以黑桃花式为例。要得到同花顺，只有以下 10 种基本结果：

A K Q J 10	K Q J 10 9	Q J 10 9 8
J 10 9 8 7	10 9 8 7 6	9 8 7 6 5
8 7 6 5 4	7 6 5 4 3	6 5 4 3 2
5 4 3 2 A		

依据加法原则，要获得 5 张同花顺的牌共有 $4\times10=40$ 种基本结果。故

$$P(F)=\frac{40}{\binom{52}{5}}=0.00001539$$

这个概率是很小的，仅有 10 万分之 1.5。此类事件被称为稀有事件。

(7)事件 G=“抽出 13 张同花式的牌”。在这个抽 13 张牌的试验中，共有 $\binom{52}{13}$ 个等可能基本结果。其中同花式的只有 4 种，即全是黑桃、全是红桃、全

是草花、全是方块，故

$$P(G)=\frac{4}{\binom{52}{13}}=0.1587\times10^{-12}$$

这个概率是非常小的，几乎不可能发生。假如在一次扑克游戏中，事件 G 发生了，在惊讶之余有人会怀疑在做牌，这种怀疑不是没有道理的。

在扑克游戏中会遇到很多有趣的随机事件。读者可以举出很多例子，并试算它们的概率。

例 1.2.2（随机抽样） 一批产品共有 N 个，其中不合格品有 M 个，现从中随机取出 n 个，问事件 A_m＝“恰好有 m 个不合格品”的概率是多少？

从 N 个产品中随机取出 n 个只有 $\binom{N}{n}$ 种基本结果。其中“随机取出”必导致这 $\binom{N}{n}$ 种基本结果是等可能的。以后对“随机”一词亦可作同样理解。下面我们先计算事件 A_0，A_1 的概率，然后再计算一般事件 A_m 的概率。

事件 A_0＝“恰好有 0 个不合格品”＝“全是合格品”。要使取出的 n 个产品全是合格品，那必须从 $N-M$ 个合格品中抽取，这有 $\binom{N-M}{n}$ 种取法，故事件 A_0 的概率为

$$P(A_0)=\frac{\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}}$$

事件 A_1＝“恰好有 1 个不合格品”，要使取出的 n 个产品中只有一个不合格品，其它 $n-1$ 个是合格品，那要分二步抽取。第一步从 M 个不合格品中随机取出 1 个，共有 $\binom{M}{1}$ 种取法；第二步从 $N-M$ 个合格品中随机取出 $n-1$ 个，共有 $\binom{N-M}{n-1}$ 种取法。依据乘法原则，要使 A_1 出现共有 $\binom{M}{1}\binom{N-M}{n-1}$ 种基本结果。故事件 A_1 的概率为

$$P(A_1)=\frac{\binom{M}{1}\binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

要使事件 A_m 发生，必须从 M 个不合格品中抽 m 个，而从 $N-M$ 个合格品中抽 $n-m$ 个，依据乘法原则，要使 A_m 发生的基本结果共有

$\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$个，故事件 A_m 的概率是

$$P(A_m)=\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

这里要求 $m\leqslant M, n-m\leqslant N-M$，否则概率为 0，因为它们是不可能事件。而命题"不可能事件的概率为 0"将在下节由三条公理推得。

假如给定 $N=10, M=2, n=4$，我们来计算诸 A_m 的概率

$$P(A_0)=\binom{10-2}{4}\Big/\binom{10}{4}=0.3333$$

$$P(A_1)=\binom{2}{1}\binom{10-2}{4-1}\Big/\binom{10}{4}=0.5333$$

$$P(A_2)=\binom{2}{2}\binom{10-2}{4-2}\Big/\binom{10}{4}=0.1334$$

而 A_3, A_4 等都是不可能事件。因为 10 个产品中只有 2 个不合格品，而要从中抽出 3 件或 4 件不合格品，这是不可能的。

例 1.2.3（放回抽样） 抽样有二种方式：不放回抽样与放回抽样。例 1.2.2 谈的是不放回的抽样，每次抽取一个，不放回，再抽第二个，这相当于 n 个同时取出。因此可不论其次序。放回抽样（又称还原抽样）是抽一个，放回后，再抽下一个。这时要讲究次序，现对例 1.2.2 采取放回抽样讨论事件 B_m="恰好有 m 个不合格品"的概率。

从 N 个产品中每次抽一个检查，放回后再抽第二个，直至抽出第 n 个检查，共有 N^n 种等可能的基本结果。

事件 B_0="全是合格品"发生必须从 $N-M$ 个合格品中用放回抽样抽 n 次，共有$(N-M)^n$ 种基本结果，故

$$P(B_0)=\frac{(N-M)^n}{N^n}=\left(1-\frac{M}{N}\right)^n$$

事件 B_1="恰好有 1 件不合格品"发生必须从 $N-M$ 个合格品中用放回抽样抽 $n-1$ 次，从 M 个不合格品中抽一次。这样就有 $M\cdot(N-M)^{n-1}$种取法。再考虑到不合格品可能在第一次抽样中出现，也可能在第二次抽样中出现，……，也可能在第 n 次抽样中出现，故总的基本结果共有 $n\cdot M\cdot(N-M)^{n-1}$。故

$$P(B_1)=\frac{nM(N-M)^{n-1}}{N^M}=n\cdot\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})^{n-1}$$

事件 B_m 的发生共有 $\binom{n}{m}M^m(N-M)^{n-m}$ 个基本结果。其中二项式系数 $\binom{n}{m}$ 是由于考虑到 m 个不合格品可能出现在 n 次放回抽样中任何 m 次所致。故

$$P(B_m)=\binom{n}{m}\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

这里 m 可以取 $0,1,\cdots,n$。特别当 $m=n$ 时，$P(B_n)=(M/N)^n$。

假如给定 $N=10,M=2,n=4$。我们来计算诸 B_m 的概率：

$$P(B_0)=\left(1-\frac{2}{10}\right)^4=0.8^4=0.4096$$

$$P(B_1)=4\times0.2\times0.8^3=0.4096$$

$$P(B_2)=6\times0.2^2\times0.8^2=0.1536$$

$$P(B_3)=4\times0.2^3\times0.8=0.0256$$

$$P(B_4)=0.2^4=0.0016$$

可见，在放回抽样中，B_0 和 B_1 发生的可能性最大，而 B_4 发生的可能性要小得多，在一千次中还不到二次。

1.2.4 频率方法

频率方法是在大量重复试验中用频率去获得概率近似值的一个方法。它是最常用，也是最基本的获得概率的方法。频率方法的基本思想如下：

(1)**与考察事件 A 有关的随机现象是允许进行大量重复试验的。**

(2)**假如在 N 次重复试验中，事件 A 发生 K_N 次，则事件 A 发生的频率为**

$$P_N^*(A)=\frac{K_N}{N}=\frac{\text{事件 } A \text{ 发生的次数}}{\text{重复试验次数}} \tag{1.2.2}$$

频率 $P_N^*(A)$ 确能反映事件 A 发生可能性的大小，$P_N^*(A)$ 大意味着 A 发生的可能性大，$P_N^*(A)$ 小反映着 A 发生的可能性小。另外，频率还具有非负性，必然事件 Ω 的频率必为1，而对任意两个互不相容事件 A_1 与 A_2，若在 N 次重复试验中，A_1 出现 $K_N^{(1)}$ 次，A_2 出现 $K_N^{(2)}$ 次，那么并事件 $A_1\cup A_2$ 在这 N 次重复试验中必出现 $K_N^{(1)}+K_N^{(2)}$ 次，从而其频率有

$$P_N^*(A_1\cup A_2)=\frac{K_N^{(1)}+K_N^{(2)}}{N}=P_N^*(A_1)+P_N^*(A_2)$$

这些说明频率亦具有非负性、正则性和可加性。

(3)**频率 $P_N^*(A)$ 依赖于重复次数 N。**不同的 N，事件 A 的频率会不同，但

人们的长期实践表明，随着重复次数 N 的增加，频率 $P_N^*(A)$ 会稳定在某一常数附近(见例 1.2.4)，这个频率的稳定值已与 N 无关，它就是事件 A 发生的概率 $P(A)$。由频率的性质可以看到其稳定值(即概率)亦有类似性质。

(4)在现实世界里，我们无法把一个试验无限次地重复下去，因此要获得事件 A 发生的频率的稳定值 $P(A)$ 是件很难的事情。但在重复次数 N 较大时，频率 $P_N^*(A)$ 就很接近概率 $P(A)$。在统计学中把频率称为概率的估计值，在实际中频率常当作概率近似值使用，譬如，在足球比赛中，罚点球是一个扣人心弦的场面，若记事件 A="罚点球射中球门"，A 的概率，即判罚点球的命中率 $P(A)$ 是多少？这可以通过重复试验所得数据资料计算频率而得概率估计值，曾经有人对 1930 年至 1988 年世界各地 53274 场重大足球比赛作了统计，在判罚的 15382 个点球中，有 11172 个射中，频率为 11172/15382 = 0.726，这就是罚点球命中概率 $P(A)$ 的估计值。

例 1.2.4 说明频率稳定性的例子。

(1)在掷一枚均匀硬币时，古典概率已给出，出现正面的概率为 0.5。为了验证这一点，每个人都可以作大量的重复试验，图 1.2.1 记录了前 400 次掷硬币试验中频率 P^*(正面)的波动情况，在重复次数 N 较小时，P^* 波动剧烈，随着 N 的增大，P^* 波动的幅度在逐渐变小。历史上有不少人做过更多次重复试验。其结果(见表 1.2.2)表明，正面出现的频率逐渐稳定在 0.5。这个 0.5 就是频率的稳定值，也是正面出现的概率。这与用古典方法计算的概率是相同的。

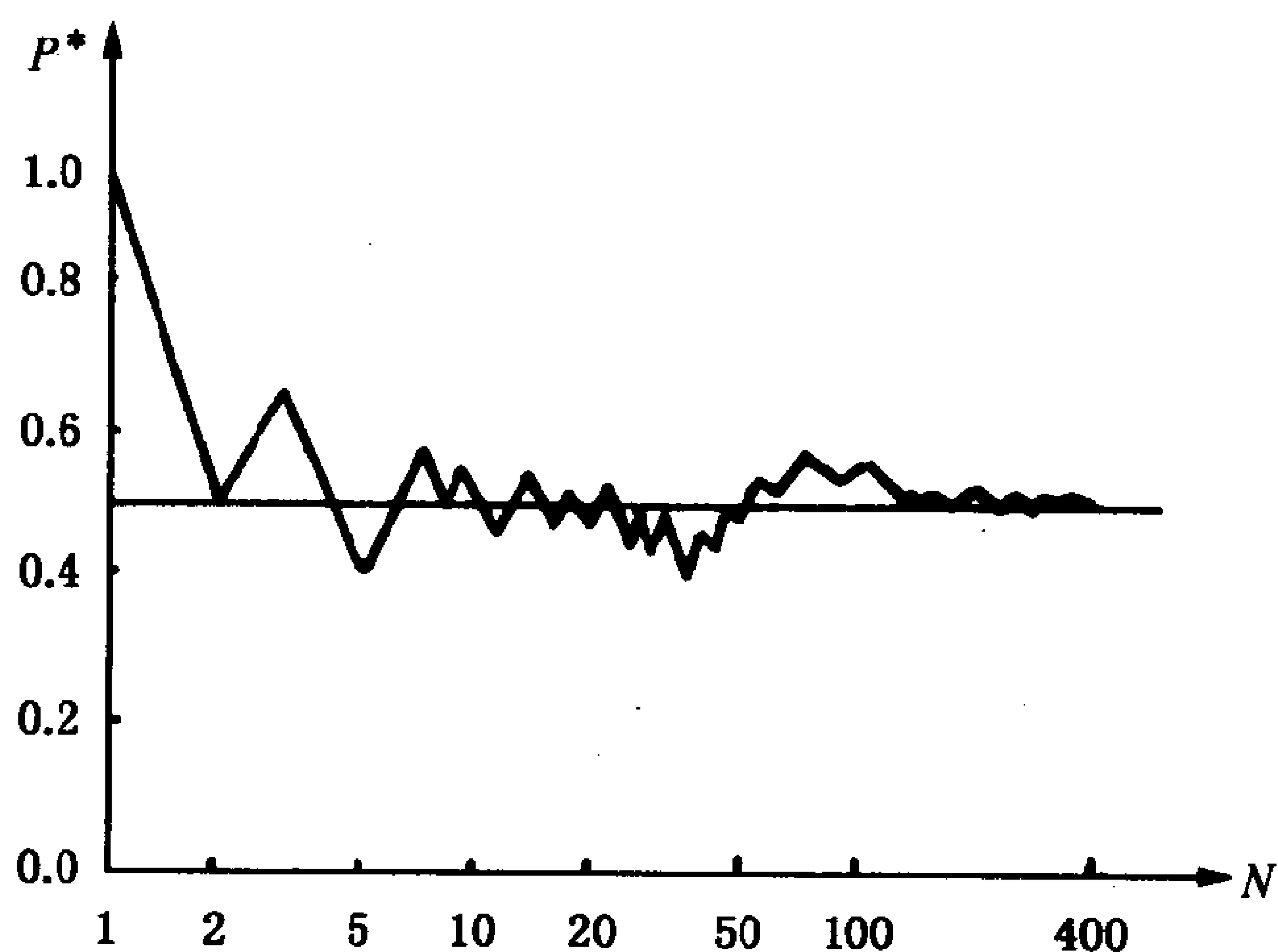


图 1.2.1 掷一枚硬币，正面出现频率的趋势(横轴为对数尺度)

表 1.2.2　掷一枚硬币，正面出现的频率

实验者	掷硬币次数	正面出现次数	频率
蒲　来	4 040	2 048	0.5069
皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊	24 000	1 2012	0.5005

注：此表引自格涅坚科《概率论教程》，高等教育出版社，1957。

(2)在英语中某些字母出现的频率远高于另外一些字母。人们对各类典型的英语书刊中字母出现的频率进行了统计。发现各个字母的使用频率相当稳定。其使用频率见表 1.2.3。这项研究对计算机键盘设计（在方便的地方安排使用频率较高的字母健）、印刷铅字的铸造（使用频率高的字母应多铸一些）、信息的编码（使用频率高的字母用较短的码）、密码的破译等等方面都是十分有用的。

表 1.2.3　英语字母使用频率

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.130	*D*	0.044	*G*	0.014
T	0.090	*L*	0.036	*B*	0.013
O	0.081	*C*	0.029	*V*	0.010
A	0.078	*F*	0.028	*K*	0.004
N	0.073	*U*	0.028	*X*	0.003
I	0.068	*M*	0.026	*J*	0.001
R	0.067	*P*	0.022	*Q*	0.001
S	0.065	*Y*	0.015	*Z*	0.001
H	0.058	*W*	0.015		

注：引自 L. Birllouin, Science and Information Theory, New York, 1956。

(3)频率的稳定性在人口统计方面表现得较为明显。拉普拉斯(1794～1827)在他的名著《概率论的哲学探讨》中研究了男婴出生的频率。他对伦敦、彼得堡、柏林和全法国的大量人口资料进行研究，发现男婴出生频率几乎完全一致，并且这些男婴出生频率总在一个数左右波动，这个数大约是 22/43。另外一位统计学家克拉梅(1893～1985)在他的名著《统计学数学方法》(上海科技出版社，1966)中引用了瑞典 1935 年的官方统计资料(见表 1.2.4)，该资料表明，女婴出身的频率总是稳定在 0.482 左右。

1.2.5　主观方法

在现实世界里有一些随机现象是不能重复的或不能大量重复的，这时有

关事件的概率如何确定呢？

统计界有一个贝叶斯(1702～1761)学派，他们在研究了这些随机现象后认为：**一个事件的概率是人们根据经验对该事件发生可能性所给出的个人信念**。这样给出的概率称为**主观概率**。譬如：

表 1.2.4 瑞典 1935 年各月出生婴儿性别统计

月份	1	2	3	4	5	6	
总数	7 280	6 957	7 883	7 884	7 892	7 609	
女婴	3 537	3 407	3 866	3 711	3 775	3 665	
频率	0.486	0.489	0.490	0.471	0.478	0.482	
月份	7	8	9	10	11	12	全年
总数	7 585	7 393	7 203	6 903	6 552	7 132	88 273
女婴	3 621	3 596	3 491	3 391	3 160	3 371	42 591
频率	0.462	0.484	0.485	0.491	0.482	0.473	0.4825

一个企业家认为"一项新产品在未来市场上畅销"的概率是 0.8。这里的 0.8 是根据他自己多年经验和当时的一些市场信息综合而成的个人信念。

一位投资者认为"购买某种股票能获得高收益"的概率是 0.6，这里的 0.6 是投资者根据自己多年股票生意经验和当时股票行情综合而成的个人信念。

一位脑外科医生要对一位病人动手术，他认为成功的概率是 0.9，这是他根据手术的难易程度和自己的手术经验而对"手术成功"所给出的把握程度。

一位教师认为甲学生考取大学的概率是 0.95，而乙学生考取大学的概率是 0.5。这是教师根据自己多年的教学经验和甲、乙二位学生的学习情况而分别给出的个人信念。

这样的例子在我们生活、生产和经济活动中也是常遇见的。他们给出的主观概率决不是随意的，而是要求当事人对所考察的事件有较透彻的了解和丰富的经验，甚至是这一行的专家，并能对周围信息和历史信息进行仔细分析，在这个基础上确定的主观概率就能符合实际。所以应把主观概率与主观臆造、瞎说一通区别开来。在某种意义上说，不利用这些丰富的经验去确定概率也是一种浪费。

对主观概率的批评也是有的，50 年代苏联数学家格涅坚科在他的《概率论教程》中说："把概率看作是认识主体对事件的信念的数量测度，则概率论成

了类似心理学部门的东西，这种纯主观的概率主张贯彻下去的话，最后总不可避免要走到主观唯心论的路上去。"这种担心不能说不存在，但以经验为基础的主观概率与纯主观还是不同的，何况主观概率也要受到实践检验，也要符合概率的三条公理，通过实践检验和公理验证，人们会接受其精华，去其糟粕。

自主观概率提出以来，使用的人愈来愈多，特别在经济领域和决策分析中使用较为广泛，因为在那里遇到的随机现象大多是不能大量重复，无法用频率方法去确定事件概率，在这个意义上看，主观概率至少是频率方法和古典方法的一种补充，有了主观概率至少使人们在频率观点不适用时也能谈论概率，使用概率与统计方法。

主观概率的确定除根据自己的经验外，还可利用别人经验和历史资料在对比中形成主观概率，下面两个例子具体说明这种方法。

例 1.2.5 有一项带有风险的生意，欲估计成功（记为 A）的概率。为此决策者去拜访这方面的专家（如董事长、银行家等），向专家提这样的问题："如果这种生意做 100 次，你认为会成功几次？"专家回答："成功次数不会太多，大约 60 次。"这里 $P(A)=0.6$ 是专家的主观概率，可此专家还不是决策者。但决策者很熟悉这位专家，认为他的估计往往是偏保守的，过分谨慎的。决策者决定修改专家的估计，把 0.6 提高到 0.7。这样 $P(A)=0.7$ 就是决策者的主观概率。

这种用专家意见来确定主观概率的方法是常用的。当决策者对某事件了解甚少时，就可去征求专家意见。这里要注意二点：一是向专家提的问题要设计好，既要使专家易懂，又要使专家回答不是模棱两可；二是要对专家本人较为了解，以便作出修正，形成决策者自己的主观概率。

例 1.2.6 某公司经营儿童玩具多年，今设计了一种新式玩具将投入市场。现要估计此新式玩具在未来市场上的销售状况。经理查阅了本公司过去 37 种新式玩具的销售记录，得知销售状态是畅销（A_1）、一般（A_2）、滞销（A_3）分别有 29、6、2 种，于是算得过去新式玩具的三种销售状态的概率分别为

$$\frac{29}{37}=0.784,\quad \frac{6}{37}=0.162,\quad \frac{2}{37}=0.054$$

考虑到这次设计的新玩具不仅外形新颖，而且在开发儿童智力上有显著突破，经理认为此种新玩具会更畅销一些，滞销可能性更小，故对上述概率作了修改，提出自己的主观概率如下：

$$P(A_1)=0.85,\quad P(A_2)=0.14,\quad P(A_3)=0.01$$

这个例子表明，假如有历史数据，要尽量利用，帮助形成初步概念，然后作一些对比、修正，再形成个人信念，这对给出主观概率大有好处。

依据经验和历史资料等先验信息给出的主观概率没有什么固定的模式，但所确定的主观概率都必须满足概率的三条公理，发现与三条公理及其性质有不和谐之处，必须立即修正，直到和谐为止。这时给出的主观概率才能称得上概率（详见例 1.3.5）。

§1.3 概率的性质

利用概率的三条公理可以推出概率的所有性质，这里把一些常用性质推导出来，还有一些性质在以后章节中逐步导出。

定理 1.3.1 对任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

证：因为 A 与 $\overline{A}$ 互不相容，且 $A\cup\overline{A}=\Omega$，故由可加性公理和正则性公理可得

$$P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$$

移项后即得所要结果。

定理 1.3.2 不可能事件 ϕ 的概率为 0，即 $P(\phi)=0$。

证：因为不可能事件 ϕ 与必然事件 Ω 互为对立事件，故

$$P(\phi)=1-P(\Omega)=0$$

例 1.3.1 抛两枚硬币，至少出现一个正面（记为事件 A_2）的概率是多少？

解：抛两枚硬币共有四个等可能基本结果：

（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）

事件 A_2 含有其中前三个基本结果，故 $P(A_2)=3/4$，作为讨论我们来考察 A_2 的对立事件 $\overline{A}_2$，它的含义是

$\overline{A}_2$＝“抛两枚硬币，都出现反面”。

它只含一个基本结果（反，反），于是 $P(\overline{A}_2)=1/4$，再用定理 1.3.1，可得

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{4}=0.75$$

由此可见，两条不同思路获得相同结果，但相比之下，后一条思路更容易实现些，因为 $\overline{A}_2$ 所含的基本结果比 A_2 所含基本结果要少一些，从而计算也容易一些，这种思路在抛更多枚硬币时更易显露出其方便的特点，譬如在抛五枚硬币时，至少出现一个正面（记为 A_5）的概率为

$$P(A_5)=1-P(\overline{A}_5)=1-\frac{1}{2^5}=0.9688$$

因为对立事件 $\overline{A}_5$ 表示“五枚硬币都出现反面”，它在 $2^5=32$ 个等可能结果中仅含其中一个，故很易算得 $P(\overline{A}_5)=2^{-5}$。

定理 1.3.3 对 n 个互不相容事件 $A_1,\cdots,A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

证：在 $n=3$ 时，任意三个互不相容事件的并可改写为

$$A_1\cup A_2\cup A_3=(A_1\cup A_2)\cup A_3$$

并且并事件 $A_1\cup A_2$ 与 A_3 仍为互不相容的事件，于是由可加性公理得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=P(A_1\cup A_2)+P(A_3)\\&=P(A_2)+P(A_2)+P(A_3)\end{aligned}$$

一般地，通过上面那样进行合并及反复运用可加性公理就可推得上述一般结论。

例 1.3.2 一批产品共 100 件，其中有 5 件不合格品，现从中随机抽出 10 件，其中最多有 2 件不合格品的概率是多少？

解：设 A_i 表示事件“抽出 10 件中恰有 i 件不合格品”。于是所求事件 $A=$“最多有 2 件不合格品”可表示为

$$A=A_0\cup A_1\cup A_2$$

并且 A_0,A_1,A_2 为三个互不相容事件，由定理 1.3.3 知，若能获得 A_0,A_1,A_2 等事件的概率，很快能算得事件 A 的概率，用古典方法可算得诸 A_i 的概率为

$$P(A_i)=\frac{\binom{5}{i}\binom{95}{10-i}}{\binom{100}{10}},\qquad i=0,1,2$$

其中

$$\begin{aligned}P(A_0)&=\frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}}=\frac{95!}{10!\ 85!}\cdot\frac{10!\ 90!}{100!}\\&=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}=0.5837\end{aligned}$$

类似可算得

$$P(A_1)=0.3394,\qquad P(A_2)=0.0702$$

于是所求的概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)\\&=0.5837+0.3394+0.0702\end{aligned}$$

$$=0.9933$$

定理 1.3.4 对任意两个事件 A 与 B，若 $A\supset B$，则

(1)$P(A-B)=P(A)-P(B)$。

(2)$P(A)\geqslant P(B)$

证：由于 $A\supset B$，故可把 A 分为二个互不相容事件 B 与 $A-B$ 之并，即 $A=B\cup(A-B)$。由可加性公理得

$$P(A)=P(B)+P(A-B)$$

移项即得(1)。再因非负性公理，$P(A-B)\geqslant 0$，由(1)可得(2)。

定理 1.3.5 对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

证：对任一事件 A，总有如下包含关系

$$\phi\subset A\subset\Omega$$

由定理 1.3.4(2)即可得 $P(\phi)\leqslant P(A)\leqslant P(\Omega)$，再由 $P(\phi)=0$，$P(\Omega)=1$ 就可获得上述结论。

这个性质告诉我们，凡是概率出现 1.2，7/5，200%或-0.3 都说明有错误发生了，必须检查和纠正。

定理 1.3.6 对任意两个事件 A 与 B，有

(1)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(2)$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

证：由于并事件 $A\cup B$ 可改写为二个互不相容事件 A 与 $B-AB$ 的并，从可加性公理可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$

考虑到 $B\supset AB$，由定理 1.3.4(1)可得 $P(B-AB)=P(B)-P(AB)$，把此式代回原式即得(1)。再因 $P(AB)\geqslant 0$，由(1)立即推得(2)。

上述定理 1.3.6(1)称为概率的加法公式，当事件 A 与 B 为互不相容事件时，$P(AB)=0$，它就是可加性公理，当事件 A 与 B 相容时，$P(AB)>0$，这时加法公式中最后一项不可少，因为前二项之和 $P(A)+P(B)$ 中 $P(AB)$ 重复计算了一次，对任意三个事件也有类似的加法公式。

定理 1.3.7 对任意三个事件 A、B、C，有

$$(1)P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

(2)$P(A\cup B\cup C)\leqslant P(A)+P(B)+P(C)$

证：利用结合律 $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C$ 和定理 1.3.6(1)可得

$$P(A\cup B\cup C)$$

$$=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)C)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC\cup BC)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

这就证得(1)，由于 $BC\supset ABC$，故 $P(BC)-P(ABC)\geqslant 0$，故舍去(1)中最后四项将导致右端有可能被放大，这说明(2)亦成立。

例 1.3.3 掷两颗骰子，至少有一颗骰子的点数大于 3 的概率是多少？

解：设 A_i 为事件"第 i 颗骰子的点数大于 3"，$i=1,2$，那末事件"掷两颗骰子，至少有一颗骰子的点数大于 3"可表示为 $A_1\cup A_2$（见图 1.3.1）。

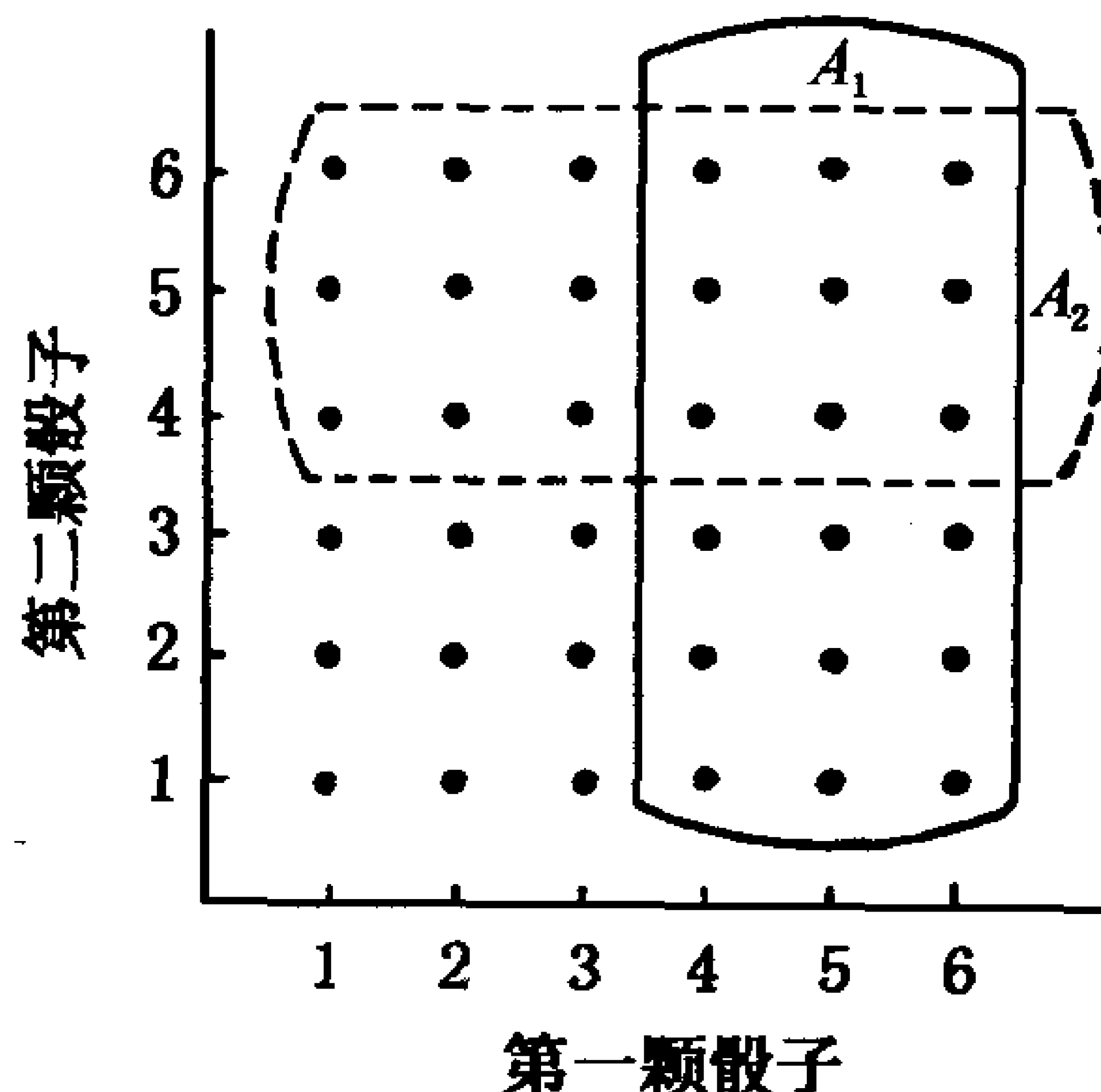


图 1.3.1 掷两颗骰子的基本空间

从图上可看出

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2},\qquad P(A_1A_2)=\frac{1}{4}$$

由定理 1.3.6 可知，所求概率为

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

作为讨论，我们来研究事件"掷三颗骰子，至少有一颗骰子的点数大于 3"的概率，该事件可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$。其中 A_3 表示事件"第三颗骰子的点数大于 3"。用古典方法容易算得

$$P(A_i)=\frac{1}{2},\qquad i=1,2,3$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{4},\quad i\neq j$$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{8}$$

于是由定理 1.3.7，可得

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)$$
$$-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

例 1.3.4 设 $P(A)=1/3$，$P(B)=1/2$。

(1)若事件 A 与 B 互不相容，求 $P(B\overline{A})$；

(2)若 $A\subset B$，求 $P(B\overline{A})$；

(3)若 $P(AB)=1/8$，求 $P(B\overline{A})$。

解：(1)若 A 与 B 互不相容，则有 $B\subset\overline{A}$，从而 $B\overline{A}=B$，因此

$$P(B\overline{A})=P(B)=1/2$$

(2)若 $A\subset B$，则有 $B-A=B\overline{A}$，则由定理 1.3.4 可得

$$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(3)在一般场合，由事件运算性质知

$$B\overline{A}=B-A=B-AB$$

由于 $B\supset AB$，故有

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

例 1.3.5 某人对事件 A、B 及其并 $A\cup B$ 分别给出主观概率如下：

$$P(A)=1/3,\quad P(B)=1/3,\quad P(A\cup B)=3/4$$

按概率性质，应有 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$。然而现在

$$P(A\cup B)=3/4,\quad P(A)+P(B)=2/3$$

这个性质不满足，这个不和谐之处是由于这组主观概率给定不恰当而引起的，必须修正。此人重新审定这三个事件的主观概率，发现并事件 $A\cup B$ 的主观概率应为 3/5。再检查就没有此种不和谐现象了。

§1.4 独 立 性

独立性是概率论的一个重要概念，我们先讨论两个事件之间的独立性，然后讨论多个事件之间的相互独立性，最后再讨论两个试验之间的独立性。

1.4.1 两个事件的独立性

两个事件之间的独立性是指一个事件的发生不影响另一个事件的发生，譬如在掷两颗骰子的试验中，我们考察如下两个事件：

A=“第一颗骰子出现 1 点”

B=“第二颗骰子出现偶数点”

经验事实告诉我们，第一颗骰子出现的点数不会影响第二颗骰子出现的点数，假如规定第二颗骰子出现偶数点可得奖，那末不管第一颗骰子出现什么点都不会影响你得奖的机会，这时就可以说：事件 A 与 B 独立。

从概率角度看，两个事件之间的独立性与这两个事件同时发生的概率有密切关系，譬如在上面掷两颗骰子的试验中，事件 A 与 B 的概率分别是 $P(A)=1/6$，$P(B)=1/2$，而这两个事件同时发生 AB 含有三个基本结果：(1,2)，(1,4)，(1,6)，故 $P(AB)=3/36=1/12$，于是有等式 $P(AB)=P(A)P(B)$。这不是偶然的，而是两独立事件的共同特征，即两独立事件同时发生的概率等于它们各自概率的乘积，这就引出两事件独立的一般定义。

定义 1.4.1 对任意两个事件 A 与 B，若有 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称**事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立**。否则称事件 A 与 B 不独立。

例 1.4.1 (1)从一幅扑克牌中任取一张，“出现黑桃”的事件 A 与“出现爱司”的事件 B 是独立的，因为它们的概率分别是 1/4 与 1/13，而它们同时出现(即“黑桃爱司出现”)的概率确是 1/52。

(2)考虑有三个小孩的家庭，并设所有八种情况：

bbb，bbg，bgb，gbb，bgg，gbg，ggb，ggg

是等可能的，其中 b 表示男孩，g 表示女孩。我们来考察如下二个事件：令 A 是“家中男女孩都有”的事件；令 B 是“家里至多一个女孩”的事件。它们的概率分别是

$$P(A)=6/8,\quad P(B)=4/8$$

而事件 AB 是指“家中恰有一个女孩”，其概率为

$$P(AB)=3/8=P(A)P(B)$$

于是，在家庭中有三个小孩的情况下，这两个事件是独立的。但是，当所考察的家庭有两个或有四个小孩时，事件 A 与 B 就不再独立了，如家中有两个小孩的情况，共有四种等可能结果：bb，bg，gb，gg。这时

$$P(A)=2/4,\quad P(B)=3/4,\quad P(AB)=2/4$$

由于没有等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 不独立，这说明了两事件是

否具有独立性并不总是显然的。

两事件独立是相互的，即若事件 A 与 B 独立，则 B 与 A 也独立。独立性还有如下性质。

定理 1.4.1 若事件 A 与 B 独立，则事件 A 与 $\overline{B}$ 独立；$\overline{A}$ 与 B 独立；$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立。

证：由事件的运算性质知

$$A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB$$

其中 $A\supset AB$，再由 A 与 B 的独立性知

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A)-P(AB)\\&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]\\&=P(A)P(\overline{B})\end{aligned}$$

这表明 A 与 $\overline{B}$ 独立，类似可证明 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立。

例 1.4.2 一台戏有两位主要演员甲与乙，考察如下两个事件

$$A=\text{“演员甲准时到达排练场”}$$
$$B=\text{“演员乙准时到达排练场”}$$

并设 A 与 B 独立（直观上看，这是一个很合理的假设，一位演员的行为举止不会被另一位演员的行为举止所影响），假如 $P(A)=0.95$，$P(B)=0.70$，那么

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(\text{两位演员都准时到场})\\&=P(A)P(B)=0.95\times0.70=0.665\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\ \overline{B})&=P(\text{两位演员都未准时到场})\\&=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.95)(1-0.70)=0.015\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(\text{两演员中仅有一位准时到场})\\&=P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)\\&=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)\\&=0.95\times0.3+0.05\times0.7=0.32\end{aligned}$$

在实际问题中，判定两事件独立可从定义 1.4.1 出发，但更多的是根据经验事实去判定。譬如，甲乙两门高炮同时打飞机，“甲高炮命中”与“乙高炮命中”是两个相互独立事件，因为经验事实告诉我们，甲高炮是否命中与乙高炮是否命中是互不影响的。

顺便指出，“两事件独立”与“两事件不相容”是两个不同的概念，前者用概率等式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 判断，后者用事件等式 $AB=\phi$ 判断。这两个概念并无什么联系，两个独立事件可以相容，也可以不相容。可是实际中遇到的两

个独立事件常常是相容，如上述两门高炮打飞机，“甲高炮命中”与“乙高炮命中”是独立事件，但又是相容事件。因为它们可以同时发生。

1.4.2 多个事件的独立性

首先研究三个事件的相互独立性。设 A、B、C 是三个事件，我们说它们相互独立，首先要求它们两两独立，即

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$

但这还不够，因为从这三个概率等式推不出 AB 与 C 独立、$A\cup B$ 与 C 独立。假如再添加一个概率等式

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

就能保证 AB 与 C 独立、$A\cup B$ 与 C 独立。而且还能保证用 A 和 B 运算所表示的事件均与 C 独立。所以刻画 A、B、C 三个事件相互独立要用上述四个概率等式。由此可以看出，对于三个以上事件的相互独立需要用更多个概率等式去定义。

定义 1.4.2 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，假如对所有可能的 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$，以下等式均成立

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$
$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$
$$\vdots$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

则称此 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立**。

从上述定义可以看出 n 个相互独立事件中任一部分（一个或几个）与另一部分（一个或几个）都是独立的。并且还可证明：将相互独立事件中任一部分换为对立事件，所得的诸事件仍为相互独立事件。

在实际问题中，要判定诸事件的相互独立时很少从定义 1.4.2 出发，通常只要根据经验事实来判定即可。譬如多台机床生产零件，彼此各不相干，则各自是否生产出废品（或生产出多少废品）这类事件是相互独立的。独立性概念在概率论及其应用中都起重要作用，本书中大部分结果都是在独立性假设下得到的。利用独立性概念和事件的运算可以计算一些较复杂事件的概率。

例 1.4.3 某航空公司上午 10 时左右从北京飞往上海、广州、沈阳各有一个航班，记 A、B、C 为如下三个事件：

$$A=\text{“飞往上海的航班满座”}$$
$$B=\text{“飞往广州的航班满座”}$$
$$C=\text{“飞往沈阳的航班满座”}$$

假设这三个事件相互独立，且 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$，$P(C)=0.6$，现求如下几个事件的概率。

(1)三个航班都满座的概率

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$
$$=0.9\times0.8\times0.6=0.432$$

(2)至少有一个航班是满座的概率

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})$$
$$=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$
$$=1-(1-0.9)(1-0.8)(1-0.6)$$
$$=1-0.008=0.992$$

(3)仅有一个航班是满座的概率

$$P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)$$
$$=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$
$$=0.9\times0.2\times0.4+0.1\times0.8\times0.4+0.1\times0.2\times0.6$$
$$=0.072+0.032+0.012=0.116$$

例 1.4.4 一架飞机有二个发动机，向该机射击时，仅当击中驾驶舱或同时击中二个发动机时，飞机才被击落。若记“击中驾驶舱”的事件为 A，击中第一和第二个发动机的事件分别记为 B_1 和 B_2，则“飞机被击落”这个事件 E 可表示为

$$E=A\cup B_1B_2$$

设 A、B_1、B_2 三事件相互独立，且它们的概率依次记为 p_0、p_1、p_2，利用概率的加法公式，可得

$$P(E)=P(A)+P(B_1B_2)-P(AB_1B_2)$$

再利用独立性，立即可得

$$P(E)=p_0+p_1p_2-p_0p_1p_2$$

例 1.4.5 用晶体管装配某仪表要用 128 个元器件，改用集成电路元件后，只要用 12 个就够了，如果每个元器件能用 2000 小时以上的概率是 0.996，假如只有当每一个元器件都完好时，仪表才能正常工作，试分别求出上面两种场合下仪表能正常工作 2000 小时的概率。

解：设事件 A 为“仪表正常工作 2000 小时”，事件 A_i 为“第 i 个元器件能

工作到 2000 小时”。

(1)使用晶体管装配仪表时，应有 $A=A_1A_2\cdots A_{128}$，考虑到诸元器件工作状态的独立性，可有

$$P(A)=P(A_1)\cdots P(A_{128})=(0.996)^{128}=0.599$$

(2)使用集成电路装配仪表时，应有 $A=A_1A_2\cdots A_{12}$，考虑到独立性，可有

$$P(A)=P(A_1)\cdots P(A_{12})=(0.996)^{12}=0.953$$

比较上面两个结果可以看出，改进设计，减少元器件数能提高仪表正常工作的概率。

例 1.4.6 某彩票每周开奖一次，每次提供百万分之一的赢的机会，若你每周买一张彩票，尽管你坚持十年(每年 52 周)之久，你从未赢过的机会是多少?

解：按假设，每次赢的机会是 10^{-6}，于是每次输的机会是 $1-10^{-6}$，另外，十年中你共购买彩票 520 次，每次开奖都是相互独立的，故十年中你从未赢过(每次都输)的机会是

$$P=(1-10^{-6})^{520}=0.99948$$

这个很大的概率表明十年中你没得一次奖是很正常的事。

1.4.3 试验的独立性

利用事件的独立性可以定义两个或更多个试验的独立性。设有两个试验 E_1 和 E_2，假如试验 E_1 的任一个结果(事件)与试验 E_2 的任一个结果(事件)都是相互独立事件，则称**这两个试验相互独立**。譬如掷一枚硬币(试验 E_1)和掷一颗骰子(试验 E_2)是相互独立的，因为硬币出现正面与反面与骰子出现 1 至 6 点中任一点都是相互独立的事件，类似可以定义 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的相互独立性，假如 E_1 的任一结果、E_2 的任一结果、…、E_n 的任一结果都是相互独立的事件，则称**试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 相互独立**，假如这 n 个试验还是相同的，则称其为 **n 重独立重复试验**。譬如掷 n 枚硬币、掷 n 颗骰子、检查 n 个产品等都是 n 重独立重复试验。

1.4.4 n 重贝努里试验

n 重贝努里试验是一类常见的随机模型，下面我们从贝努里试验开始分几点叙述这个模型。

(1)**贝努里试验** 只有两个结果(成功与失败，或记为 A 与 $\overline{A}$)的试验称贝努里试验。譬如，抛一枚硬币(正面与反面)、检查一个产品(合格与不合格)、

一次射击打靶（命中与不命中）、诞生一个婴儿（男与女）、检查一个男人的眼睛（色盲与不色盲）等都可看作一次贝努里试验，再也没有比贝努里试验更简单的随机试验了，最简单的常常是用得最频繁的。

(2)在一次贝努里试验中，设成功的概率为 p，即

$$P(A)=p,\quad P(\overline{A})=1-p$$

其中 $0<p<1$。不同的 p 可用来描述不同的贝努里试验，譬如在检查一个产品中，有

$$P(\text{合格品})=0.9,\qquad P(\text{不合格品})=0.1$$

假如我们的兴趣在研究不合格品上，那可假设 $p=0.1$，而把不合格品的出现看作"成功"，当然，也可假设 $p=0.9$，这时我们的注意力将转到合格品的出现上，把合格品的出现看作"成功"，这两种设定都是可以的，但一定要明确，"成功"的含义是什么？

(3)**n 重贝努里试验** 由 n 个（次）相同的、独立的贝努里试验组成的随机试验称为 n 重贝努里试验。譬如，抛 3 枚硬币（或一硬币抛 3 次）、检查 7 个产品、打 10 次靶、诞生 100 个婴儿等都是多重贝努里试验。

n 重贝努里试验的基本结果可用长为 n 的 A 与 $\overline{A}$ 的序列表示，譬如在 5 重贝努里试验中的几个基本结果：

$AA\overline{A}\overline{A}\overline{A}$ 表示前二次成功，后三次失败。

$A\overline{A}\overline{A}\overline{A}A$ 表示第一和第五次成功，其余三次失败。

$\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}$ 表示五次都失败。

根据独立性可以算得上述几个基本结果发生的概率：

$$P(AA\overline{A}\overline{A}\overline{A})=P(A\overline{A}\overline{A}\overline{A}A)=p^2(1-p)^3$$

$$P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A})=(1-p)^5$$

在 n 重贝努里试验中，人们最关心的是成功次数（或 A 的个数）。因为成功次数是基本结果中所含的最重要信息，而 A 与 $\overline{A}$ 的排列次序在实际中往往是不感兴趣的信息。若记

$$B_{n,k}=\text{“}n\text{ 重贝努里试验中 }A\text{ 出现 }k\text{ 次”}$$

譬如，$B_{n,0}$表示事件"n 重贝努里试验中 A 出现 0 次"，言下之意，$\overline{A}$ 出现 n 次，即 $B_{n,0}=\{\overline{A}\overline{A}\cdots\overline{A}\}$，它的概率为

$$P(B_{n,0})=(1-p)^n$$

又如，$B_{n,1}$表示事件"n 重贝努里试验中 A 出现 1 次"，即

$$B_{n,1}=\text{“}A\overline{A}\cdots\overline{A},\overline{A}A\overline{A}\cdots\overline{A},\cdots,\overline{A}\overline{A}\cdots\overline{A}A\text{”}$$

其中共有 n 个基本结果，每个基本结果的概率为 $p(1-p)^{n-1}$，故

$$P(B_{n,1})=np(1-p)^{n-1}$$

一般地，事件 $B_{n,k}$ 中的基本结果是由 k 个 A 和 $n-k$ 个 $\overline{A}$ 组成的序列，由于它们位置上的差别，此种基本结果共有 $\binom{n}{k}$ 个，每个发生的概率皆为 $p^k(1-p)^{n-k}$，所以

$$P(B_{n,k})=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \tag{1.4.2}$$

其中 k 可取 $0,1,\cdots,n$，这就是"n 重贝努里试验中成功 k 次"的概率的一般计算公式，在实际中很常用。

例 1.4.7 一位射手打靶，命中率为 0.9，6 次打靶就是 6 重贝努里试验，记 B_k="6 次打靶中命中 k 次"，显然，k 可以为 0,1,2,3,4,5,6 等 7 个值，由 (1.4.2) 式可算得

$$P(B_{6,0})=P(6\text{ 次打靶，都没命中})=0.1^6=0.0000$$

$$P(B_{6,1})=P(6\text{ 次打靶，仅命中 1 次})=6\times 0.9\times 0.1^5=0.0001$$

$$P(B_{6,2})=P(6\text{ 次打靶，命中 2 次})=\binom{6}{2}\times 0.9^2\times 0.1^4=0.0012$$

$$P(B_{6,3})=\binom{6}{3}0.9^3\times 0.1^3=0.0146$$

$$P(B_{6,4})=\binom{6}{4}\times 0.9^4\times 0.1^2=0.0984$$

$$P(B_{6,5})=\binom{6}{5}\times 0.9^5\times 0.1=0.3543$$

$$P(B_{6,6})=\binom{6}{6}\times 0.9^6=0.5314$$

由上述 7 个概率可计算很多事件的概率，譬如

$$\begin{aligned}P(6\text{ 次打靶，至少命中 4 次})&=P(B_{6,4})+P(B_{6,5})+P(B_{6,6})\\&=0.0984+0.3543+0.5314=0.9841\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(6\text{ 次打靶，最多命中 2 次})&=P(B_{6,0})+P(B_{6,1})+P(B_{6,2})\\&=0.0000+0.0001+0.0012=0.0013\end{aligned}$$

可见该射手在 6 次打靶中命中 4 次以上的把握很大。假如换一位射手，他命中概率为 0.6，在 6 次打靶中他至少命中 4 次的把握就没有这么高，而为

$$\begin{aligned}&P(B_{6,4}\cup B_{6,5}\cup B_{6,6})\\&=\binom{6}{4}\times 0.6^4\times 0.4^2+\binom{6}{5}\times 0.6^5\times 0.4+\binom{6}{6}\times 0.6^6\\&=0.3110+0.1866+0.0467=0.5443\end{aligned}$$

§1.5 条件概率

条件概率是概率论中的一个基本概念，也是概率论中的一个重要工具，它既可以帮助我们认识更复杂的随机事件，也可帮助我们计算一些复杂事件的概率。

1.5.1 条件概率

条件概率要涉及两个事件 A 与 B，在事件 B 已发生的条件下，事件 A 再发生的概率称为条件概率，记为 $P(A|B)$，它与前面讲的事件 A 的(无条件)概率 $P(A)$是两个不同的概念，为了说清楚条件概率概念，我们先来考察一个例子。

例 1.5.1 某温泉开发商通过网状管道向 25 个温泉浴场供应矿泉水，每个浴场要安装一个阀门，这 25 个阀门购自两家生产厂，其中部分还是有缺陷的，具体见如下二维联列表：

	$\overline{B}$:无缺陷	B:有缺陷	
A:生产厂 1	10	5	15
$\overline{A}$:生产厂 2	8	2	10
	18	7	25

为作试验，随机地从 25 个阀门选出一个，考察如下两个事件：

A=“选出的阀门来自生产厂 1”

B=“选出的阀门是有缺陷的”

利用二维联列表提供的信息，容易算得事件 A、B 及 AB 的概率：

$$P(A)=\frac{15}{25},\quad P(B)=\frac{7}{25},\quad P(AB)=\frac{5}{25}$$

其中 AB 表示事件“选出的阀门是来自生产厂 1，并有缺陷”。

现我们转而考察如下问题：当已知事件 B 发生的条件下，事件 A 再发生的概率是多少？事件 B 的发生给人们带来新的信息：B 的对立事件 $\overline{B}$=“选出的阀门是无缺陷的”是不能发生了，因此 $\overline{B}$ 中的 18 个基本结果立即从考察中剔去，所有可能发生的基本结果仅限于 B 中的 7 个基本结果(见图 1.5.1)，这意味着，事件 B 的发生改变了基本空间，从原基本空间 Ω(含有 25 个基本结

果）缩减为新的基本空间 $\Omega_B=B$（含有 7 个基本结果），这时事件 A 所含的基本结果在 Ω_B 中所占的比率为 5/7，这就是在事件 B 已发生下，事件 A 的条件概率，即 $P(A|B)=5/7$。

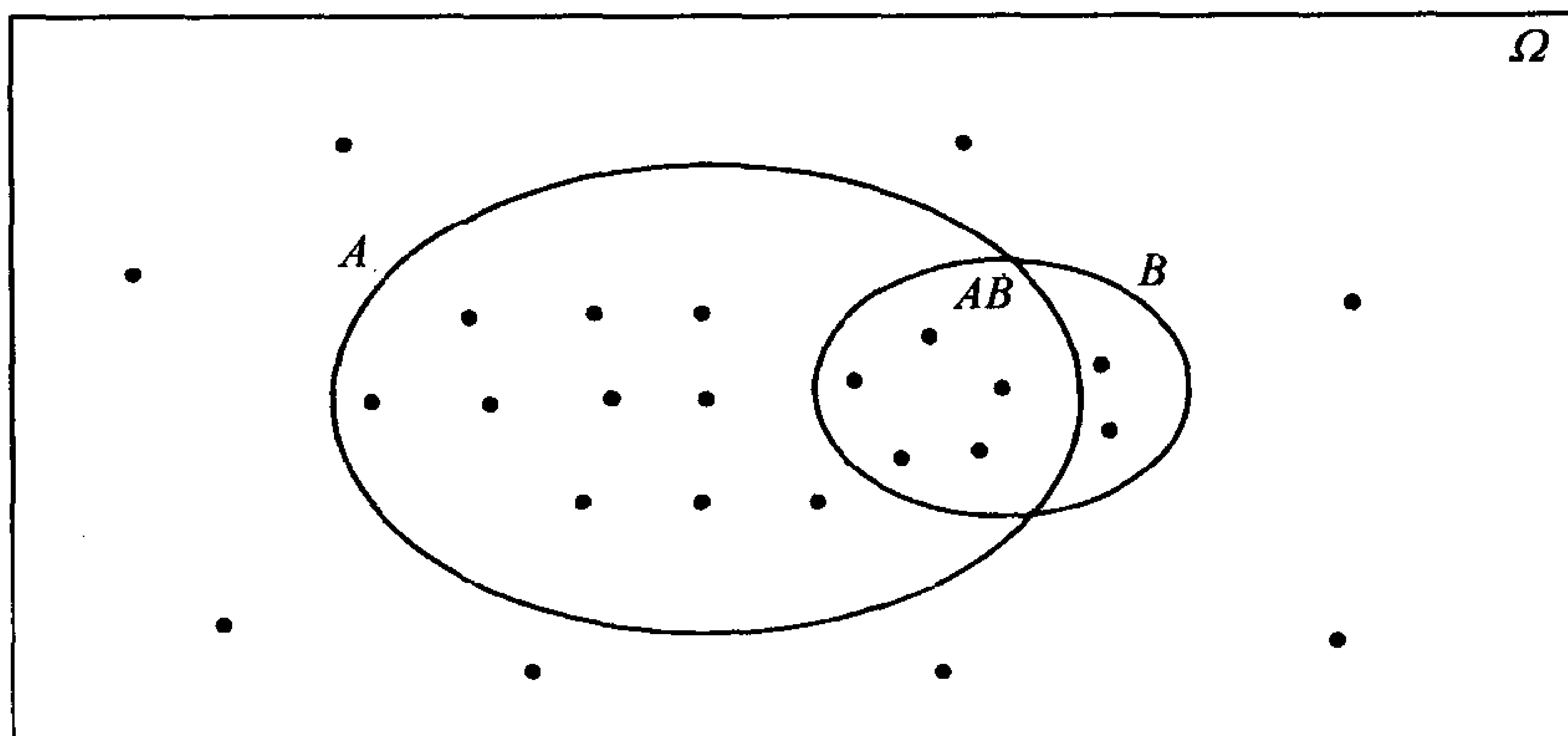


图 1.5.1　例 1.5.1 的维恩图（每个点表示一个阀门）

我们继续考察这个例子，条件概率 $P(A|B)=5/7$ 中的分母是事件 B 中的基本结果数，记为 $N(B)=7$。分子是交事件 AB 中的基本结果数，记为 $N(AB)=5$，若分子与分母都同时除以原基本空间 Ω 中的基本结果数 $N(\Omega)$，则有如下关系式

$$P(A|B)=\frac{N(AB)}{N(B)}=\frac{N(AB)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)}=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1.5.1)$$

这表明：条件概率可用两个特定的无条件概率之商表示。式(1.5.1)不仅在等可能场合成立，在一般场合也是合理的，以致于把(1.5.1)式公认为条件概率的定义，但要保证(1.5.1)式中的分母不为零，这样我们就得到条件概率的一般定义。

定义 1.5.1　设 A 与 B 是基本空间 Ω 中的两个事件，且 $P(B)>0$，**在事件 B 已发生的条件下，事件 A 的条件概率 $P(A|B)$** 定义为 $P(AB)/P(B)$，即

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

其中 $P(A|B)$ 也称为**给定事件 B 下事件 A 的条件概率。**

例 1.5.2　某市的一项调查表明：该市有 30%的学生视力有缺陷。7%的学生听力有缺陷，3%的学生视力与听力都有缺陷，记

E＝"学生视力有缺陷"，　$P(E)=0.30$

H="学生听力有缺陷"， $P(H)=0.07$

EH="学生视力与听力都有缺陷"， $P(EH)=0.03$

现来研究下面三个问题：

(1)事件 E 与 H 是否独立？由于

$$P(E)P(H)=0.30\times 0.07=0.021\neq P(EH)$$

所以事件 E 与 H 不独立，即该市学生中视力缺陷与听力缺陷有关联。

(2)如果已知一学生视力有缺陷，那么他听力也有缺陷的概率是多少？这要求计算条件概率 $P(H|E)$，由定义 1.5.1 知

$$P(H|E)=\frac{P(EH)}{P(E)}=\frac{0.03}{0.30}=\frac{1}{10}$$

(3)如果已知一学生听力有缺陷，那么他视力也有缺陷的概率是多少？类似地可算得

$$P(E|H)=\frac{P(EH)}{P(H)}=\frac{0.03}{0.07}=\frac{3}{7}$$

例 1.5.3 表 1.5.1 给出乌龟的寿命表。寻求下面一些事件的条件概率。

表 1.5.1 乌龟的寿命表

年龄(岁)	存活概率	年龄(岁)	存活概率
0	1.00	140	0.70
20	0.92	160	0.61
40	0.90	180	0.51
60	0.89	200	0.39
80	0.87	220	0.08
100	0.83	240	0.004
120	0.78	260	0.0003

(1)活到 60 岁的乌龟再活 40 年的概率是多少？

记 A_x 表示"乌龟活到 x 岁"这样的事件，要求的概率是条件概率 $P(A_{100}|A_{60})$，按条件概率定义，

$$P(A_{100}|A_{60})=\frac{P(A_{60}A_{100})}{P(A_{60})}$$

由于活到 100 岁的乌龟一定活到 60 岁，所以 $A_{100}\subset A_{60}$，于是 $A_{60}A_{100}=A_{100}$，从而

$$P(A_{100}|A_{60})=\frac{P(A_{100})}{P(A_{60})}=\frac{0.83}{0.89}=0.93$$

即 100 只活到 60 岁的乌龟大约有 93 只能活到 100 岁。

(2)120 岁的乌龟能活到 200 岁的概率是多少？

用前面的记号可得，

$$P(A_{200}|A_{120})=\frac{P(A_{120}A_{200})}{P(A_{120})}=\frac{P(A_{200})}{P(A_{120})}=\frac{0.39}{0.78}=0.50$$

即活到 120 岁的乌龟中大约有一半能活到 200 岁。

(3)20 岁的乌龟能活到 90 岁的概率是多少？

类似可得

$$P(A_{90}|A_{20})=\frac{P(A_{90})}{P(A_{20})}=\frac{0.85}{0.92}=0.92$$

其中 $P(A_{90})=0.85$ 是运用线性内插法获得的。

(4)20 岁的乌龟活到 x 岁的概率是 1/2，试问 x 是多少？

$$P(A_x|A_{20})=\frac{P(A_x)}{P(A_{20})}=\frac{1}{2}$$

$$P(A_x)=\frac{1}{2}\times P(A_{20})=0.46$$

从表 1.5.1 可以看到答数应在 180 岁到 200 岁之间。利用线性内插法可算得 $x=188$ 岁。即 20 岁的乌龟中大约有一半能活到 188 岁。

1.5.2 条件概率的性质

首先指出，条件概率是概率，即由定义 1.5.1 给出的条件概率满足概率的三条公理：

(1)非负性：$P(A|B)\geqslant 0$

(2)正则性：$P(\Omega|B)=1$

(3)可加性：假如事件 A_1 与 A_2 互不相容，且 $P(B)>0$，则

$$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

其中非负性与正则性是显然的，下面我们来证明可加性，由条件概率定义知

$$P(A_1\cup A_2|B)=\frac{P((A_1\cup A_2)B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B\cup A_2B)}{P(B)}$$

由于 A_1 与 A_2 互不相容，故 A_1B 与 A_2B 也互不相容，由概率的可加性公理可推出条件概率的可加性，即

$$P(A_1\cup A_2|B)=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

由此可知，条件概率也具有三条公理导出的一切性质。如

$P(\phi|B)=0$

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$$

$$P(A_1 \cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$$

特别，当 $B=\Omega$ 时，条件概率转化为无条件概率，因此把无条件概率看作特殊场合下的条件概率也未尝不可。

除此以外，条件概率还有一些特殊性质，这些性质将可帮助我们计算一些复杂事件的概率。

定理 1.5.1（乘法公式） 对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$$

其中第一个等式成立要求 $P(B)>0$，第二个等式成立要求 $P(A)>0$。

利用条件概率定义立即可得上式，它表明任意两个事件的交的概率等于一事件的概率乘以在这事件已发生条件下另一事件的条件概率，只要它们的概率都不为零即可。

定理 1.5.2 假如事件 A 与 B 独立，且 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=P(A)$，反之亦然。

利用两事件的独立性定义立即可得上式。这个性质表明，若两事件独立，则其条件概率就等于其概率，这里事件 B 的发生对事件 A 是否发生没有任何影响，反之，若有 $P(A|B)=P(A)$，则由乘法公式立即可得出 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A 与 B 独立，故亦可用 $P(A|B)=P(A)$ 来定义事件 A 与 B 的独立性，我们之所以采用 $P(AB)=P(A)P(B)$ 来定义事件 A 与 B 独立，是因为这样的定义可以解除 $P(B)>0$ 的约束。

定理 1.5.3（一般乘法公式） 对任意三个事件 A_1、A_2 和 A_3，有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$

其中 $P(A_1A_2)>0$。

证：由于 $P(A_1A_2)>0$，由乘法公式可得

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2)P(A_3|A_1A_2)$$

由于 $A_1 \supset A_1A_2$，故由定理 1.3.4 知 $P(A_1) \geqslant P(A_1A_2)>0$，再一次对 $P(A_1A_2)$ 使用乘法公式即得此定理。

定理 1.5.3 可以推广到四个或更多个事件的交上去。

例 1.5.4 在例 1.5.2 的调查数据下我们曾研究过三个问题，现在我们继续研究另外几个问题。

(4)随意找一个学生，他视力没缺陷但听力有缺陷的概率是多少？这要求计算交事件 $\overline{E}H$ 的概率，由乘法公式知

$$P(\overline{E}H)=P(\overline{E}|H)P(H)$$

$$=[1-P(E|H)]P(H)$$

$$=[1-\frac{3}{7}]\times 0.07=0.04$$

(5)随意找一个学生，他视力有缺陷但听力没有缺陷的概率是多少？类似地可算得

$$P(E\overline{H})=P(\overline{H}|E)P(E)$$

$$=(1-0.1)\times 0.3=0.27$$

(6)随意找一个学生，他的视力和听力都无缺陷的概率是多少？这要求计算交事件 $\overline{E}\overline{F}$ 的概率，利用对偶原理(见习题 1.1.10)知 $\overline{E}\overline{H}=\overline{E\cup F}$，故有

$$P(\overline{E}\overline{H})=P(\overline{E\cup H})=1-P(E\cup H)$$

$$=1-[P(E)+P(H)-P(EH)]$$

$$=1-(0.30+0.07-0.03)=0.66$$

把上述计算结果整理成如下二维列联表，它可检查计算是否有误。

	H	$\overline{H}$	
E	0.03	0.27	0.30
$\overline{E}$	0.04	0.66	0.70
	0.07	0.93	1.00

例 1.5.5 罐子模型。设罐中有 b 个黑球和 r 个红球，每次随机取出一个球，把原球放回，还加进(与取出的球)同色球 c 个和异色球 d 个，这里 c 与 d 都是已知整数。若 B_i 表示"第 i 次取出是黑球"这样一个事件，R_j 表示"第 j 次取出是红球"这样一个事件，我们来研究下列事件的概率：

$$P(B_1R_2R_3)=P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2)$$

$$=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}$$

$$P(R_1B_2R_3)=P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2)$$

$$=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+c+d}{b+r+2c+2d}$$

$$P(R_1R_2B_3)=P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2)$$

$$=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}$$

这三个概率是不同的，这表明黑球出现的次序在影响着概率。

下面我们来研究几种特殊情况。

(1)$c>0,d=0$。这意味着：每次取出球后会增加下一次也取到同色球的概率，这是一个传染病模型。每次发现一个传染病患者，以后都会增加再传染的概率。在这种情况下，上述三个概率分别为

$$P(B_1R_2R_3)=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+c}\cdot\frac{r+c}{b+r+2c}$$

$$P(R_1B_2R_3)=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r+c}\cdot\frac{r+c}{b+r+2c}$$

$$P(R_1R_2B_3)=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r+2c}$$

这三个概率相同，这表明，在 $d=0$ 场合，上述概率只与黑球红球出现的次数有关，而与出现的顺序无关。这一现象在取更多个球时也是这样。

(2)$c=0,d>0$。这是一个安全模型。每当发生了事故(如红球被取出)，安全工作就抓紧一些，下次再发生事故的概率就会减少；而当没有事故发生时，安全工作就会放松一些，于是发生事故的概率就增大。在这种场合下，上述三个概率分别为

$$P(B_1R_2R_3)=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r+d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d}$$

$$P(R_1B_2R_3)=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d}$$

$$P(R_1R_2B_3)=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2d}$$

这三个概率不相同。这表明：在 $c=0$ 场合，上述概率不仅与黑球与红球出现的次数有关，还与出现的顺序有关。

(3)$c=0,d=0$，这是放回抽样，前次抽取结果不会影响后次抽取结果，故上述三个概率相等，并都等于 $br^2/(b+r)^3$。

(4)$c=-1,d=0$。这是无放回抽样，每次抽出的球不再放回罐中，这时前次抽取结果会影响后次抽取结果，但只要抽取的黑球与红球的个数相同，其概率是不依赖其抽出球的顺序，它们的概率相同，并且都为 $br(r-1)/(b+r)(b+r-1)(b+r-2)$。

1.5.3 全概率公式

全概率公式是概率论中的一个基本公式。它使一个复杂事件的概率计算问题化繁就简，得以解决。下面来叙述获得全概率公式的简单形式和一般形式。

定理 1.5.4 设 A 与 B 是任意二个事件，假如 $0<P(B)<1$，则

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

证：由 $B\cup\overline{B}=\Omega$ 和事件运算性质知

$$A=A\Omega=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$$

显然 AB 与 $A\overline{B}$ 是互不相容事件，由加法公式和乘法公式知

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AB)+P(A\overline{B})\\&=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})\end{aligned}$$

由于 $P(B)$ 不为 0 与 1，所以 $P(\overline{B})>0$，从而上述两个条件概率 $P(A|B)$ 与 $P(A|\overline{B})$ 都是有意义的。

例 1.5.6 设在 n 张彩票中有一张奖券。求第二人摸到奖券的概率是多少？

解：设 A_i 表示"第 i 人摸到奖券"这样一个事件。如今要求 $P(A_2)$，直接计算 $P(A_2)$ 相当困难，但大家知道，A_2 的发生与 A_1 是否发生关系很大，若 A_1 已发生，则 A_2 再发生的条件概率 $P(A_2|A_1)=0$。若 A_1 不发生(即 $\overline{A}_1$ 发生)，则 A_2 再发生的条件概率 $P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{n-1}$。而 A_1 与 $\overline{A}_1$ 是基本空间中两个概率大于 0 的事件，且 $P(A_1)=\frac{1}{n}$，$P(\overline{A}_1)=\frac{n-1}{n}$。于是由全概率公式知：

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)\\&=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

用类似方法亦可算得第三人、第四人、…，摸到奖券的概率仍为 $\frac{1}{n}$。这说明，摸彩不论先后，中奖的机会是均等的。类似的，在体育比赛中抽签不论先后，机会也是均等的。

例 1.5.7(敏感性问题的调查) 学生阅读黄色书刊和看黄色影像会严重影响学生身心健康发展，但这些都是避着教师与家长进行的，属个人隐私行为，要调查观看黄色书刊或影像的学生在全体学生中所占比率 p 是一件难事，这里的关键是要设计一个调查方案，使被调查者愿意作出真实回答又能保守个人秘密，经过多年研究与实践，一些心理学家和统计学家设计了一种调查方案，这个方案的核心是如下两个问题：

问题 A：你的生日是否在 7 月 1 日之前？

问题 B：你是否看过黄色书刊或影像？

被调查者只需回答其中一个问题，至于回答哪一个问题由被调查者事先从一个罐中随机抽一只球，看过颜色后再放回，若抽出白球则回答问题 A；若抽出红球则回答问题 B，罐中只有白球与红球，且红球的比率 π 是已知的，即

$$P(\text{红球})=\pi, \qquad P(\text{白球})=1-\pi。$$

被调查者无论回答问题 A 或问题 B，只需在下面答卷上认可的方框内打勾，然后把答卷放入一只密封的投票箱内。

答 卷

是□　　否□

上述抽球与答卷都在一间无人的房间内进行，任何外人都不知道被调查者抽到什么颜色的球和在什么地方打勾，如果向被调查者讲清这个方案的做法，并严格执行，那末就容易使被调查者确信他(她)参加这次调查不会泄露个人秘密，从而愿意参加调查。

当有较多的人(譬如 1000 人以上)参加调查后，就可打开投票箱进行统计。设有 n 张答卷，其中 k 张答"是"，于是回答"是"的比率是 φ，可用频率 $\hat{\varphi}=k/n$ 去估计，记为

$$P(\text{是})=k/n$$

这里答"是"有两种情况：一种是摸到白球后对问题 A 答"是"，这是一个条件概率，它是"生日在 7 月 1 日前"的概率，一般认为是 0.5，即

$$P(\text{是}\mid\text{白球})=0.5$$

另一种是摸到红球后对问题 B 答"是"，这也是一个条件概率，它不是别的，就是看黄色书刊或影像的学生在全体学生中的比率 p，即

$$P(\text{是}\mid\text{红球})=p$$

最后利用全概率公式把上述各项概率(或其估计值)联系起来

$$P(\text{是})=P(\text{是}\mid\text{白球})P(\text{白球})+P(\text{是}\mid\text{红球})P(\text{红球})$$

$$\hat{\varphi}=0.5(1-\pi)+p\cdot\pi$$

由此可获得感兴趣的比率 p

$$p=[\hat{\varphi}-0.5(1-\pi)]/\pi$$

假如在这项调查中罐中有 50 个球，其中红球 30 个，即 $\pi=0.6$，另外学校在五天内安排 31 个班的学生共 1583 名参加调查，最后开箱统计，全部有效，其中回答"是"的有 389 张，据此可算得

$$p=\left[\frac{389}{1583}-\frac{1}{2}\times 0.4\right]/0.6=0.0762$$

这表明全校约有 7.62%的学生看过黄色书刊或黄色影像。

像这类敏感性问题的调查是社会调查中的一类，如一群人中参加赌博的比率、吸毒人的比率、个体经营者的偷税漏税户的比率、学生中考试的作弊率等都可参照此方法组织调查，获得感兴趣的比率。

现在我们转入讨论全概率公式的一般形式，为此需要一个"分割"的概念。

定义 1.5.2 把基本空间 Ω 分为 n 个事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$（见图 1.5.2），假如

(1) $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$

(2) $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 互不相容

(3) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\Omega$

则称**事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为基本空间 Ω 的一个分割**。

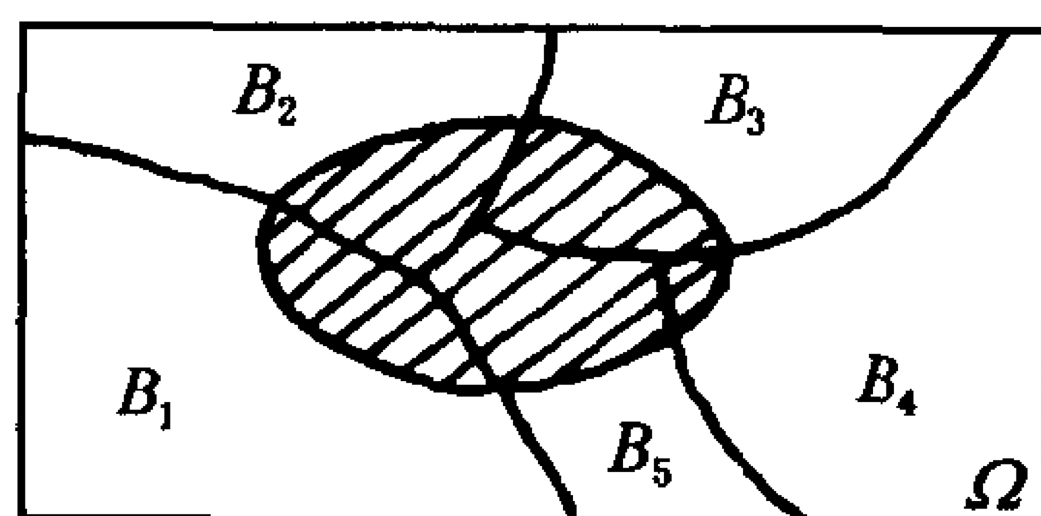


图 1.5.2 Ω 的一个分割

其中阴影部分为事件 A。

假如事件 B 的概率 $P(B)$ 满足 $0<P(B)<1$，则 B 与 $\overline{B}$ 就是相应基本空间 Ω 的一个最简单的分割。

定理 1.5.5 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是基本空间 Ω 的一个分割，则对 Ω 中任一事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

证：由事件运算知（见图 1.5.2）

$$A=A\Omega=A(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)=\bigcup_{i=1}^{n} AB_i$$

由 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 互不相容可导出 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ 亦互不相容，再由可加性和乘法公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

这个性质的运用关键在于寻找一个合适的分割，使诸概率 $P(B_i)$ 和诸条件概率 $P(A \mid B_i)$ 容易求得。

例 1.5.8 一批产品来自三个工厂，要求这批产品的合格率。为此对这三

个工厂的产品进行调查，发现甲厂产品合格率为 95%，乙厂产品合格率为 80%，丙厂产品合格率为 65%。这批产品中有 60%来自甲厂，30%来自乙厂，余下 10%来自丙厂。

若记事件 A=“产品合格”，B_1=“产品来自甲厂”，B_2=“产品来自乙厂”，B_3=“产品来自丙厂”。由上述调查可知

$$P(A|B_1)=0.95,\quad P(A|B_2)=0.80,\quad P(A|B_3)=0.65$$

$$P(B_1)=0.60,\quad P(B_2)=0.30,\quad P(B_3)=0.10$$

最后由全概率公式知

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)\\&=0.95\times0.60+0.80\times0.30+0.65\times0.10\\&=0.875\end{aligned}$$

这批产品的合格率为 0.875。

1.5.4 贝叶斯公式

在全概率公式的基础上立即可推得一个很著名的公式。

定理 1.5.6(贝叶斯公式) 设事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是基本空间 Ω 的一个分割，且它们各自概率 $P(B_1),P(B_2),\cdots,P(B_n)$ 皆已知且为正，又设 A 是 Ω 中的一个事件，$P(A)>0$，且在诸 B_i 给定下事件 A 的条件概率 $P(A|B_1),P(A|B_2),\cdots,P(A|B_n)$ 可通过试验等手段获得，则在 A 给定下，事件 B_k 的条件概率为

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},\quad k=1,2,\cdots,n$$

证：因诸 $P(B_i)>0$ 和 $P(A)>0$，由乘法公式知

$$P(B_k|A)P(A)=P(A|B_k)P(B_k)$$

其中 $P(A)$ 用全概率公式代入即得上述贝叶斯公式。

仔细分析，在贝叶斯公式里涉及到三组概率，已知两组概率 $\{P(B_i)\}$ 和 $\{P(A|B_i)\}$，可求出第三组概率 $\{P(B_i|A)\}$。下面结合例子来说明这三组概率的含义和贝叶斯公式的作用。

例 1.5.9 为了提高某产品的质量，公司经理考虑增加投资来改进生产设备，预计需投资 90 万元。但从投资效果看，下属部门有两种意见：

B_1：改进生产设备后，高质量产品可占 90%

B_2：改进生产设备后，高质量产品可占 70%

经理当然希望 B_1 发生，公司的效益可得到很大提高。但是根据下属两个

部门过去建议被采纳的情况，经理认为 B_1 的可信程度只有 40%，B_2 的可信程度是 60%。即

$$P(B_1)=0.4, \quad P(B_2)=0.6$$

这两个都是经理的主观概率。经理不想仅用过去的经验来决策此事，想慎重一些。通过小规模试验后，观其结果再定。为此做了一项试验，试验结果（记为 A）如下：

A：试制了五个产品，全是高质量产品。

经理对此试验结果很高兴，希望用此试验结果来修改他原先对 B_1 和 B_2 的看法，即要求条件概率 $P(B_1|A)$ 和 $P(B_2|A)$。这项工作可用贝叶斯公式来完成。为此需要两组概率 $\{P(B_i)\}$ 和 $\{P(A|B_i)\}$，其中第一组概率就是经理本人的主观概率；第二组概率可以通过计算获得。譬如，$P(A|B_1)$ 是表示每个产品是高质量的概率为 0.9（B_1）的条件下，连续五个产品都是高质量（A）的条件概率。试验 A 可看作五重独立重复试验，每次试验成功的概率为 0.9。故 5 次都成功的概率为 $P(A|B_1)=0.9^5=0.590$。类似可算得 $P(A|B_2)=0.7^5=0.168$。再利用全概率公式算得 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.4\times0.590+0.6\times0.168=0.337$。最后用贝叶斯公式可算得

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.236}{0.337}=0.700$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{0.101}{0.337}=0.300$$

这表明，经理根据试验 A 的信息调整了自己看法，把对 B_1 与 B_2 的可信程度由 0.4 和 0.6 调整到 0.7 和 0.3，经理往后的决策就不用 0.4 和 0.6，而要用 0.7 和 0.3。因为 0.4 与 0.6 仅是经理个人的主观概率，而 0.7 和 0.3 是综合了经理的主观概率和试验结果而获得的，要比主观概率更有吸引力。这就是贝叶斯公式的作用。

经过试验 A 后，经理对增加投资改进产品质量的兴趣增大。但因投资额大，还想再做一次小规模试验，观其结果再作决策。为此又做了一项试验，试验结果（记作 C）如下：

C：试制 10 个产品，有 9 个是高质量产品。

经理对此试验结果更为高兴。希望用此试验结果再一次修改对 B_1 和 B_2 的看法。把 0.7 和 0.3 作为经理的看法。即

$$P(B_1)=0.7, \qquad P(B_2)=0.3$$

再把试验 C 看作十重独立重复试验。可算得

$$P(C|B_1)=10(0.9)^9(0.1)=0.387$$
$$P(C|B_2)=10(0.7)^9(0.3)=0.121$$
由此可算得 $P(C)=P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)=0.7\times0.387+0.3\times0.121=0.307$。最后，由贝叶斯公式可算得 $P(B_1|C)=0.883$，$P(B_2|C)=0.117$。经理看到，经二次试验，B_1 的概率已上升到 0.883，到可以下决心的时候了。他能以接近 0.9 的概率保证此项投资能取得较大效益。

例 1.5.10 据调查某地区居民的肝癌发病率为 0.0004，若记“该地区居民患肝癌”为事件 B_1，并记 $B_2=\overline{B}_1$，则
$$P(B_1)=0.0004,\ P(B_2)=0.9996$$
现用甲胎蛋白法检查肝癌。若呈阴性，表明不患肝癌，若呈阳性，表明患肝癌。由于技术和操作不完善以及种种特殊原因，是肝癌者未必检出阳性，不是患者也有可能呈阳性反应。据多次实验统计，这两种错误发生的概率为
$$P(A|B_1)=0.99,\quad P(A|B_2)=0.05$$
其中事件 A 表示“阳性”。因此 $\overline{A}$ 表示“阴性”，由此得 $P(\overline{A}|B_1)=0.01$。它是“肝癌患者未必检出阳性”的概率。

现设某人已检出阳性，问他患肝癌的概率 $P(B_1|A)$是多少？这里已知的第一组概率$\{P(B_i)\}$是从调查得知，第二组概率$\{P(A|B_i)\}$是从试验得知，于是可用贝叶斯公式算得要求概率
$$P(B_1|A)=\frac{0.99\times0.0004}{0.99\times0.0004+0.05\times0.9996}$$
$$=\frac{0.000396}{0.000396+0.04998}=0.00786$$
这表明，在已检查出呈阳性的人中，真患肝癌的人不到 1%。这个结果可能会使人吃惊，但仔细分析一下，就可以理解了。因为肝癌发病率很低，在 10000 人中，只有 4 人左右。而约有 9996 人不患肝癌。如对这 10000 人用甲胎蛋白法进行检查。按其错检的概率可知，4 位患肝癌的都呈阳性，而 9996 位不患肝癌人中约有 9996×0.05=500 个呈阳性。在总共 504 个呈阳性者中，真患肝癌的 4 人占总阳性中不到 1%，其中大部分人(500 人)是属“虚报”。从这个例子看出，减少“虚报”是提高检验精度的关键。这在实际中往往是不容易的事。在实际中，医生常用另一些简单易行的辅助方法先进行初查，排除大量明显不是肝癌的人，当医生怀疑某人有可能患肝癌时，才建议用甲胎蛋白法检验。这时在被怀疑的对象中，肝癌的发病率已显著提高了，比如说，$P(B_1)=0.4$。这时再用贝叶斯公式进行计算，可得

$$P(B_1|A)=\frac{0.99\times0.4}{0.99\times0.4+0.05\times0.6}=0.9296$$

这样就大大提高了甲胎蛋白法的准确率了。

例 1.5.11 伊索寓言"孩子与狼"讲的是一个小孩每天到山上放羊，山里有狼出没，第一天他在山上喊："狼来了！狼来了！"山下的村民们闻声便去打狼，可到了山上，发现狼没有来；第二天仍是如此；第三天，狼真的来了，可无论小孩怎么喊叫，也没有人来救他，因为前二次他说了谎话，人们不再相信他了。

现用贝叶斯公式来分析这个寓言中村民的心理活动，为此先要作一些假设。首先假设村民们对这个小孩的印象一般，他说谎话（记为 A_1）和说真话（记为 A_2）的概率相同，即设

$$P(A_1)=1/2,\qquad P(A_2)=1/2$$

另外再假设：说谎话的孩子喊狼来了（记为 B）时，狼来的概率为 1/3，说真话的孩子喊狼来了时，狼来的概率为 3/4，即设

$$P(B|A_1)=1/3,\qquad P(B|A_2)=3/4$$

当第一次村民上山打狼，发现狼没有来（$\overline{B}$ 发生了）时，村民们对说谎话小孩的认识集中体现在条件概率 $P(A_1|\overline{B})$ 上，根据上述假设，利用贝叶斯公式不难算得

$$P(A_1|\overline{B})=\frac{P(\overline{B}|A_1)P(A_1)}{P(\overline{B}|A_1)P(A_1)+P(\overline{B}|A_2)P(A_2)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}=\frac{8}{11}=0.7273$$

类似地可算得 $P(A_2|\overline{B})=3/11=0.2727$，这表明村民们对这个小孩说谎话的概率由 0.5 调整到 0.7273，可记

$$P(A_1)=8/11,\qquad P(A_2)=3/11$$

在此基础上，村民第二次上山打狼，仍没看见狼，这时村民再一次调整对这个小孩说谎话的认识，即再一次计算条件概率 $P(A_1|\overline{B})$，即

$$P(A_1|\overline{B})=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{8}{11}}{\frac{2}{3}\times\frac{8}{11}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{11}}=\frac{64}{73}=0.8767$$

这表明：村民们经过两次上当，对这个小孩说谎话的概率从 0.5 上升到 0.8767，即十句话中有近九句话在说谎，给村民留下这种印象，他们听到第三次呼叫时怎么再会上山打狼呢？

第二章

随机变量及其概率分布

§2.1 随机变量

2.1.1 随机变量

人们对随机现象的兴趣常常集中在其结果的某个数量方面。譬如，质量检验员在检查 20 个产品中关心的是不合格品的个数。若记 20 个产品中不合格品的个数为 X，则这个 X 可能取 0，1，2，…，20 中任一个数，可见此 X 是变量。至于这个 X 取哪一个数要看检查结果，事先不能确定，故此 X 的取值又带有随机性，这样的变量又称为随机变量。这个随机变量 X 是质量检验员的注意点。有了随机变量后，有关事件的表示也方便了。如"$X=2$"表示"20 个产品中有 2 个不合格品"这一事件，又如"$X\leqslant 2$"表示"20 个产品中有不多于 2 个不合格品"这一事件。

又如超级市场的经理很关心一位顾客购买场内商品的件数和顾客付款的等待时间。若记顾客购买场内商品件数为 Y，这个 Y 可能取 0，1，2，3，4 或其它自然数。并且 Y 取什么数是随机的，因为经理并不知道顾客会买几件商品，故

Y 是一个随机变量。经理很关心这个随机变量的取值，若没有购买任何一个商品 ($Y=0$)或只购买一件商品($Y=1$)的顾客人数很多，即事件“$Y\leqslant1$”的概率 $P(Y\leqslant1)$很大，则经理就要设法改进商品的进货品种，以引起顾客的购物兴趣，增加利润。类似地，若记顾客付款的等待时间为 Z，则 Z 取什么值要看当时付款队伍的长短和收款人的操作，因而完全是随机的，它可以是 2 分钟、4 分钟，也可能是 0 到 10 分钟的时间区间内任一个时刻。经理关心这个随机变量 Z 的取值。若事件“$Z>3$”=“顾客付款的等待时间超过 3 分钟”的概率较大，那经理就要设法增加付款的窗口，以便利顾客，多做生意。

从上面几个例子可以看出，随机变量是研究随机现象的一个重要工具，也是概率论的一个基本概念。它的一般定义如下：

定义 2.1.1 假如一个变量在数轴上的取值依赖于随机现象的基本结果，则称此变量为**随机变量**，常用大写字母 X,Y,Z 等表示，其取值用小写字母 x,y,z 等表示。假如一个随机变量仅取数轴上的有限个或可列个孤立点(见图 2.1.1)，则称此随机变量为**离散随机变量**。假如一个随机变量的可能取值充满数轴上的一个区间(a,b)(见图 2.1.2)，则称此随机变量为**连续随机变量**，其中 a 可以是$-\infty$，b 可以是$+\infty$。

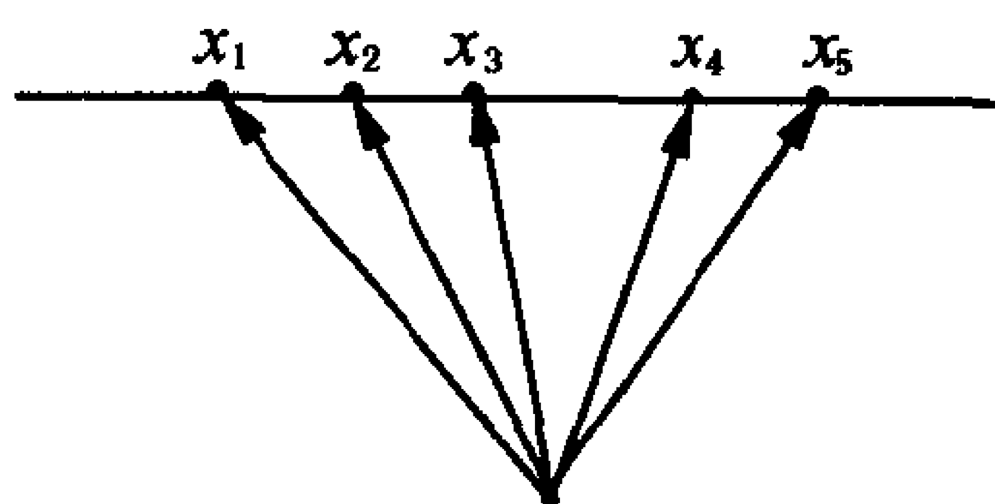


图 2.1.1 离散随机变量的可能取值

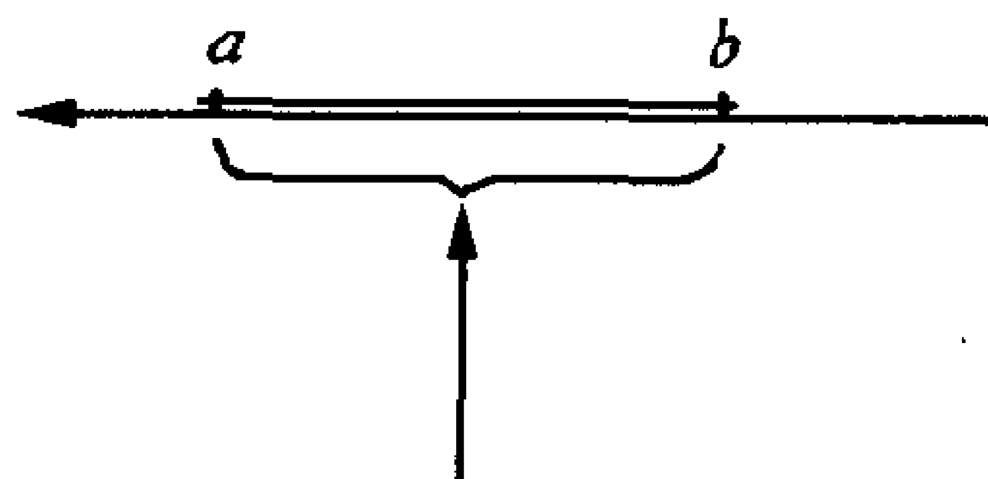


图 2.1.2 连续随机变量的可能取值

在我们周围随机变量的例子是很多的，下面的列子将会给我们一些启发。

例 2.1.1 认识一个随机变量首先要从它的取值来区分它是离散随机变量，还是连续随机变量。

(1)抛一枚硬币，正面出现次数 X 是仅可能取 0 与 1 两个值的随机变量。“$X=0$”表示“出现反面”，“$X=1$”表示“出现正面”。类似地，检查一个产品，不合格的个数 Y 也是一个仅能取 0 与 1 两个值的随机变量。“$Y=0$”表示“合格品”，“$Y=1$”表示“不合格品”。

(2)检查 n 个产品，不合格品数 X 是可能取 $0,1,\cdots,n$ 等 $n+1$ 个值的随机变量，“$X=x$”表示“n 个产品中有 x 个不合格品”。类似地，n 台车床中需要维修的车床数 Y 也是可能取 $0,1,\cdots,n$ 等 $n+1$ 个值的随机变量，“$Y=y$”表示“n 台车床中有 y 台需要维修”。

(3)一疋布上疵点的个数 X 是可能取 0,1,…等一切非负整数的随机变量,“$X=x$”表示“一疋布上有 x 个疵点”。类似地,一本书上错别字的个数、城市的十字路口一分钟内通过的机动车辆数、顾客在超市中购买商品件数都可看作取一切非负整数的随机变量。

以上都是离散随机变量,离散随机变量常常与计数过程联系在一起。而连续随机变量常常与测量过程联系在一起。下面是一些连续随机变量的例子。

(4)测量误差 X 是可在$(-\infty,\infty)$上取值的随机变量。“$|X|\leqslant 1$”表示“测量误差 X 在$[-1,+1]$内”。

(5)电视机的寿命 Y(单位:小时)是 $(0,\infty)$上取值的随机变量,“$Y>10000$”表示“电视机寿命超过一万小时”。类似地,小客车每公里的耗油量 Y(单位:升)也可看作在$(0,\infty)$上取值的随机变量。“$Y\leqslant 0.5$”表示“小客车每公里的耗油量不超过半升。”

(6)汽车司机使用刹车时轮胎接触地面的点的位置 X 是在$[0,2\pi r]$上取值的随机变量,其中 r 是轮胎的半径。

2.1.2 随机变量的概率分布

直观地说,随机变量就是“随机取值的变量”,或者说是“取值随机会而定的变量”。但要认识一个随机变量就不能仅停留在这种感觉上,还应认识如下二点:

(1)随机变量 X 可能取哪些值,或取值范围是什么?

(2)随机变量 X 取这些值的概率是多少?

关于随机变量 X 的取值在上一小节已讨论过了。这里将着重讨论随机变量 X 取值的概率。在定义 2.1.1 中随机变量 X 的“取值依赖于基本结果”的说法意味着随机变量 X 是基本结果 ω 的函数,即可把 X 记为 $X(\omega)$,

$$X=X(\omega),\qquad \omega\in\Omega$$

这里要补充说明一句:对随机变量 X 来说,不容许基本空间 Ω 中有一个基本结果 w 没有实数与其对应,综合上述,随机变量也可看作定义在基本空间 $\Omega=\{w\}$的实值函数。在这个认识上,“随机变量 X 的取值为 x”就是满足等式 $X(\omega)=x$ 的一切 ω 组成的集合,用“$X=x$”表示,即

$$“X=x”=\{\omega:X(\omega)=x\}\subset\Omega$$

类似地,“随机变量 X 的取值小于或等于 x”就是满足不等式 $X(\omega)\leqslant x$ 的一切 ω 组成的集合,用“$X\leqslant x$”表示,即

$$“X\leqslant x”=\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\subset\Omega$$

特别，"$X\leqslant\infty$"是必然事件，而"$X\leqslant-\infty$"是不可能事件。以后会看到，上述两种形式的事件是典型事件。譬如，要确定一个离散随机变量 X 取值的概率，只要对其可能取值 x_i 确定形如"$X=x_i$"事件的概率即可（详见§2.2.1）。而对一般随机变量 X，要确定它取值的概率，就要对任意实数 x，确定形如"$X\leqslant x$"事件的概率即可，而这类事件的概率 $P(X\leqslant x)$ 是 x 的函数，它随 x 变化而变化，若把这个函数记为 $F(x)$，并能确定这个函数，则形如"$X\leqslant x$"的事件的概率也随之确定。这个函数 $F(x)$ 称为分布函数，是概率论中的一个重要概念，也是计算随机变量 X 有关事件的概率的重要工具，它的一般定义如下。

定义 2.1.2 设 X 为一个随机变量，对任意实数 x，事件"$X\leqslant x$"的概率是 x 的函数，记为

$$F(x)=P(X\leqslant x)$$

这个函数称为 X 的累积概率分布函数，简称**分布函数**。

在上述定义中并没有限定随机变量 X 是离散的或是连续的。不论离散随机变量还是连续随机变量都可谈论分布函数，都有各自的分布函数。从分布函数定义容易看出它的一些基本性质。

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$。要记住，分布函数值是特定形式事件"$X\leqslant x$"的概率，而概率总在 0 与 1 之间。

(2) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$。这是因为事件"$X\leqslant-\infty$"是不可能事件之故。

(3) $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，这是因为事件"$X\leqslant+\infty$"是必然事件之故。

(4) $F(x)$ 是非降函数，即对任意 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$。这是因为事件"$X\leqslant x_2$"包含事件"$X\leqslant x_1$"之故。

(5) $F(x)$ 是右连续函数，即 $F(x)=F(x+0)$，其中 $F(x+0)$ 是函数在点 x 处的右极限，对任意给定的 x，取一个下降数列 $\{x_n\}$，使其极限为 x，即

$$x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots\to x \quad (n\to\infty)$$

则

$$F(x+0)=\lim_{x_n\to x}F(x_n)$$

这一点将结合下面例子给予说明。

例 2.1.2 取暖器有二种：一种是用电作动力的（记为 E），另一种是用煤气作动力的（记为 G）。有三位顾客到大型商场去各购买一台取暖器。若定义如下一个随机变量：

X=三位顾客共购买煤气取暖器的台数

而随机现象(三位顾客购买取暖器)的基本结果有多种,如第一、第三位顾客买的是煤气取暖器,而第二位顾客买的是电取暖器,此时基本结果可表示为 GEG,对此基本结果,随机变量 X 的取值为 2。类似地可把全部基本结果及 X 相应取值罗列如下:

基本结果	EEE	EEG	EGE	GEE	EGG	GEG	GGE	GGG
X 取值	0	1	1	1	2	2	2	3

可见 X 是定义在基本空间 Ω(含有 EEE 等 8 个基本结果)上的一个实值函数,并且只取四个值 0,1,2,3,故 X 是离散随机变量。

若从市场调研知,在欲购取暖器的顾客中 60%要购电取暖器,40%要购煤气取暖器,即 $P(E)=0.6,P(G)=0.4$,假如三位顾客购置取暖器是相互独立的,则可算得每个基本结果发生的概率,譬如

$$P(EEE)=0.6^3=0.216$$

$$P(EEG)=0.6^2\times0.4=0.144$$

于是又可算得 X 取 0,1,2,3 等四个值的概率

$$P(X=0)=P(EEE)=0.216$$

$$P(X=1)=P(EEG\cup EGE\cup GEE)=3\times0.144=0.432$$

$$P(X=2)=P(EGG\cup GEG\cup GGE)=3\times0.6\times0.4^2=0.288$$

$$P(X=3)=P(GGG)=0.4^3=0.064$$

上述四个概率之和恰好为 1,这样的一组概率在概率论中称为一个概率分布,或分布列,并可表示如下:

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

利用分布列可以算得一些更复杂事件的概率,譬如,事件"三位顾客中最多有一位购置煤气取暖器"可用"$X\leqslant1$"表示,相应概率为

$$P(X\leqslant1)=P(X=0)+P(X=1)=0.648$$

类似地,可以计算其它一些事件的概率

$$P(X\geqslant1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0.784$$

$$P(1\leqslant X\leqslant2)=P(X=1)+P(X=2)=0.720$$

最后,利用这个分布列容易写出 X 的分布函数

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.216, & 0\leqslant x<1\\ 0.648, & 1\leqslant x<2\\ 0.936, & 2\leqslant x<3\\ 1, & 3\leqslant x\end{cases}$$

这是定义在整个实数轴上的函数，其图形（见图 2.1.2）是阶梯函数，它的间断点正好是 X 可能取的四个值上，在这些间断点上的函数值等于该函数的右极限，所以这个函数是右连续的，另外，在间断点上函数 $F(x)$ 的跃度从低到高依次为 X 取 0,1,2,3 的概率。

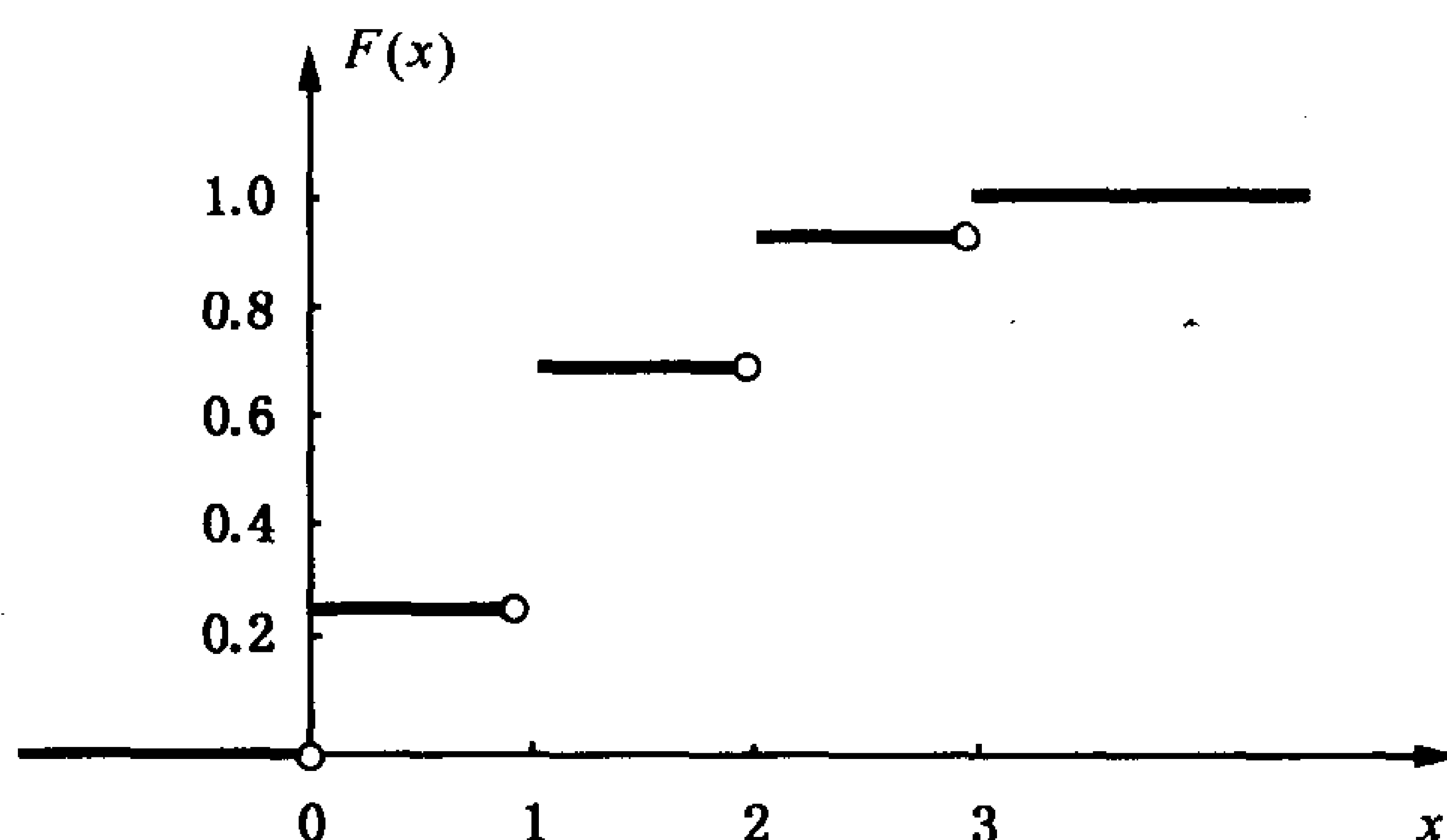


图 2.1.2　随机变量 X 仅取 0,1,2,3 等四个值（例 2.1.2）的分布函数

例 2.1.3　在超市顾客排队等候付款时间（简称等候时间）T 是在 $(0,\infty)$ 上取值的连续随机变量，某超市对顾客等候时间的大量观察和研究后得到如下结果：顾客等候时间不超过 $t(\geqslant 0)$ 分钟的概率 $P(T\leqslant t)$ 可用指数函数 $1-e^{-\lambda t}$ 计算，而当 $t<0$ 时，事件"$T\leqslant t$"是不可能事件，这表明，顾客等候时间 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 是待定参数，它根据超市具体情况而定，若设 $\lambda=0.3$，可以算得一些分布函数的值

$$F(2)=P(T\leqslant 2)=0.451$$
$$F(4)=P(T\leqslant 4)=0.699$$
$$F(6)=P(T\leqslant 6)=0.834$$
$$F(8)=P(T\leqslant 8)=0.909$$

这些概率表明，在 1000 名顾客中排队付款的等待时间不超过 2 分钟的约有 451 人左右，不超过 4 分钟的约有 699 人左右，不超过 6 分钟的约有 834 人左右，不超过 8 分钟的约有 909 人左右，把这些概率点在坐标纸上，可以画出分布函数 $F(t)$ 的曲线。在 $t<0$ 时，$F(t)=0$；在 $t\geqslant0$ 时，$F(t)$ 是一条连续上升的曲线(图 2.1.3)，但上升速度逐渐减慢，最后以 $F(t)=1$ 为渐近线。

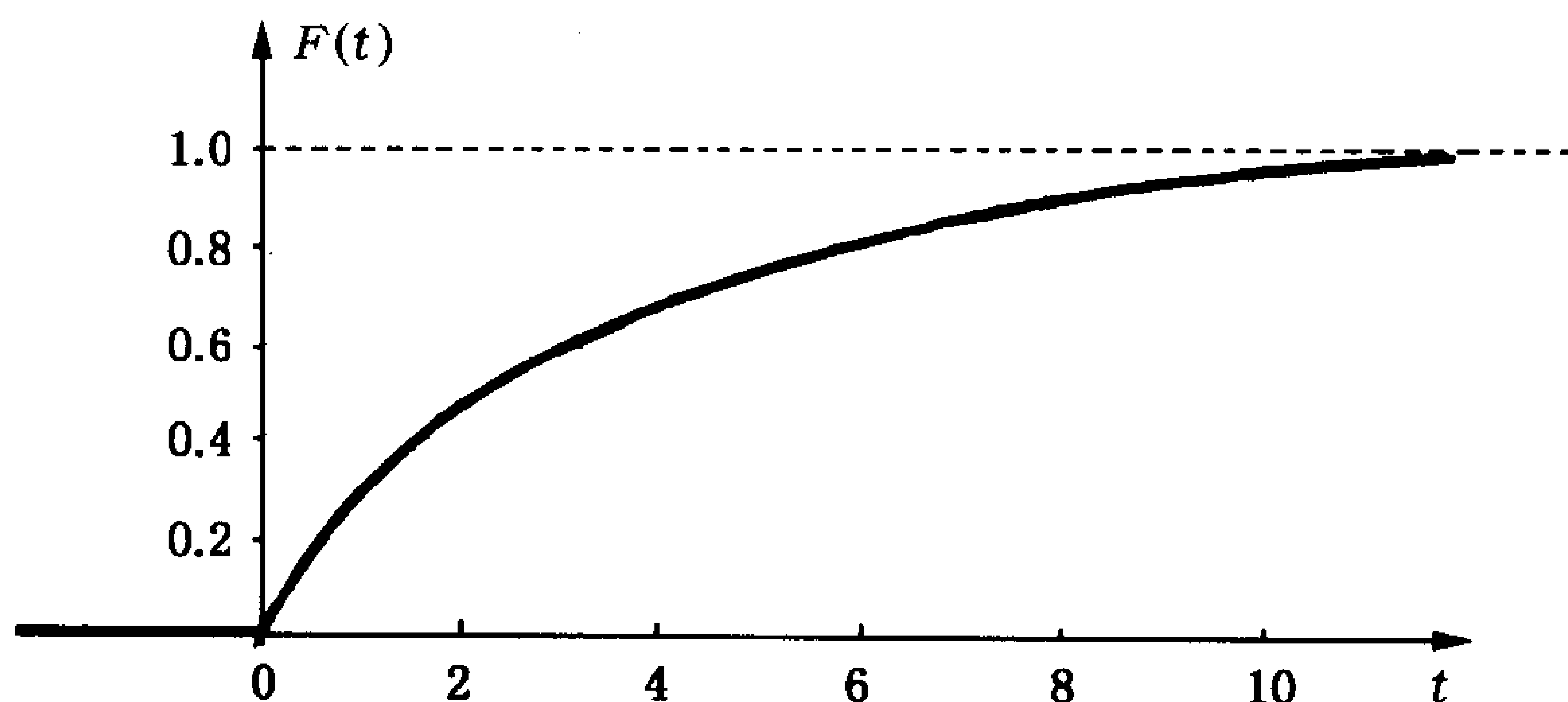


图 2.1.3　顾客付款等候时间 T 的分布函数 $F(t)$

利用这个分布函数还可计算更复杂事件的概率，譬如，顾客等待时间超过 1 分钟但不超过 5 分钟的概率为

$$\begin{aligned}P(1<T\leqslant5)&=P(T\leqslant5)-P(T\leqslant1)\\&=F(5)-F(1)=0.777-0.259=0.518\end{aligned}$$

这表明，等待时间在(1,5]内的可能性要超过 0.5，即有一半以上顾客等待时间在 1 分钟到 5 分钟之间。

由此可见，当有了分布函数之后，计算各种事件的概率就容易多了。这样一来，确定一个随机变量的分布函数将成为一个关键问题，这将在以后介绍。

2.1.3　概率的可列可加性公理

在进一步研究中将会涉及无穷多个事件的概率，这就要求我们把概率公理化定义(定义 1.2.1)中的可加性公理用更强的可列可加性公理来代替。

可列可加性公理　若 $A_1,A_2,\cdots$ 是一列互不相容事件，则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

此公理与非负性公理、正则性公理一起组成新的公理体系，它使可列个事件经运算后所得事件可谈及概率，为了说明前面所推得的一些概率性质仍然成立，从逻辑上看，还需要从新的公理体系出发来证明(有限)可加性成立，这

一点将放在习题 2.1.10 里进行。

§2.2 离散随机变量

2.2.1 离散随机变量的分布列

定义 2.2.1 设 X 是离散随机变量，它的所有可能取值是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，假如 X 取 x_i 的概率为

$$P(X=x_i)=p(x_i)\geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,n,\cdots \tag{2.2.1}$$

且满足如下条件：

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$$

则称这组概率 $\{p(x_i)\}$ 为该随机变量 X **的分布列**，或 X **的概率分布**，记为 $X \sim \{p(x_i)\}$，读成随机变量 X 服从分布 $\{p(x_i)\}$。

若已知离散随机变量 X 的分布列为 $\{p(x_i)\}$，容易写出 X 的分布函数

$$F(x)=\sum_{x_i \leqslant x} p(x_i) \tag{2.2.2}$$

但在离散随机变量场合，使用分布列更为方便，故常用分布列表示离散随机变量的概率分布，非必要时不使用分布函数。

离散随机变量 X 的分布列除用(2.2.1)式表示外，还用如下列表方式表示，但要注意表示要上下位置对应，不要错位。

X	X_1	X_2	$\cdots$	X_n	$\cdots$
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_n)$	$\cdots$

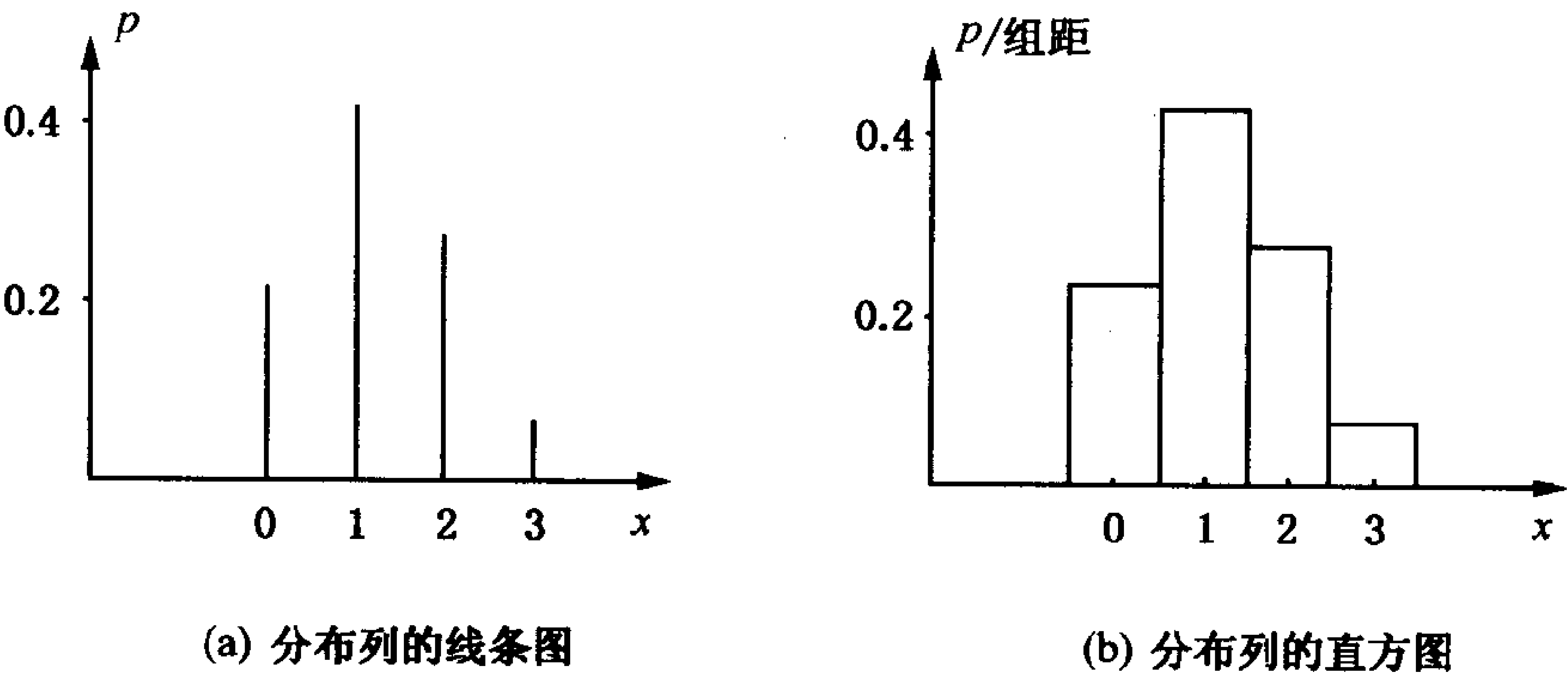
此外，分布列还有两种图表示法：**线条图与概率直方图**(图 2.2.1)。下面将结合例子来介绍这两种图。

例 2.2.1 在例 2.1.2 中有三位顾客在选购电取暖器和煤气取暖器，他们共购买煤气取暖器台数 X 是离散随机变量，在假设购置电取暖器的概率为 0.6，购置煤气取暖器的概率为 0.4 的条件下，获得 X 的如下分布列：

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

现用这个分布列来介绍它的线条图与概率直方图。线条图(图 2.2.1(a))是以垂线长度表示分布列中各个概率，图中各线条长度之和为 1。概率直方图(图 2.2.1(b))是以长方形面积表示分布列中各个概率，图中各长方形面积之

和为 1。无论垂线还是长方形，它们都置于 X 的相应取值之上。但这两张图的纵坐标是有差别的。线条图的纵坐标是概率刻度；概率直方图的纵坐标是以“概率/组距”来标明刻度的，其中组距是长方形底部宽度。使用概率直方图常要求各长方形联成一片，否则就用线条图。上述分布列的线条图与概率直方图如图 2.2.1 所示，这两张图可使分布列给人们留下直观的印象。



(a) 分布列的线条图

(b) 分布列的直方图

图 2.2.1 分布列的线条图与直方图

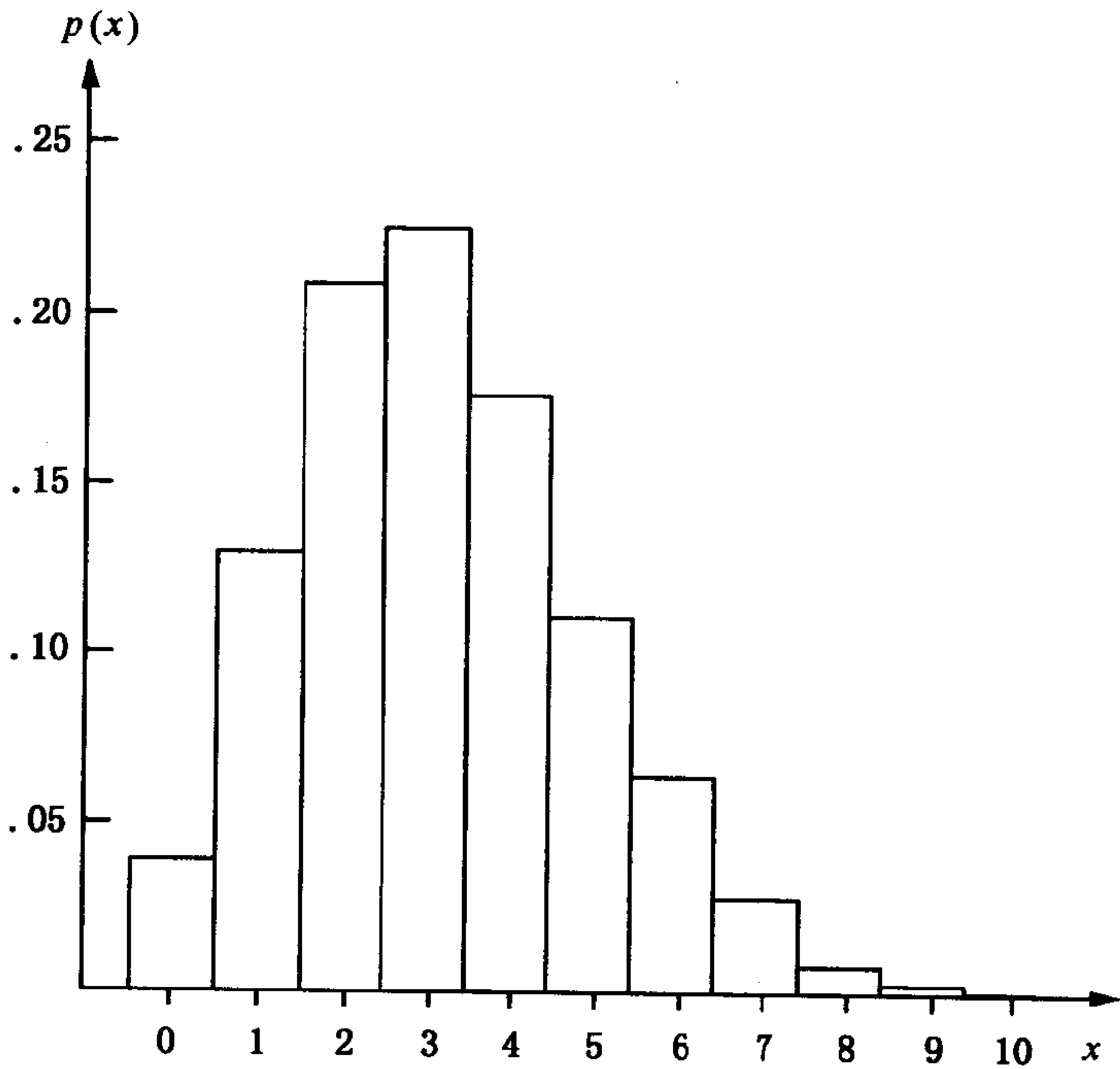


图 2.2.2 例 2.2.2 的分布列的概率直方图

例 2.2.2 消费者协会收到大量顾客的来信，申诉他们购买的空调器中的质量问题。消费者协会对此作了整理后提出空调器重要缺陷数 X 的分布列

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.041	0.130	0.209	0.223	0.178	0.114	0.061	0.028	0.011	0.004	0.001

其中这些概率都是用统计方法确定的，其和为 1。此分布列的概率直方图如图 2.2.2 所示。从图可以看出，多数空调器的缺陷数在 1 到 5 之间，而超过 6 个缺陷的空调器是较少的。用此分布可以算得下列事件的概率：

$$P(1\leqslant X\leqslant 5)=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=0.854$$

$$P(X>6)=P(7)+P(8)+P(9)+P(10)=0.044$$

例 2.2.3 检查下面的数列是否能组成一个概率分布

(1) $p_1(x)=\dfrac{x-2}{2},\quad x=1,2,3,4$

(2) $p_2(x)=\dfrac{x^2}{25},\quad x=0,1,2,3,4$

(3) $p_3(x)=2^{-x},\quad x=1,2,\cdots,n,\cdots$

解：数列(1)不能组成一个概率分布，因为 $p_1(1)$ 为负。

数列(2)也不能组成一个概率分布，因为它的 5 个概率之和为 6/5，大于 1。

数列(3)是一个概率分布，因为其每个数都大于零，其和又恰好为 1。

2.2.2 离散随机变量的数学期望

"期望"在日常生活中常指有根据的希望，或发生可能性较大的希望。譬如，一位人寿保险经纪人告诉我们："在美国 40 岁的妇女可期望再活 38 年。"这不是说 40 岁的美国妇女都活到 78 岁，然后第二天去世，而是指 40 岁的美国妇女中，有些可再活 20 年，有些再活 50 年，平均可再活 38 年，即再活 38 年左右(如再活 38±10 年)的可能性大一些；又如，"某种轮胎可期望行驶 6 万公里"，也是指此种轮胎平均可行驶 6 万公里，就个别轮胎来说，有的行驶可超过 6 万公里，有的行驶可能不到 6 万公里就报废，而行驶 6 万公里左右的可能性大一些。下面谈及的"数学期望"是指用概率分布算得的一种加权平均，它是概率论中的一个基本概念。

数学期望概念起源于赌博，先看下面的例子。

例 2.2.4(分赌本问题) 17 世纪中叶一位赌徒向法国数学家帕斯卡(1623～1662)提出一个使他苦恼长久的分赌本问题：甲乙两位赌徒相约，用掷

硬币进行赌博，谁先赢三次就得全部赌本100法郎。当甲赢了二次，乙只赢一次时，他们都不愿再赌下去了，问赌本应如何分呢？这个问题引起不少人的兴趣。有人建议按已赢次数的比例来分赌本，即甲得全部赌本的2/3，乙得其余的1/3；有人反对，认为这全然没有考虑每个赌徒必须再赢的次数。1654年帕斯加提出如下解法：在甲已赢二次和乙只赢一次时，最多只需再玩二次即可结束这次赌博，而再玩二次可能会出现如下四种结果：

结果 次数	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	甲	甲	乙	乙
2	甲	乙	甲	乙

其中前三种结果 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 中任一个发生都使甲得100法郎，只有当 ω_4 发生，甲得0法郎(即乙得100法郎)，由于这四种结果是等可能的，故甲得100法郎的概率为3/4，而得0法郎的概率为1/4，从而甲应期望得到 $100\times(3/4)=75$ 法朗，完整地说，甲应期望得到

$$100\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=75(\text{法郎})$$

这就是帕斯加的答案，其意指，若再继续此种赌博多次，甲每次平均可得75法郎。

帕斯加的解法引出数学期望概念，从分布的观点看这个问题，甲赢得的法朗数 X 是一个随机变量，它仅可取两个值，$x_1=100$ 和 $x_2=0$，取这些值的概率分别为

$$p(x_1)=P(X=x_1)=3/4,\quad p(x_2)=P(X=x_2)=1/4$$

这时甲赢得法郎数的数学期望就是

$$X\text{ 的数学期望}=x_1p(x_1)+x_2p(x_2)$$

这就是计算数学期望的公式，它的一般定义如下

定义 2.2.2 设离散随机变量 X 的分布列为

$$P=(X=x_i)=p(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

则和式 $\sum_{i=1}^{n}x_ip(x_i)$ 称为 **X 的(或分布的)数学期望**，记为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip(x_i)\tag{2.2.3}$$

例如 X 的取值为可列个，无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_ip(x_i)$ 绝对收敛，则称该无穷级数之和为 **X 的(或分布的)数学期望**，记为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip(x_i)\tag{2.2.4}$$

假如上述无穷级数不绝对收敛，则说该随机变量 X 的(或分布的)**数学期望不存在**。当数学期望存在时，常简称它为**期望**、**期望值**、**均值等**。

例 2.2.5 某推销人与工厂约定，用船把一箱货物按期无损地运到目的地可得佣金 10 元，若不按期则扣 2 元，若货物有损则扣 5 元，若既不按期又有损坏则扣 16 元。推销人按他的经验认为，一箱货物按期无损地运到目的地有 60%把握，不按期到达占 20%，货物有损占 10%，不按期又有损的占 10%。试问推销人在用船运送货物时，每箱期望得到多少？

解：设 X 表示该推销人用船运送货物时每箱可得钱数，则按题意，X 的分布为

X	10	8	5	−6
P	0.6	0.2	0.1	0.1

按数学期望定义 2.2.2，该推销人每箱期望所得

$$E(X)=10\times 0.6+8\times 0.2+5\times 0.1-6\times 0.1$$
$$=7.5\text{ 元}$$

假如推销人一次能押运 200 箱货物，则他期望(平均)得到

$$200\times E(x)=200\times 7.5=1500\text{ 元}$$

例 2.2.6 在有 N 个人的团体中普查某种疾病需要逐个验血，若血样呈阳性，则有此种疾病；呈阴性，则无此种疾病。逐个验血需检验 N 次，若 N 很大，那验血工作量也很大。为了能减少工作量，一位统计学家提出一个想法：把 k 个人($k\geqslant 2$)的血样混合后再检验，若呈阴性，则 k 个人都无此疾病，这时 k 个人只需作一次检验；若呈阳性，则对 k 个人再分别检验，这时为弄明白谁有此种疾病检验 $k+1$ 次。若该团体中得此疾病的概率为 p，且得此疾病相互独立。试问此种验血办法能否减少验血次数？若能减少，那能减少多少工作量。

解：令 X 为该团体中每人需要验血次数，则按题意，X 是仅取二个值的随机变量，其分布为

X	$1/k$	$1+1/k$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

则每人平均验血次数为

$$E(X)=\frac{1}{k}\cdot(1-p)^k+(1+\frac{1}{k})[1-(1-P)^k]$$
$$=1-(1-p)^k+\frac{1}{k}$$

而新的验血方法比逐个验血方法平均能减少验血次数为

$$1-E(X)=(1-p)^k-\frac{1}{k}$$

若 $E(X)<1$，则新方法能减少验血次数。譬如，当 $p=0.1,k=2$ 时，$1-E(X)=1-0.69=0.31$，即平均每人减少 0.31 次。若该团体有 10000 人，则可减少 3100 次，即减少 31%的工作量。对 k 为其它值时，亦可类似计算，计算结果列于表 2.2.1 中。

从该表可见，当 $p(=0.1)$ 已知时，可选出一个 $k_0(=4)$，使得 $E(X)$ 最小。此时把 k_0 个人的血样混在一起用新方法检验，可使平均验血次数最少，达到最大的效益。其它的 k 值效益就不是最大，特别在 $p=0.1,k\geqslant 34$ 时反而要增加平均验血次数。

表 2.2.1　平均验血次数($p=0.1$)

k	$E(X)$	$1-E(X)(\%)$
2	0.6900	31.00
3	0.6043	39.57
4	0.5939	40.61
5	0.6095	39.05
6	0.6352	36.48
7	0.6646	33.54
8	0.6954	30.55
10	0.7513	24.87
15	0.8608	13.92
20	0.9264	7.36
25	0.9682	3.18
30	0.9909	0.91
34	1.0015	−0.15

例 2.2.7　有一批产品，其不合格品率为 p，检验员一个接一个地检查产品，直到发现第一个不合格品时才停止检查。若记 X 为首次出现不合格品的检查次数，则 X 是可取 1,2,3,…等一切自然数的随机变量。事件"$X=5$"表示前 4 次得合格品，而第 5 次得不合格品。考虑到这批产品很多，可认为每次抽检都相互独立，故

$$P(X=5)=p(1-p)^4$$

一般场合，我们有

$$p(x)=P(X=x)=p(1-p)^{x-1}, \quad x=1,2,\cdots$$

这是一个概率分布，因为其每个概率均为正，其和

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

这个分布称为**几何分布**，它的数学期望（下设 $q=1-p$）

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}$$

其中 xq^{x-1} 可看作是 q^x 对 q 的导数，再利用求和与求导运算的可交换性，可得

$$E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^x) = P\frac{d}{dq}\left[\sum_{x=0}^{\infty} q^x\right]$$

$$= p\frac{q}{dq}\left[\frac{1}{1-q}\right] = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

这表明：几何分布的数学期望为 p^{-1}，若 $p=0.1$，则首次出现不合格品的平均检查次数为 $p^{-1}=10$。

2.2.3 二项分布

离散随机变量的概率分布简称为离散分布。下面将叙述三种在实际中最常用的离散分布，这里先叙述二项分布。

在 §1.4.4 中叙述的 n 重贝努里试验有如下几个特点：

(1)重复进行 n 次相互独立的试验；

(2)每次试验只可能有两个结果：成功与失败；

(3)每次出现成功的概率相同，皆为 p。

在那里我们曾用 $B_{n,k}$ 表示事件“n 重贝努里试验中成功出现 k 次”。如今我们用随机变量来表示这个事件。设 X 为 n 重贝努里试验中成功的次数，则有 $B_{n,k}=$ “$X=k$”。其中 X 可能取的值为 $0,1,\cdots,n$，它取这些值的概率为

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,\cdots,n \qquad (2.2.5)$$

由二项式定理可知，上述 $n+1$ 个概率之和为 1，

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$= [p+(1-p)]^n = 1$$

这个概率分布称为**二项分布**，记为 $b(n,p)$，它被 n（正整数）和 p（$0<p<1$）两

个参数唯一确定。在概率论中“随机变量X的概率分布为二项分布$b(n,p)$”常被说成“随机变量X服从二项分布$b(n,p)$”，并记作$X \sim b(n,p)$。

二点分布　$n=1$时的二项分布$b(1,p)$又称为二点分布，或称$0-1$分布，其分布为

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1 \tag{2.2.6}$$

其中X表示在一次贝努里试验里的成功次数。

二项分布的数学期望　设$X \sim b(n,p)$，由数学期望定义知

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$$

其中

$$x\binom{n}{x}=x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!}=n \cdot \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}=n\binom{n-1}{x-1}$$

代回原式后，有

$$\begin{aligned} E(X) &= np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\ &= np\sum_{x=0}^{n}\binom{n-1}{x}p^{x}(1-p)^{n-1-x} \\ &= np[p+(1-p)]^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

最后结果表明，二项分布$b(n,p)$的数学期望为np，即在n重贝努里试验中，成功出现的平均次数为np。

例 2.2.8　甲、乙、丙叁人打靶，各人命中率依次为0.2，0.5，0.8。若每人各打五次靶，依次记X、Y、Z为各人命中次数，则它们都服从二项分布，具体如下：

$$X \sim b(5,0.2), \quad p(x)=\binom{5}{x}0.2^x 0.8^{5-x}$$

$$X \sim b(5,0.5), \quad p(y)=\binom{5}{y}0.5^5$$

$$Z \sim b(5,0.8), \quad p(z)=\binom{5}{z}0.8^z 0.2^{5-z}$$

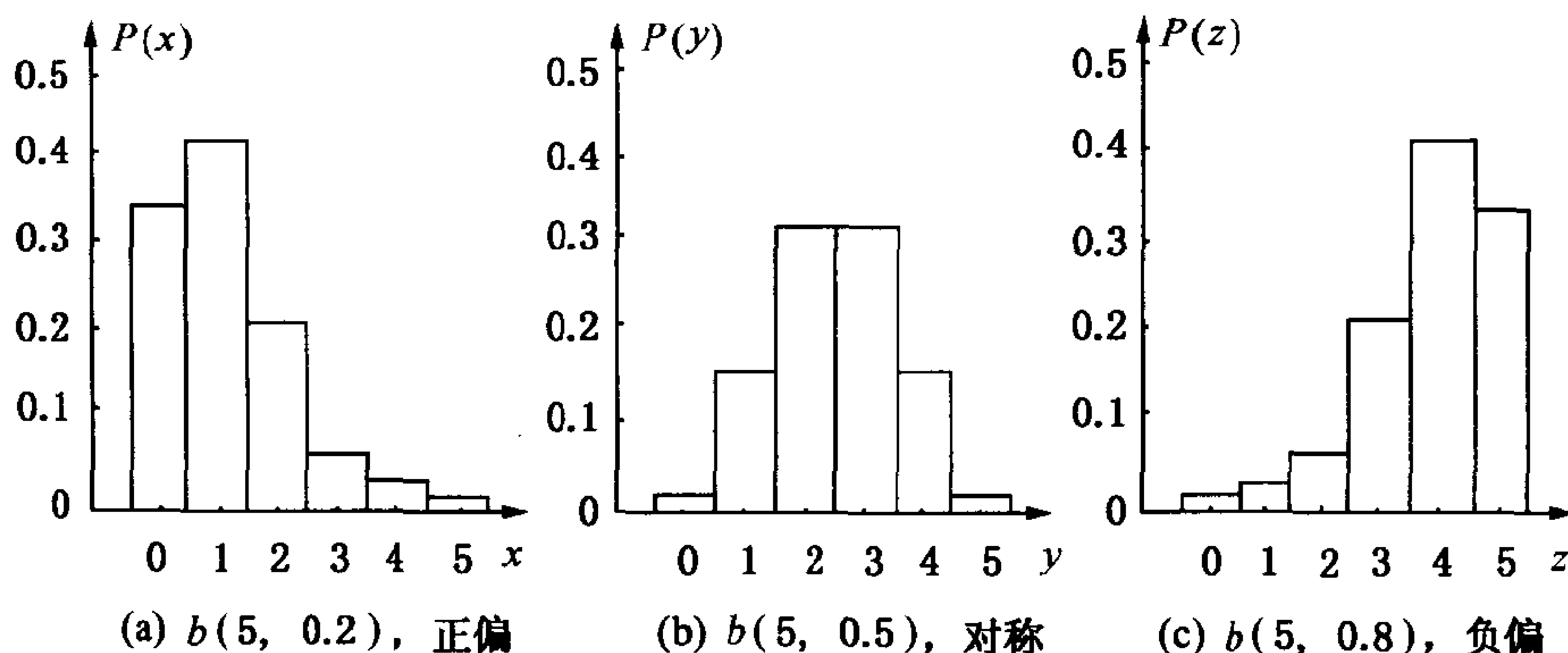
容易算出，各人打靶的平均命中次数依次为

$$E(X)=1, \quad E(Y)=2.5, \quad E(Z)=4$$

由于丙的命中率最高，故其平均命中次数也最多，这里平均命中次数是指很多次打靶(每次打五发)的平均值。就某次打靶(各打五发)中丙的命中次数可能

会低于乙，甚至低于甲的命中次数。虽这种可能性较小，但仍可能发生。

最后，我们来比较这三个二项分布，它们虽都取 0，1，2，3，4，5 等六个值，但各分布取这些值的概率是不同的。表 2.2.2 列出这三个二项分布取值的概率。用这些概率可作出这三个二项分布的概率直方图（见图 2.2.3）。



(a) $b(5,\ 0.2)$，正偏　　(b) $b(5,\ 0.5)$，对称　　(c) $b(5,\ 0.8)$，负偏

图 2.2.3　二项分布的概率直方图

表 2.2.2　$n=5, p=0.2, 0.5, 0.8$ 的二项分布

取值	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.3277	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.0003
$p(y)$	0.0312	0.1563	0.3125	0.3125	0.1563	0.0312
$p(z)$	0.0003	0.0064	0.0512	0.2048	0.4096	0.3277

从图 2.2.3 可以看出，当 $p=0.5$ 时，由于$\binom{n}{n-y}=\binom{n}{y}$，故有 $p(y)=p(n-y)$，这意味着此种二项分布的概率直方图是对称的，如图 2.2.3(b)所示，当 $p\neq 0.5$ 时，相应二项分布的概率直方图是不对称的，呈偏态状，且带有长尾巴，当 $p<0.5$（如 $p=0.2$）时，尾巴在右边，此时称为正偏，如图 2.2.3(a)所示；当 $p>0.5$（如 $p=0.8$）时，尾巴在左边，此时称为负偏，如图 2.2.3(c)所示，概率直方图的形状给我们研究二项分布会带来一些重要信息。

例 2.2.9　甲、乙两棋手约定进行 10 盘比赛，以赢的盘数较多者胜，设在每盘中甲赢的概率为 0.6，乙赢的概率为 0.4，在各盘比赛相互独立的假设下甲胜、乙胜和不分胜负的概率各为多少？

解：这里可把每下一盘棋看作一次贝努里试验，甲赢看作成功，则成功概率为 0.6，若记 X 为 10 盘棋赛中甲赢的盘数，则 $X\sim b(10,0.6)$。按约定，甲只要赢 6 盘或 6 盘以上即可得胜。所以

$$P(\text{甲胜})=P(X\geqslant 6)=\sum_{x=6}^{10}\binom{10}{x}0.6^x 0.4^{10-x}$$

类似地分析，有

$$P(\text{不分胜负})=P(X=5)=\binom{10}{5}0.6^5 0.4^5$$

$$P(\text{乙胜})=P(X\leqslant 4)=\sum_{x=0}^{4}\binom{10}{x}0.6^x 0.4^{10-x}$$

完成上述计算可以直接计算每个 x 对应的概率 $P(X=x)$，也可利用附表 1 给出的**二项分布表**。该表对 x 为非负整数，$n=2(1)20$，$p=0.05(0.05)0.95$ 给出二项分布函数值

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{k=0}^{x}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad x=0,1,\cdots,n$$

譬如，当 $n=10$，$p=0.6$ 时，从表中可查得

$$P(x\leqslant 4)=\sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}0.6^k(1-p)^{10-k}=0.1662$$

$$P(x\leqslant 5)=\sum_{k=0}^{5}\binom{10}{k}0.6^k(1-p)^{10-k}=0.3669$$

利用这两个值可算得

$$\begin{aligned}P(X=5)&=P(X\leqslant 5)-P(X\leqslant 4)\\&=0.3669-0.1662=0.2007\\P(X\geqslant 6)&=1-P(X\leqslant 5)\\&=1-0.3669=0.6331\end{aligned}$$

由此我们得到结论是：甲胜的概率为 0.6331，乙胜的概率为 0.1662，甲乙之间不分胜负的概率为 0.2007，可见二项分布表可帮助我们迅速无误地完成计算，我们应尽量利用它，但对表中没有列出的值仍需直接计算完成。

例 2.2.10 某厂需要 12 只集成电路装配仪表，要到外地采购。已知该型号集成电路的不合格品率为 0.1，问需要采购几只才能以 99%的把握保证其中合格的集成电路不少于 12 只？

解：设 n 为采购数量，X_n 为 n 块集成电路中不合格品个数，按题意，要求 $n-X_n\geqslant 12$，或 $X_n\leqslant n-12$，其概率

$$P(X_n\leqslant n-12)=\sum_{k=0}^{n-12}\binom{n}{k}0.1^k 0.9^{n-k}$$

若取 $n=15$，由附表 1 查得 $P(X_{15}\leqslant 3)=0.9444$，尚未达到 99%的把握。再对 $n=16$ 和 17 进行类似查表计算，得

$$P(X_{16}\leqslant 4)=0.9830$$
$$P(X_{17}\leqslant 5)=0.9953$$

可见，需采购 17 只集成电路才能以 99%的把握保证其中合格的集成电路不少于 12 只。

2.2.4 泊松分布

在历史上泊松分布是作为二项分布的近似，于 1837 年由法国数学家泊松(Poisson S. D. 1781～1840)首次提出，以后发现，很多取非负整数的离散随机变量都服从泊松分布，这里仍按历史发展次序来介绍泊松公布。

在二项分布 $b(n,p)$ 中，若相对地说，n 大，p 小，而乘积 $\lambda=np$ 大小适中时，二项分布中诸概率有一个很好的近似公式。这就是著名的泊松定理。

定理 2.2.1(泊松定理) 在 n 重贝努里试验中，以 p_n 表示在一次试验中成功发生的概率。且随着 n 增大，p_n 在减小。若 $n\to\infty$时有 $\lambda_n=np_n\to\lambda$(正数)，则出现 x 次成功的概率

$$\binom{n}{x}p_n^x(1-p_n)^{n-x}\to\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\quad(n\to\infty)$$

证：由 $p_n=\lambda_n/n$，可得

$$\begin{aligned}&\binom{n}{x}p_n^x(1-p_n)^{n-x}\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x}\\&=\frac{\lambda_n^x}{x!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x}\end{aligned}$$

对固定的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x}=e^{-\lambda}$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p_n^x(1-p_n)^{n-x}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

就证明了本定理。

由于泊松定理是在 $np_n\to\lambda(n\to\infty)$条件下获得的，故在使用中要求 n 大，

p 小，而 np_n 适中，此时有如下近似公式

$$\binom{n}{x} p_n^x(1-p_n)^{n-x} \doteq \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \tag{2.2.7}$$

其中 λ 就取 np_n。

例 2.2.11 在 500 人组成的团体中，恰有 k 个人的生日是在元旦的概率是多少？

解：在该团体中每个人的生日恰好在元旦的概率为 $p=1/365$，则该团体中生日为元旦的人数 $X \sim b(500,1/365)$。即

$$P(X=k)=\binom{500}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(1-\frac{1}{365}\right)^{500-k}$$

$$k=0,1,\cdots,500$$

这个概率计算是复杂的，但为了比较，仍对 $k=0,1,\cdots,6$ 进行计算，然后再用近似公式(2.2.7)计算，其中 $\lambda=500/365=1.3699$。两者结果都列在表 2.2.3 上。

从表 2.2.3 可见，两者的差别都在第四位小数上才显示出来，其近似程度是相当好的。

表 2.2.3 二项分布与泊松近似的比较

k	$\binom{500}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(1-\frac{1}{365}\right)^{500-k}$	$\frac{(1.3699)^k}{k!}e^{-1.3699}$
0	0.2537	0.2541
1	0.3484	0.3481
2	0.2388	0.2385
3	0.1089	0.1089
4	0.0372	0.0373
5	0.0101	0.0102
6	0.0023	0.0023
$\geqslant 7$	0.0006	0.0006

泊松分布 泊松定理中的泊松概率 $\lambda^x e^{-\lambda}/x!$ 对一切非负整数 x 都是非负的，且其和恰好为 1，因为

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

这样一来，泊松概率的全体组成的一个概率分布，称为泊松分布，记为 $P(\lambda)$，若随机变量 X 服从泊松分布，即 $X \sim P(\lambda)$，这意味着，X 仅取 $0,1,2,\cdots$ 等一切非负整数，且取这些值的概率为

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,\cdots$$

其中参数 $\lambda>0$,它的数学期望容易算得,

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}x\cdot\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda$$

这表明:**泊松分布 $P(\lambda)$的数学期望就是参数** λ。

泊松分布是常用的离散分布之一,现实世界中有很多随机变量都可直接用泊松分布描述,它们之间的差别表现在不同的 λ 上。下面是国内外文献上认可的服从或近似服从泊松分布的随机变量的一些例子:

(1)在一定时间内,电话总站接错电话的次数;

(2)在一定时间内,在超级市场排队等候付款的顾客人数;

(3)在一定时间内,来到车站等候公共汽车的人数;

(4)在一定时间内,某操作系统发生故障的次数;

(5)在一个稳定的团体内,活到 100 岁的人数;

(6)一匹布上,疵点的个数;

(7)100 页书上,错别字的个数;

(8)一个面包上,葡萄干的个数。

从这些例子可以看出,泊松分布总与计数过程相关联,并且计数是在一定时间内、或一定区域内、或一特定单位内的前提下进行的。下面我们详细地研究第 1 个例子。

例 2.2.12 一项研究表明:电话总站一天内接错电话号码的次数 X 是一个服从泊松分布 $P(\lambda)$的随机变量(简称泊松变量)。对某电话总站连续观察 100 天,共发现 320 只电话接错号码,具体数据按接错次数多少整理在表 2.2.4的前两列上。其中 x 表示一天内接错次数,n_x 表示接错次数为 x 的天数。由此可算得接错次数为 x 的频率为 $P^*(x)=n_x/100$,它放在第 3 列上。最后一列是按 $\lambda=3.2$ 算得的泊松概率 $p(x)=3.2^xe^{-3.2}/x!$。比较表上的最后两列可以看出:这组泊松概率 $p(x)$对这组观察频率 $p^*(x)$的拟合程度是很好的(在统计部分将进一步说明此种拟合程度)。

在实际中,人们常把在一次试验中出现概率很小(如小于 0.05)的事件称为**稀有事件**。由二项分布的泊松近似可以得到:n 重贝努里试验中稀有事件出现次数近似服从泊松分布。下面的例子说明这个现象。

表 2.2.4　接错次数的观察频率与泊松概率

接错次数 x	观察天数 n_x	观察频率 $p^*(x)=n_x/100$	泊松概率 $p(x)=3.2^x e^{-3.2}/x!$
0	5	0.05	0.041
1	12	0.12	0.130
2	19	0.19	0.209
3	24	0.24	0.223
4	18	0.18	0.178
5	13	0.13	0.114
6	5	0.05	0.060
7	2	0.02	0.028
8	1	0.01	0.011
9	1	0.01	0.004
10	0	0.00	0.002
	100	1.00	1.000

例 2.2.13　为保证设备正常工作，需要配一些维修工，若各台设备发生故障是相互独立的，且每台设备发生故障的概率都是 0.01。若有 n 台设备，则 n 台设备中同时发生故障的台数 X 服从二项分布 $b(n,0.01)$，由于 $p=0.01$ 很小，故“每台设备发生故障”可看作稀有事件，故 X 又可近似看作服从泊松分布 $P(\lambda)$，其中 $\lambda=np=n\times0.01$。下面用此看法来讨论几个问题。

(1)P 若用一名维修工负责维修 20 台设备，求设备发生故障而不能及时维修的概率是多少？

设 X_1 为 20 台设备中同时发生故障的台数，则 $X_1\sim b(20,0.01)$。由于稀有事件之故，可认为 $X_1 \stackrel{\cdot}{\sim} P(\lambda_1)$，其中 $\lambda_1=20\times0.01=0.2$，这里符号 $\stackrel{\cdot}{\sim}$ 表示“近似服从”。于是 20 台设备中因故障得不到及时维修只在同时有 2 台和 2 台以上发生故障时才会出现。故所求概率

$$\begin{aligned}P(X_1\geqslant2)&=\sum_{x=2}^{\infty}\frac{0.2^x}{x!}e^{-0.2}\\&=1-e^{-0.2}-0.2e^{-0.2}\\&=0.0175\end{aligned}$$

这表明，一名维修工负责维修 20 台设备时，因同时发生故障得不到及时维修的概率不到 0.02。

(2)若用三名维修工负责维修 80 台设备，求设备发生故障而不能及时维

修的概率是多少？

设 X_2 为 80 台设备中同时发生故障的台数，则 $X_2 \sim b(80, 0.01)$。类似地可认为，$X_2 \dot{\sim} P(\lambda_2)$，其中 $\lambda_2 = 80 \times 0.01 = 0.8$，于是

$$P(X_2 \geqslant 4) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{0.8^k}{k!} e^{-0.8} = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{0.8^k}{k!} e^{-0.8}$$

上述概率可以直接算得。这里可查**泊松公布表**获得，附表 2 对 x 为非负整数和 $\lambda = 0.02(0.02)0.10(0.05)1.0(0.1)2.0(0.2)8(0.5)15(1)25$ 给出泊松分布函数值。

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

如 $\lambda = 0.8, x = 3$ 时，可查得

$$P(x_2 \leqslant 3) = \sum_{k=0}^{3} \frac{0.8^k}{k!} e^{-0.8} = 0.991$$

利用这个值可算得

$$P(x_2 \geqslant 4) = 1 - P(X_2 \leqslant 3) = 0.009$$

这表明，三名维修工负责维修 80 台设备时，因同时发生故障得不到及时维修的概率为 0.009，几乎为前面的 0.0175 的一半，提高了效率。

(3)若有 300 台设备，需要配多少名维修工，才能使得不到及时维修的概率不超过 0.01。

设 X_3 为 300 台设备中同时发生故障的台数，N 为所需配的维修工的人数，类似地可认为 $X_3 \dot{\sim} P(\lambda_3)$，$\lambda_3 = 300 \times 0.01 = 3$。于是 N 应满足下列等式：

$$P(X_3 \geqslant N+1) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \leqslant 0.01$$

或

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \geqslant 0.99$$

从附表 2 查得，当 $N=7$ 和 8 时，有

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 0.988$$

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 0.996$$

故 $N=8$ 时满足要求，即要用 8 名维修工才能使 300 台设备得不到及时维修

的概率不超过 0.01。

*2.2.5 超几何分布

从一个有限总体中进行不放回抽样常会遇到超几何分布。

设有 N 个产品组成的总体，其中含有 M 个不合格品。若从中随机不放回地抽取 n 个，则其中含有不合格品的个数 X 是一个离散随机变量。假如 $n\leqslant M$，则 X 可能取 $0,1,\cdots,n$；若 $n>M$，则 X 可能取 $0,1,\cdots,M$。由古典方法容易算得（见例 1.6）

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$x=0,1,\cdots,r \tag{2.2.8}$$

其中 $r=\min(n,M)$，由组合等式

$$\sum_{x=0}^{r}\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}=\binom{N}{n}$$

可以看出，上述概率之和为 1，即 $\sum_{x=0}^{r}P(X=x)=1$。故(2.2.8)所示的一组概率构成一个概率分布，这个分布称为**超几何分布**，它含有三个参数 N，M 和 n，记为 $h(n,N,M)$。

例 2.2.14 20 个产品中有 5 个不合格品，若从中随机取出 8 个，试求其中不合格品数 X 的概率分布。

解：按题意有 $N=20$，$M=5$，$n=8$。由(2.2.8)可算得

$$P(X=0)=\frac{\binom{15}{8}}{\binom{20}{8}}=\frac{6435}{125970}=0.0511$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{15}{7}}{\binom{20}{8}}=\frac{32175}{125970}=0.2554$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{6}}{\binom{20}{8}}=\frac{50050}{125970}=0.3973$$

类似地可算得 $X=3,4,5$ 的概率，现都罗列于下

X	0	1	2	3	4	5
P	0.0511	0.2554	0.3973	0.2384	0.0542	0.0036

这就是 X 的分布。由此分布可算得各种事件的概率，譬如，不合格品不多于 3 个的概率为

$$\begin{aligned}P(X\leqslant 3)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\\&=0.0511+0.2554+0.3973+0.2384=0.9424\end{aligned}$$

若设 $X\sim h(N,M,n)$，则其数学期望为

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{x=0}^{r}x\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}\\&=\frac{nM}{N}\sum_{x=1}^{r}\frac{\binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}}=\frac{nM}{N}\end{aligned}$$

当 $n<<N$（即抽取个数 n 远小于产品总数 N）时，每次抽取后，总体中的不合格品率 $p=M/N$ 改变甚微，这时不放回抽样（见例 1.2.2）可近似看作放回抽样（见例 1.2.3），这时超几何分布可用二项分布近似。

§2.3　连续随机变量

2.3.1　连续随机变量的概率密度函数

连续随机变量的一切可能取值是充满某个区间 (a,b)，在这个区间内有无穷不可数个实数。因此描述连续随机变量的概率分布不能再用分布列形式表示，而要改用概率密度函数表示。下面结合新生婴儿重量来介绍这个重要概念。

例 2.3.1　新生婴儿重量 X 是一个连续随机变量。假设称重时的记录是以市斤为单位作近似表示。这时 X 可能取 3,4,5,…等值。这些值之间的间隔都是 1，记为 $\Delta x=1$。这样的 X 可近似看作离散随机变量，可用图 2.3.1(a)上的概率直方图近似表示 X 的概率分布，其中每个矩形面积就是 X 取相应值的

概率。这些概率是对很多个(如:十万个)新生婴儿重量用统计方法确定的,从该图上可以表示:

(1)矩形的高=概率 $P(X=x)$/矩形的宽=$P/\Delta x$。这意味着图 2.3.1(a)的纵坐标不是概率 P,而是 $P/\Delta x$。即区间长度为 Δx 上的平均概率。

(2)所有矩形面积之和为 1。

(3)重量在 6 到 8 市斤的概率就是相应 6,7,8 的三个矩形面积之和。

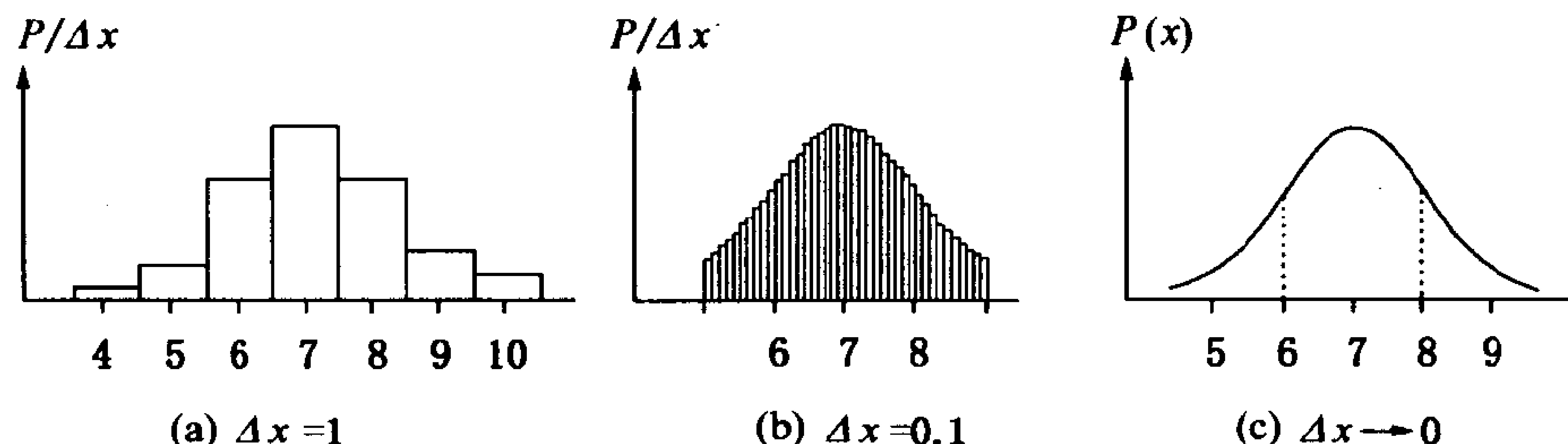


图 2.3.1　新生婴儿重量 X 的概率分布

为了改善上述的近似程度,现假设称重时的记录近似到 0.1 市斤。这时 X 可能取 3.5,3.6,5.7,7.4,8.9 等值。相邻值之间的间隔都是 0.1,即 $\Delta x=0.1$。这样的 X 仍可近似看作离散随机变量,其概率直方图(见图 2.3.1(b))是由更多更窄的矩形相联而成,其顶部要比(a)图光滑一些。每个窄长矩形面积(概率)仍可用统计方法确定。同样从图上可看出:

(1)窄长矩形的高=$P/\Delta x$,仍为区间(长度为 $\Delta x=0.1$)上的平均概率。由于 Δx 缩小了 10 倍,相应概率可能缩小 10 倍,但也可能缩小倍数比 10 倍多或比 10 倍少,这表明近似程度在改善,向精确化前进了一步。

(2)所有窄长矩形面积之和为 1。

(3)重量在 6 到 8 市斤的概率就是介于其间 21 个窄长矩形面积之和。

为了从近似走向精确,我们让 Δx 取 0.01,0.001,0.0001,…这时组成概率直方图的矩形愈来愈多,愈来愈窄,它的顶端愈来愈光滑,但上述三个特点仍然保留,只不过重量界于 6 到 8 市斤的概率要用更多更窄的矩形计算,结果就更为精确。当 $\Delta x\to 0$ 时,上述概率直方图序列就趋向于一条曲线。若用 $p(x)$ 表示这条曲线(见图 2.3.1(c)),则 $p(x)$ 仍有如下特点:

(1)$p(x)$ 总位于 x 轴的上方,函数值 $p(x)$ 不是概率,而是区间长度 $\Delta x\to 0$ 时平均概率 $P/\Delta x$ 在点 x 处的极限值,这是一种特殊密度——概率密度。它表明:对任意两点 x_1 与 x_2,若 $p(x_1)>p(x_2)$,则 X 在 x_1 附近取值的机会比在

x_2 附近取值的机会大。

(2)曲线 $p(x)$与 x 轴所夹面积为 1。

(3)重量界于 6 到 8 市斤的概率是该曲线 $p(x)$界于 6 到 8 之间的曲边梯形的面积(见图 2.3.1(c)),这可用定积分表示,

$$P(6 \leqslant x \leqslant 8)=\int_{6}^{8} p(x) d x$$

这样我们就完成了从近似到精确的过渡。所得到的 $p(x)$就是连续随机变量 X 的概率分布。它可用来精确计算有关 X 的一切事件的概率,这样的函数 $p(x)$将称为概率密度函数。什么样的函数可以称为概率密度函数呢?什么样的概率密度函数可用来描述某个连续随机变量 X 的概率分布呢?下面的定义说明了这两个问题。

定义 2.3.1 设 $p(x)$是定义在整个实数轴上的一个函数,假如它满足如下二个条件:

(1)$p(x) \geqslant 0$ (非负) (2.3.1)

(2)$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) d x=1$ ($p(x)$与横轴所夹面积为 1) (2.3.2)

则称 $p(x)$为**概率密度函数**,或**密度函数**,有时还简称**密度**。

假如密度函数 $p(x)$与连续随机变量 X 有如下关系:

(3)对任意两个实数 a 与 b,其中 $a<b$,且 a 可为 $-\infty$,b 可为 $+\infty$,X 在区间$[a,b]$上取值的概率为曲线 $p(x)$在该区间上曲边梯形的面积,即

$$P(a \leqslant X \leqslant b)=\int_{a}^{b} p(x) d x \qquad (2.3.3)$$

则称密度函数 $p(x)$为连续随机变量 X 的概率分布,或简称 $p(x)$为 X 的密度函数,记为 $X \sim p(x)$,读作"X 服从密度 $p(x)$"。

下面结合例子来叙述连续随机变量的两个常用分布:均匀分布与指数分布。

例 2.3.2(均匀分布) 某办事员处理一份护照申请书所需的时间 X(单位:分)是一个连续随机变量。假设 X 的密度函数有如下形式

$$p(x)=\begin{cases}c, & 4 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

这表明:该办事员在处理一份护照申请书至少需要 4 分钟,最多需要 6 分钟,由于 $p(x)$中的 c 是待定常数,为了使它成为 X 的密度函数,按定义 2.3.1,必需要

(1)$p(x) \geqslant 0$,在这里要求 $c \geqslant 0$。

(2) $\int_4^6 p(x)dx = 1$，在这里要求 $c(6-4)=1$，即 $c=0.5$。当 c 用 0.5 代替后，密度函数 $p(x)$ 的图形如图 2.3.2 所示。

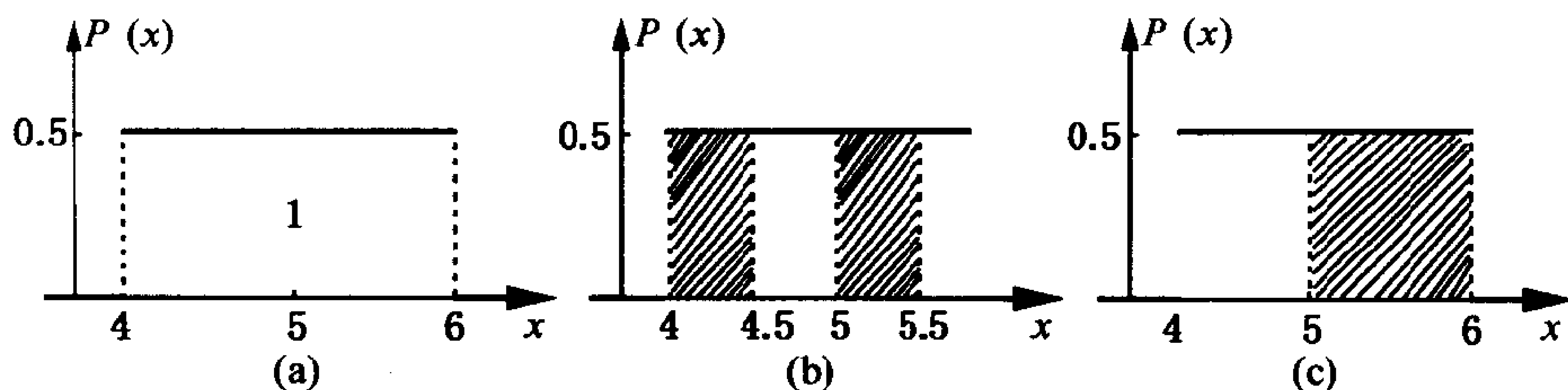


图 2.3.2　在区间[4,6]上的均匀分布

现转入寻求该办事员在 4 到 4.5 分、5 到 5.5 分、5 到 6 分之内处理一份申请书的概率。这些概率就是图 2.3.2(b)和(c)上的几块阴影面积。由于它们都是矩形，这些概率很容易求得

$$P(4\leqslant X\leqslant 4.5)=0.5(4.5-4)=0.25$$

$$P(5\leqslant X\leqslant 5.5)=0.5(5.5-5)=0.25$$

$$P(5\leqslant X\leqslant 6)=0.5(6-5)=0.5$$

从图 2.3.2(b)上可以看出，底边相等的二个矩形面积总是相同的，从而 X 在这两个小区间上取值的机会是相同的。这就是"均匀"的含义，并称此分布为均匀分布。一般地，在有限区间$[a,b]$上为常数，在此区间外为零的密度函数$p(x)$都称为均匀分布，并记为 $U(a,b)$，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{2.3.4}$$

这样一来，本例中的均匀分布可用 $U(4,6)$表示，记为 $X\sim U(4,6)$，读作 X 服从区间[4,6]上的均匀分布。

均匀分布在实际中常使用，譬如一个半径为 r 的汽车轮胎，当司机使用刹车时，轮胎接触地面的点要受很大的力，并借用惯性还要向前滑动(不是滚动)一段距离，故这点会有磨损。假如把轮子的圆周标以从 0 到 $2\pi r$，那末刹车时接触地面的点的位置 X 是服从区间$[0,2\pi r]$上的均匀分布，即 $X\sim U(0,2\pi r)$。因为刹车时接触地面的点在轮子的那一个位置上可能性更大一些是说不出的，而在$(0,2\pi r)$上任一个等长的小区间上发生磨损的可能性是相同的，这只要看一看报废轮胎的四周磨损量几乎是相同的就可明白均匀分布的含义了。

例 2.3.3(指数分布)　用如下指数函数表示的密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{2.3.5}$$

称为指数分布，记为 Exp(λ)。其中 λ 是根据实际背景而定的正参数。假如某连续随机变量 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，则表示 X 仅可能取非负实数。实际中不少产品首次发生故障(需要维修)的时间服从指数分布。譬如，某种热水器首次发生故障的时间 T(单位：小时)服从指数分布 Exp(0.002)，即 T 的密度函数(图 2.3.3)为

$$p(t)=\begin{cases}0.002e^{-0.002t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

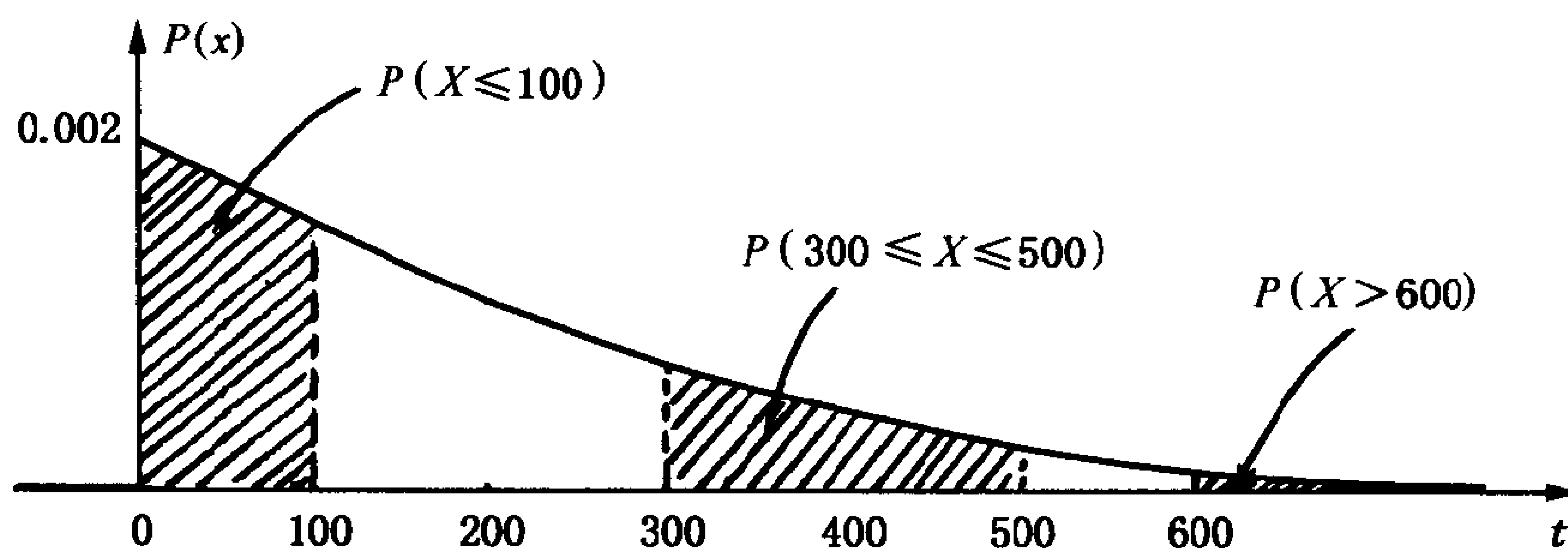


图 2.3.3　指数分布 Exp(0.002)的密度曲线

现转入寻求一些事件的概率。在上述假设下，该种热水器在 100 小时内需要维修的概率是多少？在 300 到 500 小时内需要维修的概率是多少？在 600 小时后需要维修的概率是多少？这些概率分别是图 2.3.3 上三块阴影面积。具体计算如下：

$$\begin{aligned}P(X\leqslant 100)&=\int_{-\infty}^{100}p(x)dx=\int_{0}^{100}0.002e^{-0.002t}dt\\&=-e^{-0.002t}\Big|_{0}^{100}=1-e^{-0.2}\\&=0.1813\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(300\leqslant X\leqslant 500)&=\int_{300}^{500}0.002e^{-0.002t}dt\\&=-e^{-0.002t}\Big|_{300}^{500}=e^{-0.6}-e^{1.2}\\&=0.1809\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X<600)&=\int_{600}^{\infty}0.002e^{-0.002t}dt\\&=-e^{-0.002t}\Big|_{600}^{\infty}=e^{-1.2}\\&=0.3012\end{aligned}$$

2.3.2 连续随机变量的分布函数

按分布函数定义(见定义 2.1.2),连续随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可以用其密度函数 $p(x)$ 表示出来,即对任意实数 x,

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \tag{2.3.6}$$

这些积分总是存在的,其中有些可以积出来,用初等函数表示,有的积不出来,只能用积分表示,或用特殊函数表示。

例 2.3.4(均匀分布和指数分布的分布函数) 在区间$[a,b]$上的均匀分布的密度函数 $p(x)$ 如(2.3.4)式所示。再利用积分(2.3.6)式不难获得均匀分布 $U(a,b)$ 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{2.3.7}$$

在进行积分时要分三段进行,因为 $p(x)$ 有两个间断点,且分三段表示的,图 2.3.4 给出了均匀分布$U(a,b)$的 $p(x)$ 与 $F(x)$,从图上可见,这里的 $F(x)$ 虽分三段表示,但接点仍头尾相联,使 $F(x)$ 是一个连续函数。

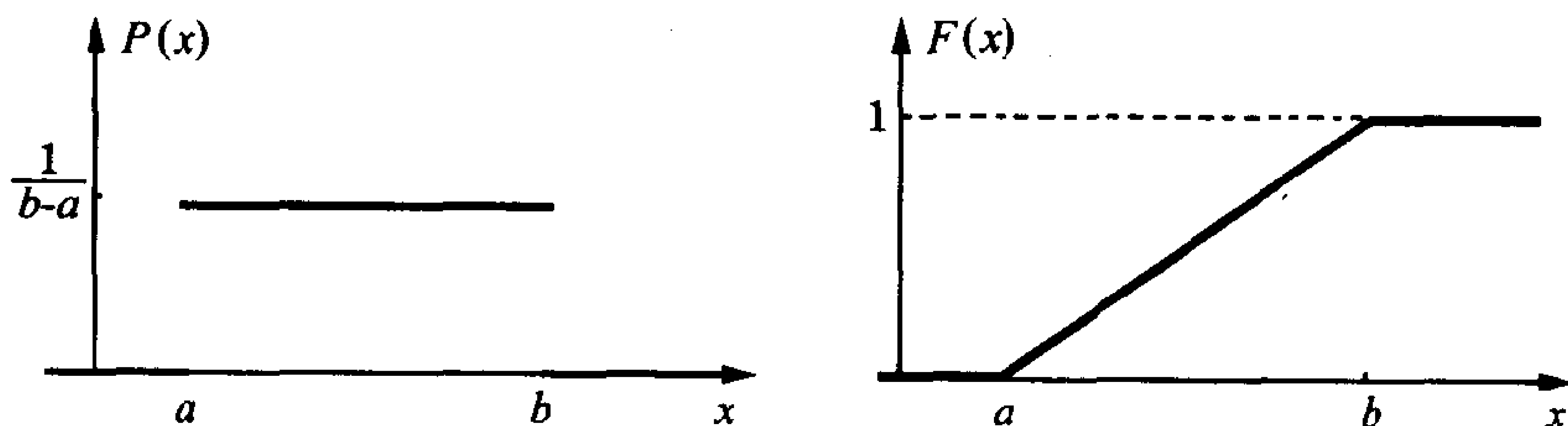


图 2.3.4 均匀分布 $U(a,b)$ 的密度函数 $p(x)$ 和分布函数 $F(x)$

指数分布 Exp(λ) 的分布函数亦可从(2.3.6)式求得。由密度函数(2.3.5),分两段积分,即可得

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

图 2.3.5 给出了指数分布 Exp(λ) 的 $p(x)$ 与 $F(x)$ 的图形。从图上看,$p(x)$ 有一个间断点,但 $F(x)$ 仍是连续函数。

下面我们来讨论连续随机变量分布函数的一些性质。

(1) 连续随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是直线上的连续函数。

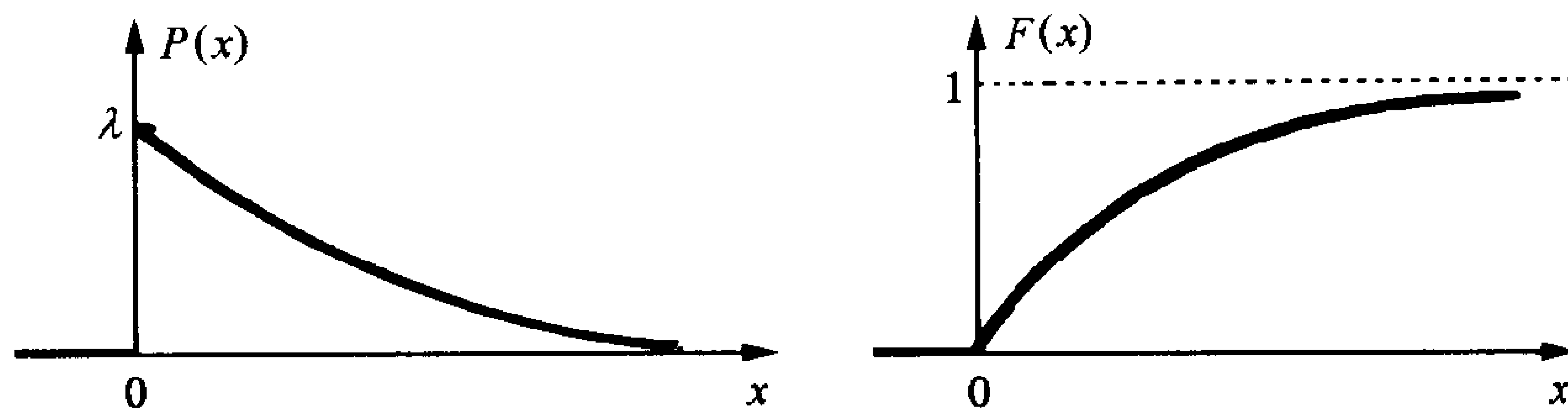


图 2.3.5　指数分布 Exp(λ) 的密度函数 P(x) 和分布函数 F(x)

证：对直线上任一点 x 及其一个增量 Δx，分布函数 $F(x)$ 的增量为

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} p(x)dx$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，上式右端的积分趋向于零，从而 $\Delta F \to 0$。这表明 $F(x)$ 在点 x 处连续，由于 x 是直线上任一点，故 $F(x)$ 是直线上的连续函数。

这个性质与我们在例 2.3.4 中看到的现象一致，连续随机变量的名称也由此而得。

(2) 连续随机变量 X 仅取一点的概率为零，即 $P(X=x)=0$。

证：对直线上任一点及其一个增量 Δx，X 仅取一点的概率可表示为下述概率的极限

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \lim_{\Delta x \to 0} P(x \leqslant X \leqslant x+\Delta x) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \int_x^{x+\Delta x} p(x)dx = 0 \end{aligned}$$

在概率论中，概率为零的事件称为**零概率事件**。它与不可能事件 ϕ 还是有差别的，不可能事件 ϕ 是零概率事件。但零概率事件不全是不可能事件。譬如在连续随机变量中，事件"$X=x$"是零概率事件，但这并不意味着事件"$X=x$"是不可能事件。因为连续随机变量取任何一点都是有可能发生的。同样，必然事件的概率为 1(公理 2)，但概率为 1 的事件不全是必然事件。在概率论中把概率为 1 的事件称为**几乎必然发生的事件**。认识到这些可使我们对事件与概率的认识更进一步。

由性质(2) 立即可得下列性质。

(3) 对连续随机变量 X 和任意实数 a 与 $b(a<b)$，有

$$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a \leqslant X < b) \\ &= P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b) \end{aligned}$$

这个性质表明，在计算连续随机变量 X 有关事件概率时，增加和减少一点或数点可不予以计较。这对以后概率计算和事件表示带来方便。

(4) 设 $F(x)$ 和 $p(x)$ 分别是连续随机变量 X 的分布函数和密度函数，则在 $F(x)$ 导数存在的点 x 上有

$$F'(x)=p(x) \tag{2.3.8}$$

证：这可从 $F(x)$ 的积分表达式(2.3.6)看出。

这个性质表明，对连续随机变量 X 而言，当已知其分布函数 $F(x)$ 时，用导数可求得其密度函数 $p(x)$，对 $F(x)$ 导数不存在的那些点上，$p(x)$ 可任意给定常数，因为在有限个点上改变密度函数值不会影响相应分布函数值。譬如，均匀分布 $U(a,b)$ 的分布函数 $F(x)$（见(2.3.7)式）在点 a 和点 b 处是不可导的，于是相应的密度函数 $p(x)=F'(x)$ 在点 a 和点 b 处没有定义，这时可在点 a 和点 b 处对 $p(x)$ 任意给定两个常数即可，因为 X 取这两点的概率皆为零，不会影响任何事件的概率计算。在(2.3.4)式中给出 $p(x)$ 的一种形式，也可如下给出

$$p_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad p_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

它们仅在点 a 或点 b 处不等，而 X 取这两点的概率皆为零。或者说 $p_1(x)\neq p_2(x)$ 的概率为0，即

$$P\{x:p_1(x)\neq p_2(x)\}=P(X=a)+P(X=b)=0$$

或者说 $p_1(x)=p_2(x)$ 的概率为1，即

$$P\{x:p_1(x)=p_2(x)\}=1$$

这种意义下的两个函数相等在概率论中称为**几乎处处相等**，以示区别微积分中的两个函数处处相等（即恒等）。在概率论中，几乎处处相等的两个函数之间的差别可忽略不计，从而可以相互替代。这种忽略零概率事件正是概率论这门学科的特色。在现实世界中要找到两件完全相同的东西是很难的，但要找两个几乎处处相同的东西就容易多了。

2.3.3 随机变量函数的分布

在理论研究和实际应用中经常会遇到这样的问题：已知随机变量 X 的概率分布，要求其某个函数 $g(X)$ 的概率分布，这个问题在离散场合较为容易处理，通过下面的例子就可说明清楚。

例 2.3.5 设 X 是仅可能取6个值的离散随机变量，其分布如下：

若设 $Y=2X+1$，则 Y 仍是离散随机变量，它可取 $-3,-1,1,3,5,7$ 等6个值。由于它们没有相同的，故 Y 取这些值的概率仍如上述，即 Y 的概率分布为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.05	0.15	0.20	0.25	0.20	0.15

$Y=2X+1$	-3	-1	1	3	5	7
P	0.05	0.15	0.20	0.25	0.20	0.15

若设 $Z = X^2$,虽 Z 仍是离散随机变量,但它可能取的 6 个值(4,1,0,1,4,9) 中出现相同的值,Z 取相同值的概率应合并起来,如 $P(Z=1)=P(X=1)+P(X=-1)=0.25+0.15=0.40$,这样我们可得 Z 的分布如下:

$Z=X^2$	0	1	4	9
P	0.20	0.40	0.25	0.15

从这个例子可以看出,在离散场合求随机变量函数的分布时,关键是把新变量取相同值的概率加起来,其它保持对应关系,即可得随机变量函数的分布。

在连续场合寻求随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布虽复杂一些,但利用分布函数及其性质,按一定步骤也是容易求得的,下面先看两个例子。

例 2.3.6 设 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 和 $a>0$,求 $Y=aX$ 的概率分布。

解:由于 X 是连续随机变量,$Y=aX$ 也是连续随机变量。如今已知 X 服从参数为 λ 的指数分布,其分布函数与密度函数分别是

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases} \qquad p_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

现要求 $Y=aX$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 或密度函数 $p_Y(y)$,为此分下面几步进行。

首先讨论 Y 的可能取值。由 X 不可能取负值,故 Y 也不可能取负值,所以我们有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=0, \quad 当\ y<0$$

其次对 $y\geqslant 0$,从分布函数定义出发,计算 $F_Y(y)$,考虑到 $a>0$,故有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P(aX\leqslant y)\\&=P(X\leqslant \frac{y}{a})=F_X(\frac{y}{a})\\&=1-e^{-\lambda y/a}\end{aligned}$$

综合上述,可得 Y 的分布函数。

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\lambda y/a}, & y\geqslant 0\end{cases}$$

最后,若有需要,可对 $F_Y(y)$ 求导,即得 Y 的密度函数

$$p_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{\lambda}{a}e^{-\lambda y/a}, & y\geqslant 0\end{cases}$$

这表明,当 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 时,$Y=aX(a>0)\sim \mathrm{Exp}(\lambda/a)$。

例 2.3.7 设 $X\sim U(0,1)$,求 $Y=-\ln X$ 的概率分布。

解:从例 2.3.2 知,均匀分布 $U(0,1)$ 的分布函数与密度函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}\qquad p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

大家知道,X 仅在 $(0,1)$ 上取值,故 $Y=-\ln X$ 只可能在 $(0,\infty)$ 上取值。所以当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=0$;而当 $y>0$ 时,我们有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P(-\ln X\leqslant y)\\&=P(\ln X\geqslant -y)=P(X\geqslant e^{-y})\\&=1-P(X<e^{-y})=1-F_X(e^{-y})\\&=1-e^{-y}\end{aligned}$$

综合上述,Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ 1-e^{-y}, & y>0\end{cases}$$

对其求导,立即得 Y 的密度函数

$$p_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ e^{-y}, & y>0\end{cases}$$

可见,当 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布时,$Y=-\ln X$ 将服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布,用分布符号表示即为:若 $X\sim U(0,1)$,则 $Y=-\ln X\sim \mathrm{Exp}(1)$。

上面两个例子对寻求随机变量函数分布的方法是有启发的,下面转入较为一般情形的讨论。

定理 2.3.1 设已知随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$ 和密度函数为 $p_X(x)$,又设 $Y=g(X)$,其中函数 $g(\cdot)$ 是严格单调函数,且导数 $g'(\cdot)$ 存在,则 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=p_X(h(y))|h'(y)| \qquad (2.3.9)$$

其中 $h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数,$h'(y)$ 是其导数。

证：由于 $Y=g(X)$ 是严格单调函数（严增函数或严减函数），故其反函数 $X=h(y)$ 存在。由 g 可导，从而 h 也可导。

为确定起见，先设 $g(X)$ 是 X 的严增函数，则有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y)$$
$$=P(X\leqslant h(y))=F_X(h(y))$$
$$p_Y(y)=p_X(h(y))\cdot h'(y) \tag{2.3.10}$$

如果 $g(X)$ 是严减函数，则事件"$g(X)\leqslant y$"等价于"$X\geqslant h(y)$"，所以在严减函数场合，我们有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y)$$
$$=P(X\geqslant h(y))=1-F_X(h(y))$$
$$p_Y(y)=-p_X(h(y))\cdot h'(y) \tag{2.3.11}$$

因为当 g 为严减函数时，其反函数 h 也是减函数，故 $h'(y)<0$。这样 $p_Y(y)$ 仍为非负的，综合(2.3.10)和(2.3.11)，可得定理的结论(2.3.9)。

应用定理2.3.1的关键在于写出反函数，找出反函数后，立即可写出随机变量函数的密度函数，譬如：

当 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 时，反函数 $h(Y)=(Y-b)/a$，$h'(y)=\dfrac{1}{a}$，于是 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}$$

当 $Y=-\ln X$ 时，反函数 $h(y)=e^{-y}$，$h'(y)=-e^{-y}$，于是 $Y=-\ln X$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=p_X(e^{-y})e^{-y}$$

在给出具体的 $p_X(x)$ 后，就可写出 $p_Y(y)$ 的表达式，大家可用例2.3.6和例2.3.7来验证这些结果。

例 2.3.8 设随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 是严增函数，则 $Y=F_X(X)$ 服从区间(0,1)上的均匀分布。

为了证明这个结论，首先要看到 $Y=F_X(X)$ 是在区间(0,1)上取值的随机变量，所以当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$，而当 $0<y<1$ 时，我们有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(F_X(X)\leqslant y)$$
$$=p(x\leqslant F_X^{-1}(y))$$
$$=F_X(F_X^{-1}(y))=y$$

综合上述，$Y = F_X(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ y, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geqslant 1 \end{cases}$$

这就是在区间 $(0,1)$ 上的均匀分布函数。

2.3.4 连续随机变量的数学期望

连续随机变量的数学期望的定义和含义完全类似于离散随机变量场合，只要在离散随机变量的数学期望定义（定义 2.2.2）中用密度函数 $p(x)$ 代替分布列 $\{p(x_i)\}$，用积分代替和式，就可把数学期望的定义从离散场合推广到连续场合。

定义 2.3.2 设连续随机变量 X 有密度函数 $p(x)$，如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx \tag{2.3.12}$$

有限，则称

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \tag{2.3.13}$$

为 **X 的数学期望**，简称**期望**，**期望值**或**均值**。如果积分（2.3.12）无限，则说 X 的数学期望不存在。

连续随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是在连续场合下的一种加权平均，权就是密度函数。假如 X 表示重量，则 $E(X)$ 表示平均重量；假如 X 表示价格，则 $E(X)$ 表示平均价格；假如 X 表示寿命，则 $E(X)$ 表示平均寿命。从分布观点看数学期望，则数学期望是分布的中心位置，它是分布的位置特征。假如已知某分布的数学期望为 5，则该分布大约在 5 附近散布着。

例 2.3.9（均匀分布的数学期望） 设随机变量 X 服从均匀分布，它的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

它的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

可见，均匀分布的数学期望位于区间$[a,b]$的中点。

例 2.3.10（指数分布的数学期望） 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，它的密度函数如(2.3.5)式所示。它的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_{0}^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx$$

利用分部积分法，可得

$$E(X)=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

可见，指数分布的数学期望为参数λ的倒数，譬如，某产品的寿命T（单位：小时）服从参数为$\lambda=0.002$的指数分布，则该产品的平均寿命$E(T)=\lambda^{-1}=(0.002)^{-1}=500$小时。

例 2.3.11 密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad -\infty<x<\infty$$

的分布称为**柯西分布**，其数学期望不存在。这是因为积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx$$

无限。

2.3.5 正态分布

连续随机变量的概率分布简称为连续分布。前面介绍的均匀分布$U(a,b)$和指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$就是两个常用的连续分布。下面将介绍另外三种常用的概率分布。这里先介绍正态分布。下面分几点叙述。

2.3.5.1 定义与背景

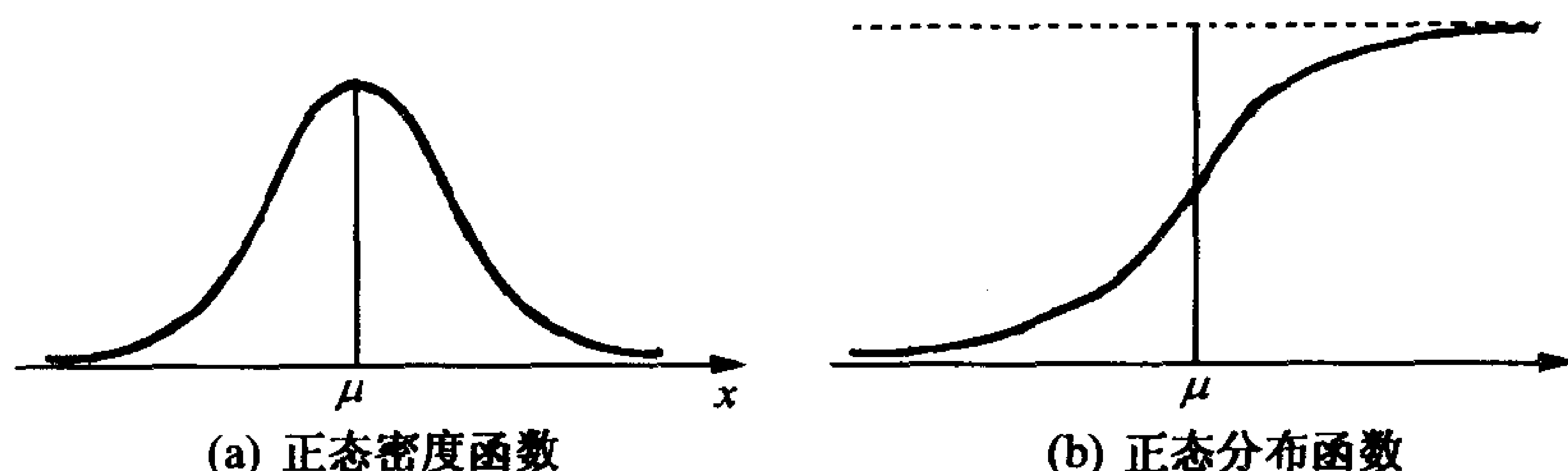
密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty \qquad (2.3.14)$$

的分布称为正态分布，其分布函数用如下积分表示

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,\quad -\infty<x<\infty \qquad (2.3.15)$$

它含有两个参数μ与σ：$-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$，常记为$N(\mu,\sigma^2)$。符号$X\sim N(\mu,\sigma^2)$表示随机变量$X$服从参数为$\mu$与$\sigma^2$的正态分布，此时，$X$又简称正态变量，$p(x)$图形又简称正态曲线（见图 2.3.6(a)），它是一条钟形曲线：中间高、二边低、左右对称，它的分布函数图形（见图 2.3.6(b)）是在$(-\infty,\infty)$上的连续上升曲线。



(a) 正态密度函数 (b) 正态分布函数

图 2.3.6 正态分布的密度函数与分布函数

由于正态曲线 $p(x)$ 总位于 x 轴上方，故 $p(x) > 0$。还可证明：$p(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的面积为 1，为此作变换 $t = (x-\mu)/\sigma$，则

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

若令 I 为上式右边的广义积分，则其平方为

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy$$

利用极坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2/2}drd\theta = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}dr = 2\pi$$

由此可得 $I = \sqrt{2\pi}$，代回原式即说明正态曲线确是密度函数。

2.3.5.2 正态分布的背景

正态分布在概率论与数理统计的理论与应用中都是最重要最常用的分布，这是因为

(1) 很多随机现象可以用正态分布描述或近似描述，譬如：

① 测量误差 ε 都是用正态分布描述的，测量误差 ε 是随机变量，时大时小、时正时负，不过误差大的机会少，误差小的机会大，正误差与负误差出现的机会没有理由认为是不等的，这些现象与正态曲线“中间高两边低左右对称”是完全吻合的，所以测量误差 ε 总认为是正态变量。

② 罐头自动包装线上的罐头重量 y 与标准重量 m 总有偏差 δ，此种 δ 也和测量误差 ε 类似，也是正态变量，以后会证明，一个常量与一个正态变量之和 $y = m + \delta$ 仍是正态变量，所以自动包装线上的罐头重量服从正态分布。

③ 大批制造的同一产品的尺寸：长度、宽度、高度、直径等分别都是服从正态分布的随机变量。

④ 同龄人的身高与体重分别都是正态变量。

⑤ 凡人的年收入可近似用正态分布描述，因为在凡人中年收入特大和特

小的居少，而中间状态居多。

⑥ 一个地区的年降雨量(单位 mm)是正态变量。

⑦ 超级市场在一周内售出的鸡蛋重量是正态变量。

⑧ 大公司职员一周内超时津贴是正态变量。

(2) 许多分布可用正态分布作近似计算，在第三章中的3.5.3将要叙述的二项分布的正态近似就是一例，在第三章的中心极限定理表明，在一定条件下，很多随机变量的叠加都可用正态分布近似。

(3) 从正态分布可导出一些有用分布，如统计中常用的三大分布：χ^2 分布、t 分布、F 分布都是从正态分布导出的。

可以说，概率论与数理统计的基础部分就是以正态分布为中心建立起来的。

2.5.3.3　**正态分布的数学期望**

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$。

证：在 $E(X)$ 的积分表达式中作变换 $z=(x-\mu)/\sigma$，可得

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+\mu)e^{-z^2/2}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-z^2/2}dz+\mu\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz\right]$$

由于上式右端第一个积分的被积函数为奇函数，故其积分为0，第二个积分恰为$\sqrt{2\pi}$，故得 $E(X)=\mu$。

这样我们就明确了正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的第一个参数 μ 的概率含义，它就是数学期望，至于第二个参数 σ 将在下一节介绍，这里先叙述其名称和概率含义。σ 称为标准差，它是表示正态分布在其期望值 μ 附近集中与分散的程度，σ 愈小，分布愈集中，正态曲线呈高而瘦；σ 愈大，分布愈分散，正态曲线呈矮而胖，详见图2.3.7，由此可见，正态分布由其期望值 μ 和标准差 σ 唯一确定，μ 决定其位置，σ 决定其散布大小。

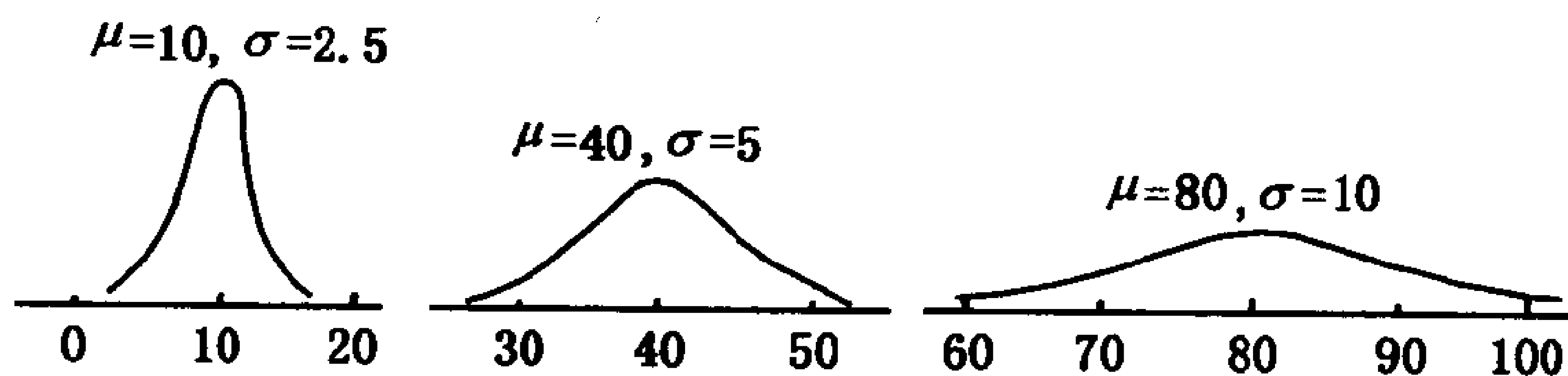


图 2.3.7　三种正态曲线

2.5.3.4　标准正态分布$N(0,1)$及其分布函数表

期望值为0和标准差为1的正态分布$N(0,1)$称为标准正态分布，相应的随机变量叫标准正态变量，常用U表示，其取值常用u表示，其密度函数用$\phi(u)$表示，分布函数用$\Phi(u)$表示，即

$$\phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2},\quad -\infty<u<\infty \tag{2.3.16}$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-x^2/2}dx,\quad -\infty<u<\infty \tag{2.3.17}$$

用变量替换法可以证明：对任意实数u，有

$$\Phi(-u)=1-\Phi(u) \tag{2.3.18}$$

此结论亦可从$\phi(u)$关于纵轴对称中直接看出(见图2.3.8)。

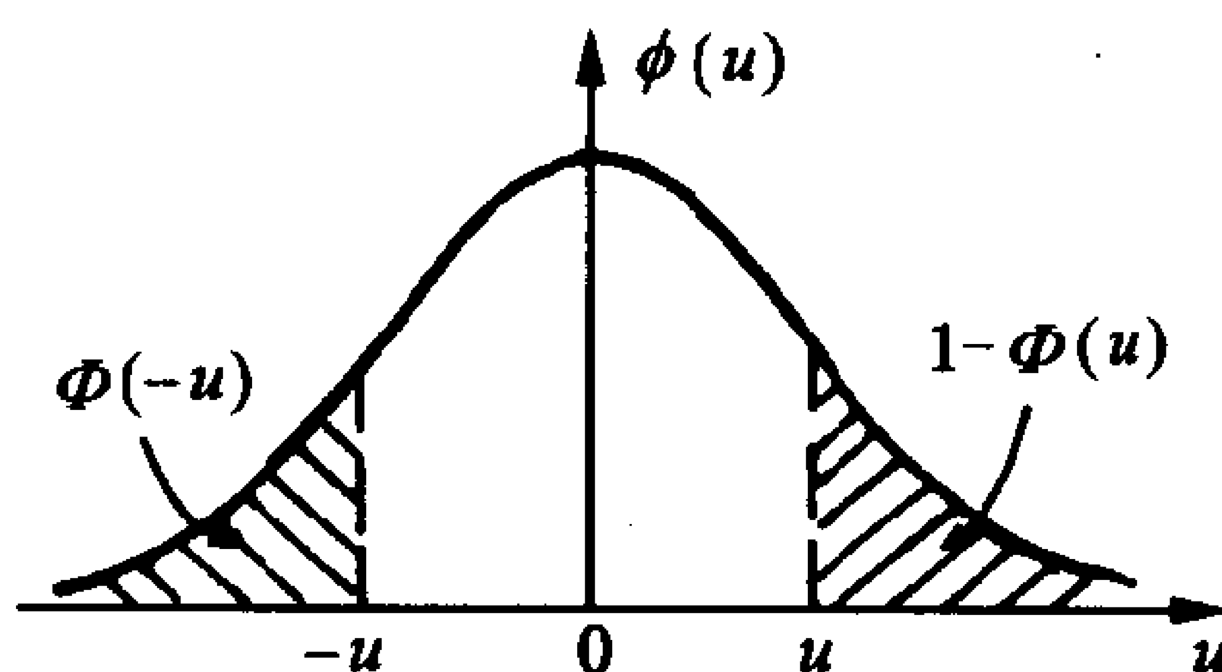


图2.3.8　$\Phi(-u)=1-\Phi(u)$

标准正态分布函数$\Phi(u)$是正态分布计算的基础。人们对$\Phi(u)$编制了函数值表，附表3对u从0至3.49及3.5,4,5,6列出了$\Phi(u)$的值，对负值可用(2.3.18)式算得，譬如：

$$\Phi(1)=0.8413,\qquad \Phi(1.64)=0.9495$$

$$\Phi(-0.83)=1-\Phi(0.83)=1-0.7967=0.2033$$

反之，若给定概率p，命$\Phi(u)=p$，则亦可从附表中查得相应的u值，譬如，命$\Phi(u)=0.99$，可从附表3中查得

$$\Phi(2.32)=0.9898,\qquad \Phi(2.33)=0.9901$$

用线性内插法可得$\Phi(2.327)=0.99$，故$u=2.327$。

2.5.3.5　正态变量的线性变换

利用定理2.3.1可知，当$X\sim N(\mu,\sigma^2)$时，$U=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的密度函数为

$$p_U(u)=p_X(\mu+\sigma u)\cdot\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}=\phi(u)$$

这表明，当$X\sim N(\mu,\sigma^2)$时，$U=(X-\mu)/\sigma$是标准正态变量，即$U\sim$

$N(0,1)$。

在概率论中，把随机变量X减去自己的均值μ，再除以自己的标准差σ，所得到新变量$U=(X-\mu)/\sigma$称为原变量X的标准化变换，或简称标准化。上述计算结果表明：任一正态变量经过标准化变换后都是标准正态变量。譬如在图2.3.9上，X_1与X_2是不同的两个正态变量，但经过各自的标准化后，$U_1=\dfrac{X_1-10}{2}$与$U_2=\dfrac{X_2-2}{0.3}$都是标准正态变量。

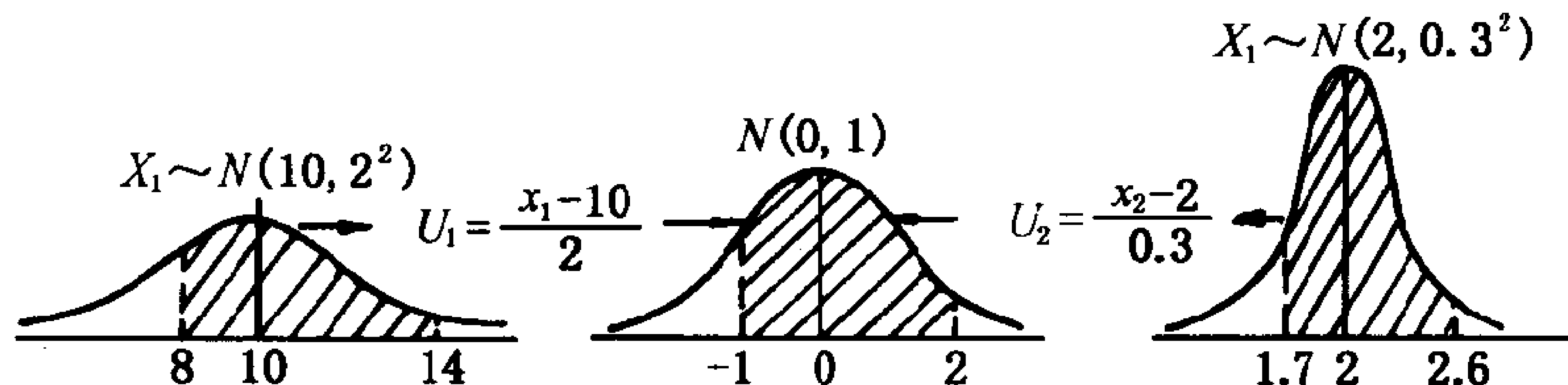


图2.3.9 正态变量的标准化

2.5.3.6 正态分布的计算

现在转入正态分布的计算，正态分布计算主要有如下几种形式。

(1) 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$F(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.3.19}$$

由此，当$a=-\infty$或$b=+\infty$时，有

$$P(X<b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.3.20}$$

$$P(X>a)=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.3.21}$$

事实上，由$X\sim N(\mu,\sigma^2)$知，$U=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$是标准正态变量。故

$$\begin{aligned}P(a<X<b)&=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<U<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\\&=p\left(U<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-P\left(U\leqslant\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

例2.3.12 设$X_1\sim N(10,2^2)$，$X_2\sim N(2,0.3^2)$，试求下列概率：$P(8<X_1<14)$，$P(1.7<X_2<2.6)$。

解：$P(8<X_1<14)=P\left(\dfrac{8-10}{2}<U_1<\dfrac{14-10}{2}\right)$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1)$$
$$= 0.9773 - (1 - 0.8413)$$
$$= 0.8185$$

$$P(1.7 < X_2 < 2.6) = P\left(\frac{1.7-2}{0.3} < U_2 < \frac{2.6-2}{0.3}\right)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.8185$$

这两个概率相等已在图 2.3.9 上表示出来。

(2) 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k)$$
$$= 2\Phi(k) - 1 \qquad (2.3.22)$$

这只要在不等式两端各除以 σ 后就可看出，特别当 $k = 1,2,3$ 时，有

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = \begin{cases} 0.6826, & k=1 \\ 0.9545, & k=2 \\ 0.9974, & k=3 \end{cases} \qquad (2.3.23)$$

可见，正态变量 X 取值位于均值 μ 附近的密集程度可用标准差 σ 为单位来度量。图 2.3.10 把(2.3.23) 式具体表示出来。

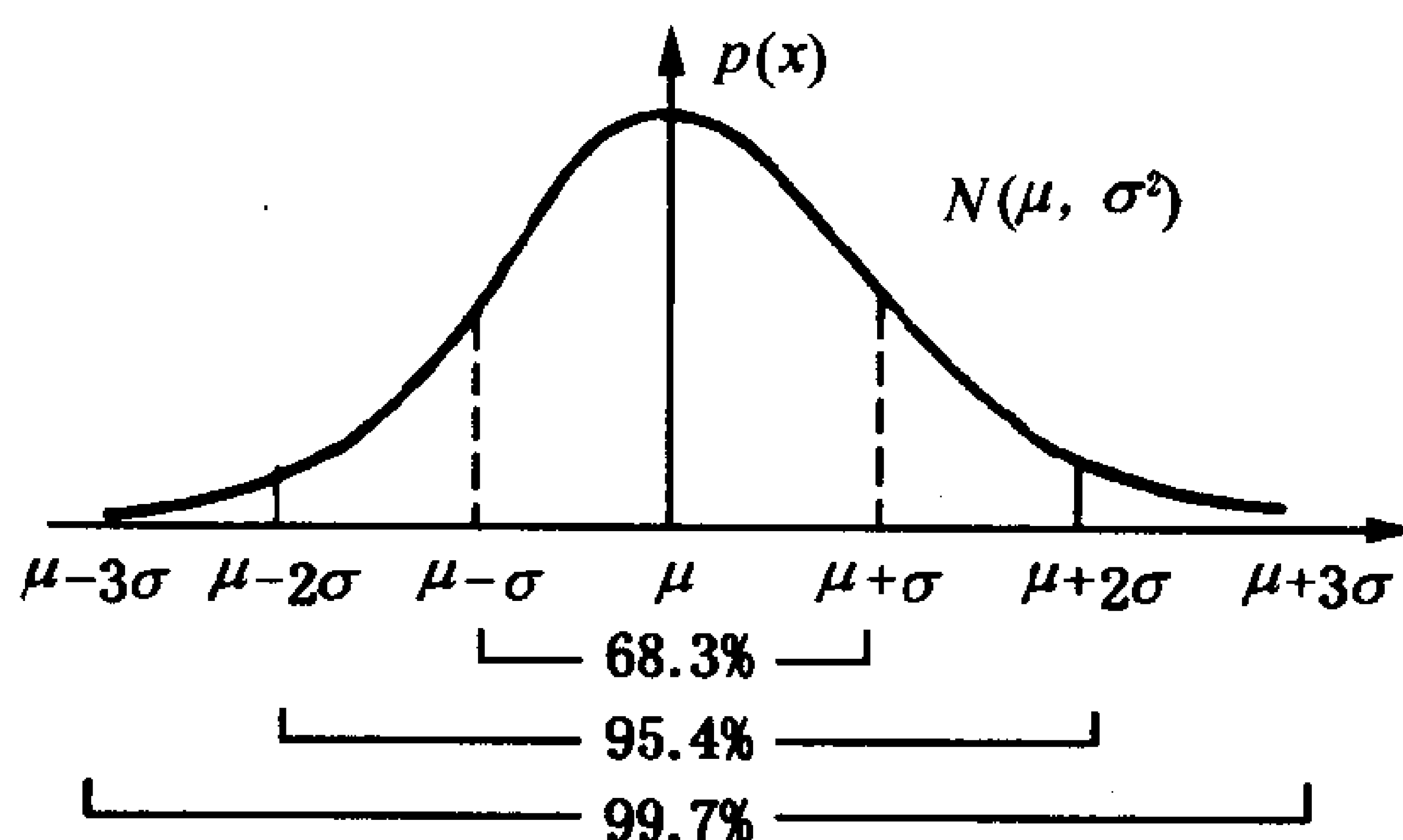


图 2.3.10 正态变量在均值附近取值的概率

(3) 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，若知 $P(X < c) = p$，求 c。

由概率方程 $P(X < c) = p$ 可得 $\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = p$，从而

$$\frac{c-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(p)$$

$$c = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p) \qquad (2.3.24)$$

其中 $\Phi^{-1}(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的反函数，由于 $\Phi(x)$ 是严格增函数，故其反函数 $\Phi^{-1}(x)$

存在。它可从标准正态分布函数表(见附表 3)上由里向外查得，譬如 $\Phi^{-1}(0.937)=1.53$。

(4) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若知 $P(|x-\mu|<c\sigma)=p$，求 c。

由于(2.3.22)可得，$2\Phi(c)-1=p$，$\Phi(c)=(1+p)/2$，故

$$c=\Phi^{-1}((1+p)/2)$$

譬如 p 为 0.95，0.99 和 0.999 时，可分别求得 c 为 1.96，2.58 和 3.29，即

$$\left.\begin{array}{l}P(\mu-1.96\sigma<X<\mu+1.96\sigma)=0.95\\P(\mu-2.58\sigma<X<\mu+2.58\sigma)=0.99\\P(\mu-3.29\sigma<X<\mu+3.29\sigma)=0.999\end{array}\right\}\qquad(2.3.25)$$

这些结果在实际中是有用的。

例 2.3.13 某公司职员每周的超时津贴服从正态分布，其均值为 42.5 元，标准差为 10.4 元，试问每周超时津贴超过 60 元的职工在全公司中占多少比例？

解：设 X 是该公司职工每周的超时津贴，则 $X\sim N(42.5,10.4^2)$。所求的概率为

$$\begin{aligned}P(X>60)&=1-P(X\leqslant 60)\\&=1-\Phi\left(\frac{60-42.5}{10.4}\right)=1-\Phi(1.68)\\&=1-0.9535=0.0465\end{aligned}$$

这表明，每周得 60 元超时津贴的职工占全公司职工的 4.65%。

例 2.3.14 某厂生产一磅的罐装咖啡。自动包装线上大量数据表明，每罐重量是服从标准差为 0.1 磅的正态分布。为了使每罐咖啡少于 1 磅的罐头不多于 10%，应把自动包装线控制的均值 μ 调节到什么位置上？

解：设 X 为一罐的咖啡重量，则 $X\sim N(\mu,0.1^2)$。假如把自动包装线的均值 μ 控制在 1 磅位置，则咖啡少于 1 磅的罐头要占全部罐头的 50%，即 $P(X<1)=0.5$，这是不合要求的(见图 2.3.11)。

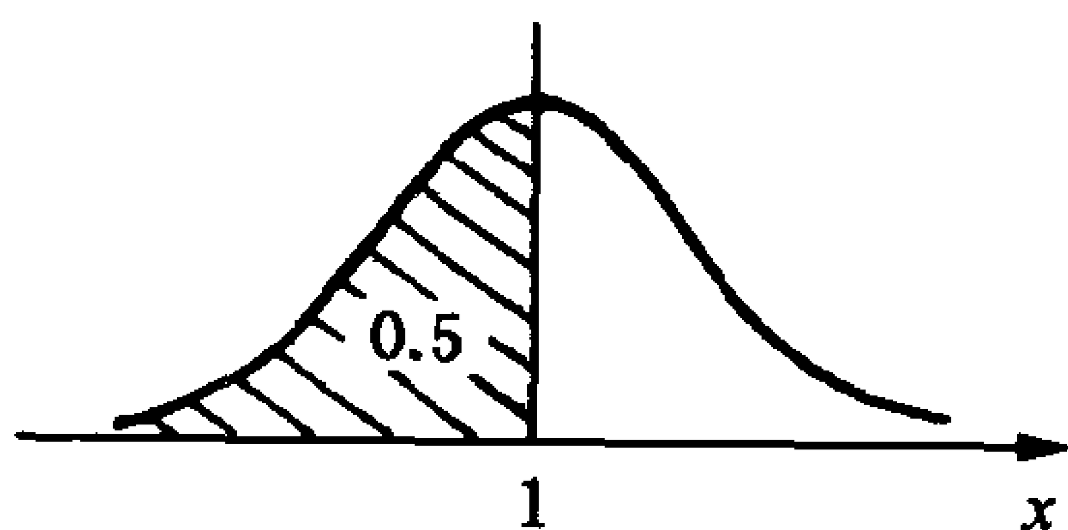


图 2.3.11 自动包装线的均值：$\mu=1$

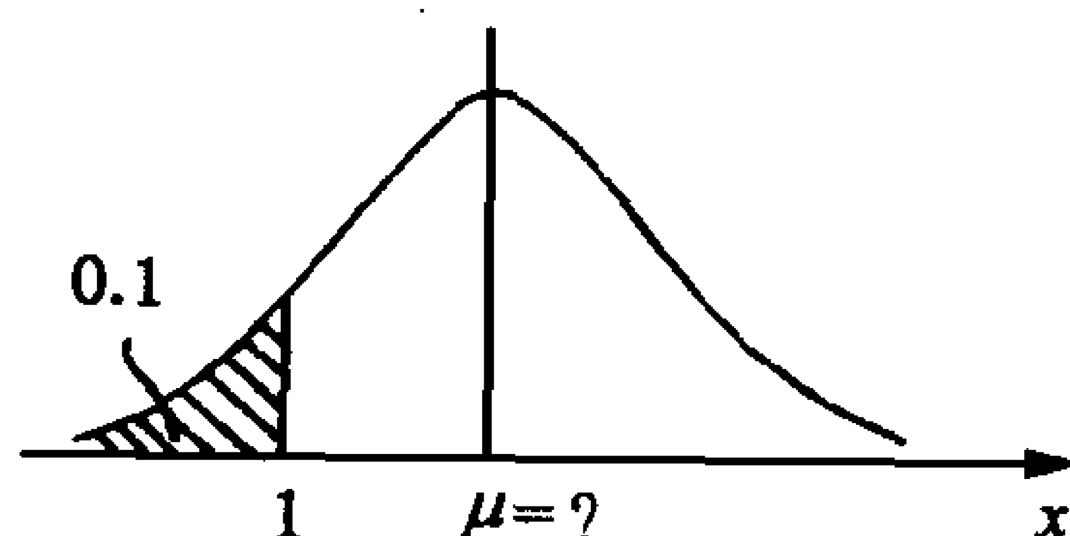


图 2.3.12 自动包装线的新状态

为了使每罐咖啡少于 1 磅的罐头不多于 10%，应把自动包装线均值 μ 调到比 1 磅大一些的地方(见图 2.3.12)，其中 μ 必须满足概率方程式 $P(X<1)=0.1$。对正态变量 X 进行标准化可得

$$\Phi\left(\frac{1-\mu}{0.1}\right)=0.1 \text{ 或 } \Phi\left(\frac{\mu-1}{0.1}\right)=0.9$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mu &= 1+0.1\times\Phi^{-1}(0.9)\\ &= 1+0.1\times 1.28=1.128(\text{磅})\end{aligned}$$

即把自动包装机的均值调节到 1.128 磅的位置上才能保证咖啡少于 1 磅的罐头不多于 10%。

假如购买一台新的包装机，其标准差为 0.025 磅，此时新包装机的均值应调节的位置是

$$\mu=1+0.025\times 1.28=1.032 \text{ 磅}$$

这样平均每罐就可节约咖啡 0.096 磅。若以每日可生产 2000 罐计算，则每日可节省 192 磅咖啡。若每磅咖啡的成本价是 50 元，则工厂每日可获利 9600 元，若新的包装机单价是 10 万元，则第 11 天开始就可获净利。

2.3.6 伽玛分布

(1) 伽玛函数，含参数 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad \alpha>0$$

称为伽玛函数。它有如下性质：

①$\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；

② 递推公式：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$(用分部积分法可得)。特别地，对自然数 $n,\Gamma(n+1)=n!$；

③$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\Gamma(\alpha)/\lambda^\alpha$(用变量替换法可得)。

(2) 伽玛分布，密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{2.3.26}$$

的概率分布称为**伽玛分布**，它含有二个正参数 α 与 λ。其中 $\alpha>0$ 称为形状参数，$\lambda>0$ 称为尺度函数。图 2.3.13 画出了若干条 α 不同的伽玛密度函数曲线，

从图上可见，$\alpha > 1$ 时，伽玛密度函数是单峰，峰值位于 $x = (\alpha - 1)/\lambda$；对 $1 < \alpha \leqslant 2$，其密度函数是先上凸，后下凸；对 $\alpha > 2$，其密度是先下凸，中间上凸，最后又下凸。

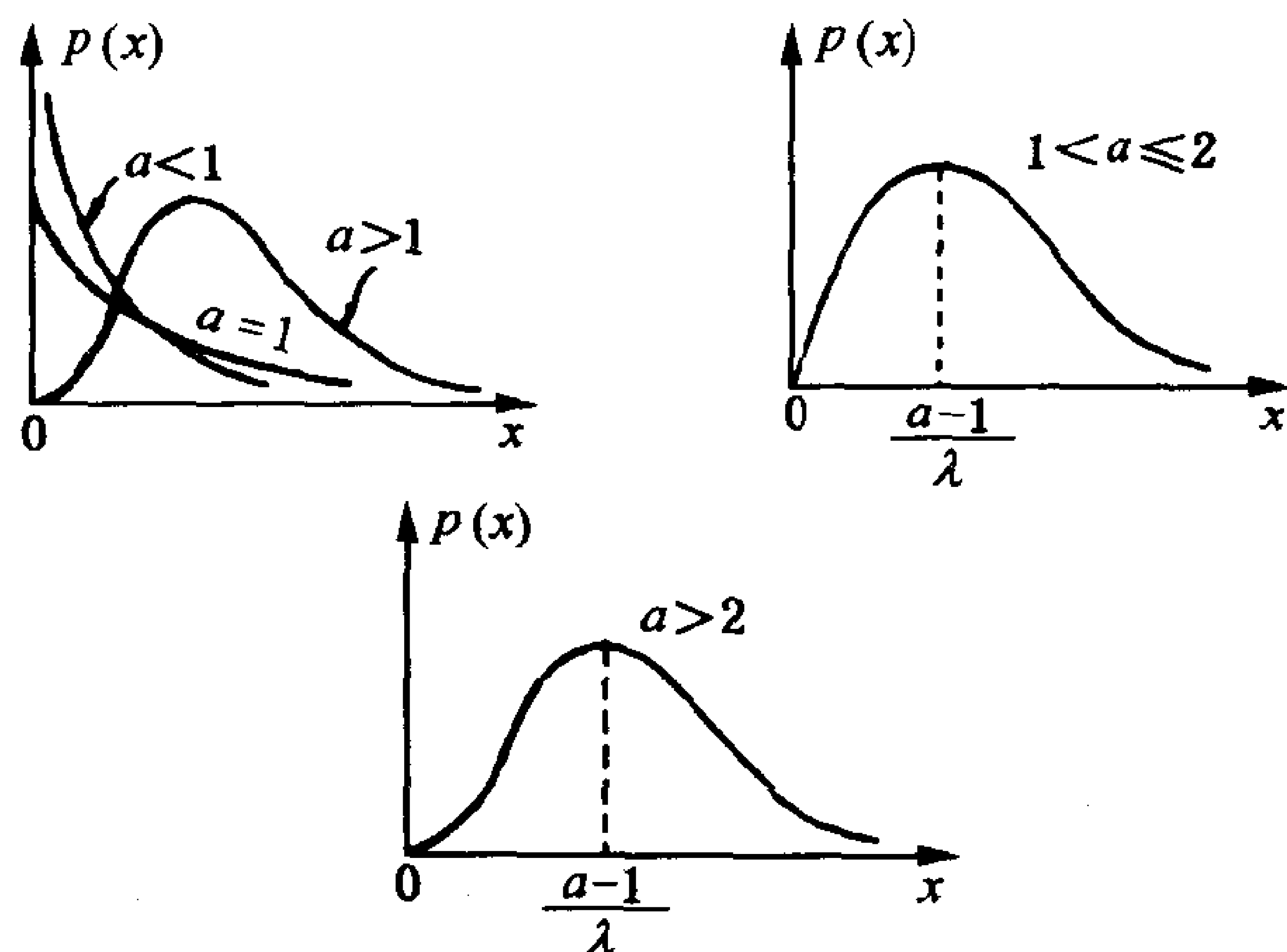


图 2.3.13　λ 固定，不同 α 的伽玛密度函数曲线

伽玛分布记为 $Ga(\alpha,\lambda)$，它的密度函数简写为

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \tag{2.3.27}$$

而把 $p(x) = 0$ 的部分略去，以后都是这样去理解密度函数，略去的部分均为零。

例 2.3.15　某电子产品能经受外界若干次冲击，可当第 k 次冲击来到时，产品就失效了，这样，该产品的寿命就是第 k 次冲击来到的时刻。假如在 $(0,t)$ 时间内，产品受到的冲击次数 X 服从参数为 λt 的泊松分布

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, \quad x = 0,1,\cdots$$

则该产品的寿命 T 服从参数 k 和 λ 的伽玛分布，即 $T \sim Ga(k,\lambda)$。

证：设该产品寿命 T 的分布函数为 $F(t) = P(T \leqslant t)$，其中事件“$T \leqslant t$”表示产品寿命 T 不超过时间 t，也即在 $(0,t)$ 内有不少于 k 个冲击发生，这表明：事件“$T \leqslant t$”与事件“$X \geqslant k$”等价，于是

$$F(t) = P(T \leqslant t) = P(X \geqslant k) = \sum_{x=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

用分部积分法可以验证下列等式

$$1 - F(t) = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_t^{\infty} x^{k-1} e^{-\lambda x} dx \tag{2.3.28}$$

由此可得

$$F(t)=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\int_0^t x^{k-1}e^{-\lambda x}dx$$

这表明：$T\sim Ga(k,\lambda)$。

上述由泊松分布导出伽玛分布(其形状参数为自然数)具有一般性。其中(2.3.28)也表明，可用伽玛分布函数计算泊松分布，这个关系式以后会用的。

(3) 伽玛分布的数学期望为 α/λ，利用伽玛函数性质，不难算得

$$E(X)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^\alpha e^{-\lambda x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\lambda}=\frac{\alpha}{\lambda}$$

(4)形状参数 $\alpha=1$ 的伽玛分布 $Ga(1,\lambda)$ 就是指数分布，其密度函数为

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad x>0$$

指数分布有重要应用，某些电子元器件的寿命、第一次冲击来到的时间、电话的通话时间、排队等候服务的时间等都常假定服从指数分布。由于它只含一个参数，计算简单，实际中常使用指数分布来描述或近似描述一些随机变量的概率分布。指数分布有如下重要性质：

定理 2.3.2 设随机变量 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，则对任意实数 $s>0,t>0$ 有

$$P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t) \tag{2.3.29}$$

先说明此定理的含义，然后再证明它。假如把 X 看作寿命，则(2.3.28)式左端表明，若已知寿命长于 s 年，则再活 t 年的概率与已活年龄 s 无关。这个性质称为**"无记忆性"**。

定理 2.3.2 的证明：容易写出 X 的分布函数

$$F(x)=1-e^{-\lambda x},\quad x>0$$

其中"$x\leqslant 0$ 时 $F(x)=0$"省略了，于是 $P(X>s)=e^{-\lambda s}$。对任意正实数 s 和 t，事件"$X>s+t$"发生必导致事件"$X>s$"发生，即

$$\text{“}X>s+t\text{”}\subset\text{“}X>s\text{”}$$

于是条件概率

$$P(X>s+t\mid X>s)=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$=e^{-\lambda t}=P(X>t)$$

这就证明了(2.3.29)式。

(5)尺度参数 $\lambda=\frac{1}{2}$，形状参数 $\alpha=\frac{n}{2}$(n 常为自然数)的伽玛分布 $Ga\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$ 称为**自由度为 n 的 χ^2 分布**，记为 $\chi^2(n)$。若设 $X\sim\chi^2(n)$，则其数学

期望 $E(X)=n$，自由度为 n 的 χ^2 分布的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n/2}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\quad x>0 \tag{2.3.30}$$

χ^2 分布是统计中最重要的三大分布之一，统计中不少结论与此分布有关，它首先是由英国统计学家 K. 皮尔逊(1857—1936)提出的。"自由度为 n"的含义将在以后解释。

2.3.7 贝塔分布

(1)贝塔函数，含参数 a 与 b 的积分

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a>0,\quad b>0$$

称为贝塔函数，它有如下性质：

①$\beta(a,b)=\beta(b,a)$；

②贝塔函数与伽玛函数间有如下关系

$$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{2.3.31}$$

证：由伽玛函数定义知

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{a-1}y^{b-1}e^{-(a+b)}dxdy$$

作变量替换 $x=uv$，$y=u(1-v)$，其雅可比行列式 $J=-u$。故

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b)&=\int_0^\infty\int_0^1(uv)^{a-1}[u(1-v)]^{b-1}e^{-u}ududv\\&=\int_0^\infty u^{a+b-1}e^{-u}du\int_0^1 u^{a-1}(1-v)^{b-1}dv\\&=\Gamma(a+b)\beta(a,b)\end{aligned}$$

这就证明了②。

(2)贝塔分布，密度函数为

$$p(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{2.3.32}$$

(在其它 x 处 $p(x)=0$，这里省略了)的概率分布称为**贝塔分布**，记为 $Be(a,b)$，其中 a 与 b 都是形状参数，且都为正。a 与 b 取不同的值，贝塔密度函数形状有较大差异。图 2.3.4 列出了几种典型的贝塔密度函数曲线，譬如，当 $a>1,b>1$ 时，$p(x)$ 是单峰曲线，且在 $x_1=(a-1)/(a+b-2)$ 处达到最大值；当 $a<1,b<1$ 时，$p(x)$ 为 U 形曲线，且在 $x_2=(1-a)/(2-a-b)$ 处达到最小值

(见图 2.3.14(a))。当 $a\geqslant1,b<1$ 时，$p(x)$为 J 形曲线；当 $a<1,b\geqslant1$ 时，$p(x)$为反 J 形曲线(见图 2.3.14(b))。

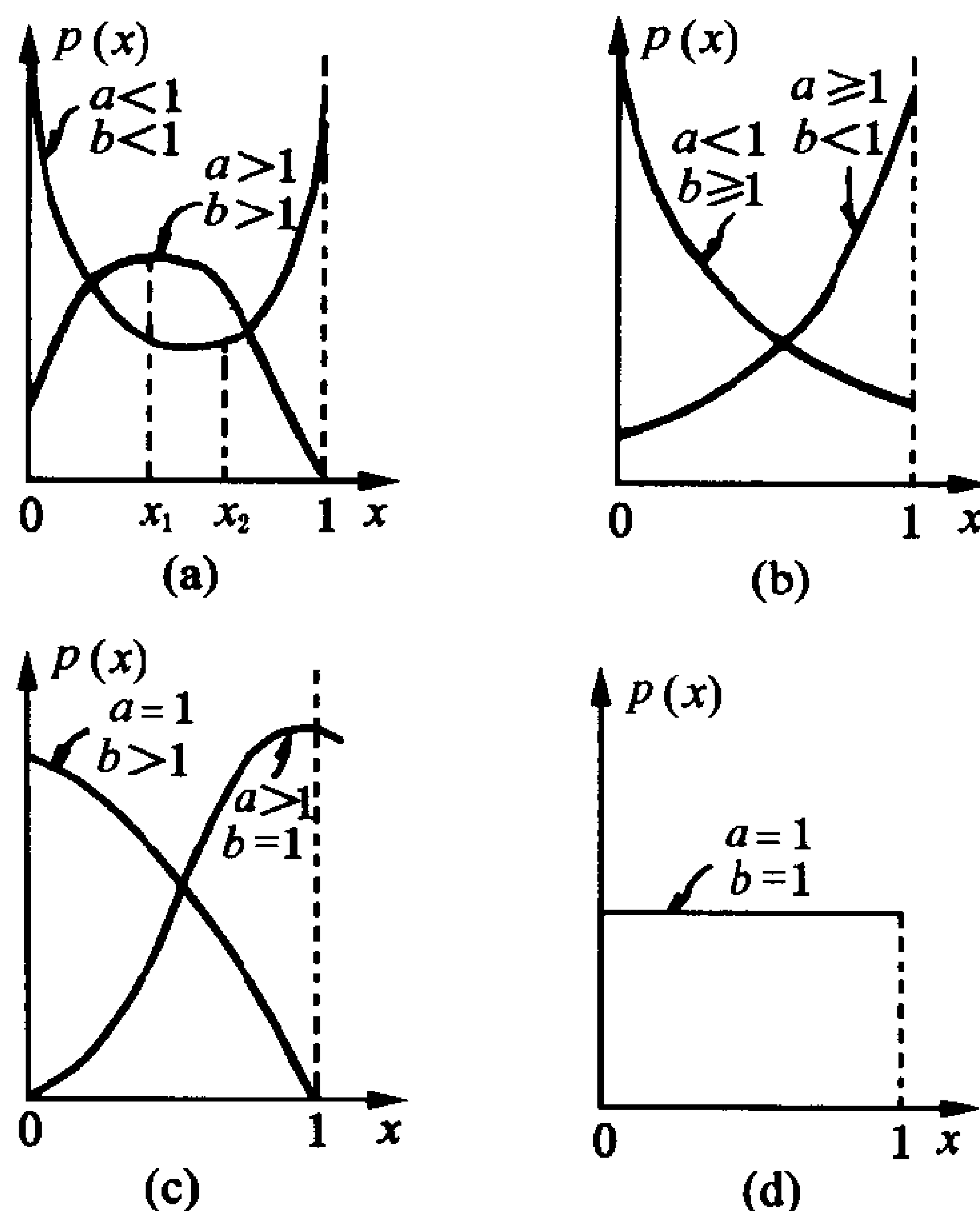


图 2.3.14 贝塔密度函数图形

若随机变量 $X\sim Be(a,b)$，则 X 一定是仅在[0,1]上取值的随机变量，不合格品率、机器的维修率、打靶的命中率、市场的占有率等各种比率都会随时变化的，选用贝塔分布作为它们的概率分布是恰当的，只是参数 a 与 b 不同罢了。譬如大规模集成电路的成品率不很稳定，它有 150 道工序，从原材料到工人情绪都会对成品质量产生影响，但全是不合格品和全是合格品都极为少见，此时用 $a>1,b>1$ 的贝塔分布去描述它是妥当的。又如股票买卖的成功率为 0 和 1 都是有可能的，不输不赢的股票买卖是少见的，这时用 $a<1,b<1$ 的贝塔分布去描述它也是适当的。

例 2.3.16 某城市的公路分成很多段，设在一年中需要维修的公路段的比率 X 服从贝塔分布 $Be(3,2)$。要求在任一年中有一半以上的公路段需要维修的概率。

解：由(2.3.32)式容易写出贝塔分布 $Be(3,2)$的密度函数

$$p(x)=12x^2(1-x),\quad 0<x<1$$

而所要求的概率为

$$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 12x^2(1-x)dx = \frac{9}{16} = 0.5625$$

(3)贝塔分布的数学期望为 $a/(a+b)$，这是因为

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 x^{a+1-1}(1-x)^{b-1}dx \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

(4)$a=b=1$ 贝塔分布 $Be(1,1)$就是在$[0,1]$上的均匀分布，其密度函数(见图 2.3.14(d))为

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

均匀分布的一个重要性质是：设随机变量 $X \sim Be(1,1)$，则 X 在长为 Δx 的小区间上取值的概率等于 Δx，而与区间的二个端点位置无关。这一性质告诉我们，当已知一个随机变量仅在$[0,1]$上取值，而说不出在哪一个小区间上取值的可能性更大一些时，使用均匀分布去描述它是较为妥当的。

§2.4 方　差

方差是概率分布(也是随机变量)的最重要、最常用的特征数之一，在金融中降低风险、在生产中提高产品质量、在测量中提高精度等都是通过减少方差体现出来的。这里将从随机变量函数的数学期望开始先给出数学期望的一些运算性质，然后转到方差的讨论中去。

2.4.1 随机变量函数的数学期望

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，在离散场合可用分布列$\{p(x_i)\}$代替 $F(x)$，在连续场合可用密度函数 $p(x)$代替 $F(x)$。假如 X 的数学期望存在，则有

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p(x), & \text{在离散场合} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, & \text{在连续场合} \end{cases} \tag{2.4.1}$$

这是已为大家熟知的事实，就是用 X 的分布计算 X 的数学期望。如今有一个

随机变量 X 的函数 $g(X)$，假如它的数学期望存在，如何计算 $E[g(X)]$呢？按数学期望定义(2.4.1)，这要分二步进行：

第一步，先求出 $Y=g(X)$的分布$\{p(y_i)\}$或 $p(y)$。

第二步，利用 Y 的分布计算 $E(Y)=E[g(X)]$。

下面的例子将说明这个过程。

例 2.4.1 设 X 为标准正态变量，即 $X\sim N(0,1)$，现要求其平方 X^2 的数学期望。

第一步，寻求 $Y=X^2$ 的分布。由于函数 $Y=X^2$ 在整个数轴上不是严格单调函数，故不能直接使用定理 2.3.1 获得 Y 的分布，还得从 Y 的分布函数定义开始来寻求，当 $y\geqslant 0$ 时，有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)\\&=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})\\&=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})\end{aligned}$$

上式两端对 y 求导数，即可得 Y 的密度函数

$$F_Y(y)=[p_X(\sqrt{y})+p_X(-\sqrt{y})]/(2\sqrt{y})$$

由于 X 的分布为标准正态分布，故其密度函数为

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

利用这个密度函数，容易写出 Y 的密度函数

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-y/2},\qquad y\geqslant 0$$

而当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$，从而 $p_Y(y)=0$，综合上述，当 $X\sim N(0,1)$时，$Y=X^2$ 的分布为伽玛分布 $Ga(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

第二步，计算 Y 的数学期望

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_0^{\infty}yp_Y(y)dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}}e^{-y/2}dy\end{aligned}$$

利用变换 $u=y/2$，可把上述积分化为伽玛函数

$$E(Y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=1$$

最后等式成立是因为 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

这样就完成计算，$E(X^2)=1$，这是一种算法。现在我们来介绍另一种算法，这种算法可省略第一步，直接用 x^2 乘以 X 的密度函数 $p_X(x)$，然后用 $(-\infty,\infty)$上的定积分去完成，即

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$$

上述积分中的被积函数是偶函数，利用对称性，可得

$$E(X^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$$

利用变换 $u = x^2/2$，可把上述积分简化为伽玛函数

$$E(X^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

两种算法结果相同，但后一种算法简单很多，它的一般公式是：若 $X \sim p_X(x)$，$Y = g(X)$，则 $g(X)$ 的数学期望为

$$E(g(X)) = \int_{0}^{\infty} g(x) p_X(x) dx$$

类似情况在离散场合也成立，下面的例子说明这一点。

例 2.4.2 设 X 是仅取 5 个值的随机变量，其分布为

X	-2	-1	0	1	2
P	$p(-2)$	$p(-1)$	$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$

则 $g(X)=X^2$ 是仅取 3 个值的随机变量，其分布为

$g(X)$	0	1	4
P	$p(0)$	$p(-1)+p(1)$	$p(-2)+p(2)$

于是按数学期望定义，可得

$$E[g(X)]=0p(0)+1[p(-1)+p(1)]+4[p(-2)+p(2)]$$

$$=(-2)^2p(-2)+(-1)^2p(-1)+0^2p(0)+1^2p(1)+2^2p(2)$$

$$=\sum_{i=1}^{5} g(x_i)p(x_i)$$

其中 $x_1=-2, x_2=-1, x_3=0, x_4=1, x_5=2$。可见用 X 的分布与用 $g(X)$的分布计算 $E[g(X)]$的结果是相同的。

从上面两个例子可以看出，随机变量函数的数学期望可以得到简化。下面的定理保证了这一点。但证明这个定理需要更多的数学工具，这里就省略了。

定理 2.4.1 设随机变量 X 及其函数 $g(X)$ 的数学期望都存在，则有

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_i g(x_i)p(x_i), & \text{在离散场合} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx, & \text{在连续场合} \end{cases} \tag{2.4.2}$$

其中 $\{p(x_i)\}$ 为离散随机变量的分布列，$p(x)$ 为连续随机变量的密度函数。

利用上述定理可以证明数学期望的几个性质。这里和以后所涉及的数学期望都假设存在，不再一一说明。

定理 2.4.2 设 $g(X)$ 为随机变量 X 的函数，c 为常数，则

$$E[cg(X)]=cE[g(X)]$$

即常数可移到数学期望运算符号外面来。

证：分两种情况进行。首先设 X 为离散随机变量，其分布列为 $\{p(x_i)\}$，由定理 2.4.1 知

$$\begin{aligned} E[cg(X)] &= \sum_i cg(x_i)p(x_i) \\ &= c\sum_i g(x_i)p(x_i) \\ &= cE[g(X)] \end{aligned}$$

其次，设 X 为连续随机变量，其密度函数为 $p(x)$，由定理 2.4.1 知

$$\begin{aligned} E[cg(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)p(x)dx \\ &= c\int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx \\ &= cE[g(X)] \end{aligned}$$

定理 2.4.3 设 $g(X)$ 和 $h(X)$ 是随机变量 X 的两个函数，则

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$$

上式对更多个函数的代数和仍成立。

证：这里仅对 X 为离散随机变量给出证明，当 X 为连续随机变量时亦可类似进行。设 X 的分布列为 $\{p(x_i)\}$，由定理 2.4.1 知

$$\begin{aligned} &E[g(X) \pm h(X)] \\ &= \sum_i [g(x_i) \pm h(x_i)]p(x_i) \\ &= \sum_i g(x_i)p(x_i) \pm \sum_i h(x_i)p(x_i) \end{aligned}$$

$$= E[g(X)] \pm E[h(X)]$$

对三个或更多个函数的代数和亦可类似进行。

定理 2.4.4 常数 c 的数学期望等于 c，即 $E(c)=c$。

证：常数 c 可看作仅取一个值的随机变量，这个随机变量 X 取 c 的概率为 1，即此 X 的分布为

$$P(X=c)=1$$

这种分布在概率论中称为**退化分布**，而其数学期望

$$E(c)=c\cdot 1=c$$

例 2.4.3 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$，在 § 2.2.4 中已求得 $E(X)=\lambda$，现要求 $E(X-\lambda)^2$。

解：根据上述性质，

$$\begin{aligned} E(X-\lambda)^2 &= E[X^2-2\lambda X+\lambda^2] \\ &= E(X^2)-2\lambda E(X)+\lambda^2 \end{aligned}$$

要求出上式，只需计算 $E(X^2)$，下面来进行计算。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2\cdot\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x\cdot\frac{\lambda^x}{(x-1)!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty}[(x-1)+1]\frac{\lambda^x}{(x-1)!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \lambda^2+\lambda \end{aligned}$$

最后一个等式成立是由于两个和都等于 e^{λ}，把上述结果和 $E(X)=\lambda$ 代回原式，可得

$$E(X-\lambda)^2=\lambda^2+\lambda-2\lambda^2+\lambda^2=\lambda$$

下一节就会看到，这里的 $(X-\lambda)^2$ 的数学期望就是泊松分布的方差。

2.4.2 方差

数学期望 $E(X)$ 是分布的位置特征数，它总位于分布的中心，随机变量 X 的取值总在其周围波动。方差是度量此种波动大小的最重要的特征数，下面来叙述它。

若称 $X-E(X)$ 为偏差，那此种偏差可大可小、可正可负。为了使此种偏差

能积累起来，不致于正负抵消，可取绝对偏差的均值 $E|X-E(X)|$（又称平均绝对差）来表征随机变量取值的波动大小。由于绝对值在数学上处理不甚方便，故改用偏差平方 $[X-E(X)]^2$ 来消去符号，然后再求均值得 $E[X-E(X)]^2$，并用它来表征随机变量取值的波动大小（或取值分散程度）。为了使 $E[X-E(X)]^2$ 存在，只要求 EX^2 存在即可，由于

$$|X|\leqslant X^2+1, \quad (X-a)^2\leqslant 2(X^2+a^2)$$

故由 EX^2 存在可推得 $E(X)$ 和 $E[X-E(X)]^2$ 存在。

定义 2.4.1 设随机变量 X 的 EX^2 存在，则称偏差平方的数学期望 $E[X-E(X)]^2$ 为随机变量 X（或相应分布）的**方差**，记为

$$\mathrm{Var}(X)=E[X-E(X)]^2 \tag{2.4.3}$$

方差的正平方根 $[\mathrm{Var}(X)]^{1/2}$ 称为随机变量 X（或相应分布）的**标准差**，记为 σ_X 或 $\sigma(X)$。

下面将以离散随机变量 X 的方差为例来说明方差的统计意义。设 X 的分布为

$$P(X=x_i)=p(x_i), \quad i=1,2,\cdots$$

则按定义 2.4.1 和定理 2.4.1 知，其方差为

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p(x_i)$$

若方差 $\mathrm{Var}(X)$ 较小，则和式中每个乘积项都要很小。这必导致如下情况：

(1)偏差 $x_i-E(X)$ 小，相应概率 $p(x_i)$ 可以大一点；

(2)偏差 $x_i-E(X)$ 大，相应概率 $p(x_i)$ 必定小。

这表明：离均值 $E(X)$ 愈近的值 x_i 的发生可能性愈大，而远离 $E(X)$ 的值 x_i 的发生可能性愈小。此种随机变量在 $E(X)$ 附近取值的可能性很大，故其取值的波动就不会很大。反之，若方差 $\mathrm{Var}(X)$ 较大，则和式中必有某些乘积项较大。也就是说，有若干个大偏差 $x_i-E(X)$ 发生的概率较大，即有较大概率的值 x_i 不会完全落在 $E(X)$ 的附近。从而使随机变量 X 取值的波动就会较大。对连续随机变量亦可作出类似解释。图 2.4.1 上画出四个分布列的线条图，根据上述解释，容易看出，它们的均值都相同，而方差从上到下在逐渐减少。类似地，在图 2.4.2 上画出四个密度函数图形，它们的均值也都相同，而方差从上到下也在减少。

方差的量纲是随机变量 X 的量纲的平方，而标准差 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 的量纲与 X 的量纲就相同了，从而与其数学期望 $E(X)$ 的量纲也相同，这样一来，在 X、$E(X)$ 和 $\sigma(X)$ 间进行加减运算和比较大小就有实际意义了。譬如，我

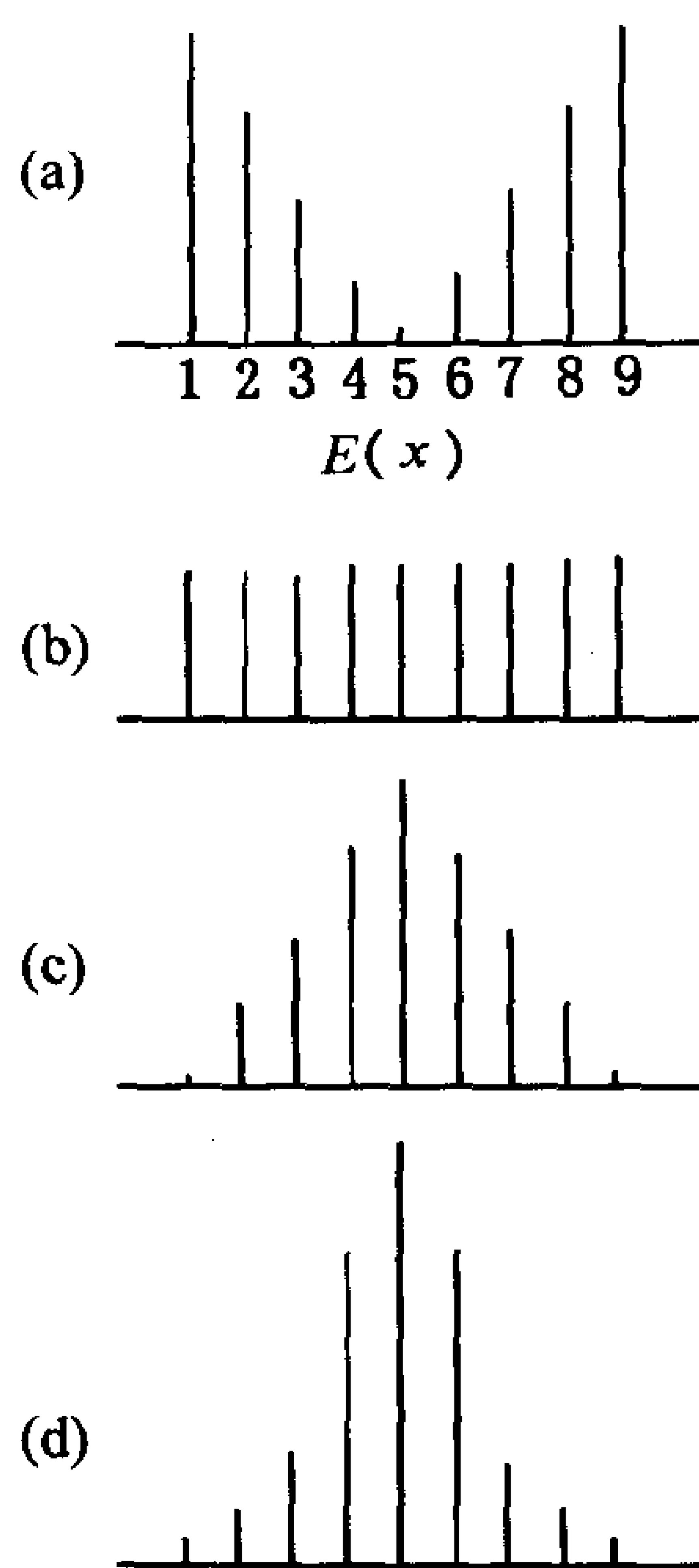


图 2.4.1 四个分布列的方差 $V_a > V_b > V_c > V_d$

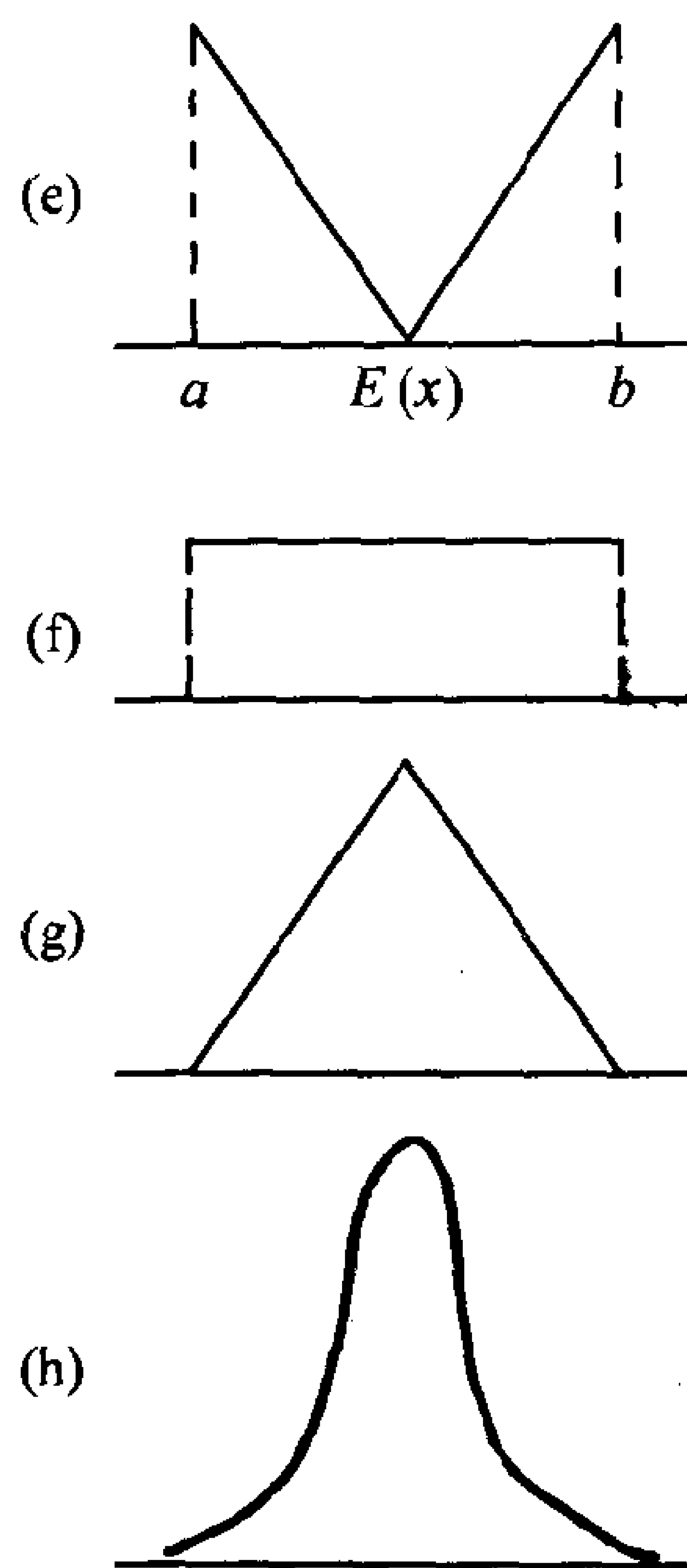


图 2.4.2 四个密度函数的方差 $V_e > V_f > V_g > V_h$

们今后会经常谈论事件

$$|X-E(X)| \leqslant k\sigma(X), \quad k=1,2,3,\cdots$$

及其概率

$$P(E(X)-k\sigma(X) \leqslant X \leqslant E(X)+k\sigma(X))$$

这表明:随机变量 X 落在区间 $[E(X)-k\sigma(X), E(X)+k\sigma(X)]$ 内的概率,这个区间是以 $E(X)$ 为中心,而以 k 倍标准差为半径。

例 2.4.4 某人有一笔资金,可投入两个项目:房地产和开商店,其收益都与市场状态有关。若把未来市场划分为好、中、差三个等级,其发生的概率分别为 0.2、0.7、0.1,通过调查,该人认为购置房地产的收益 X(万元)和开商店的收益 Y(万元)的分布分别为

X	11	3	-3
P	0.2	0.7	0.1

Y	6	4	-1
P	0.2	0.7	0.1

请问：该人资金应流向何方为好？

解：我们先考察数学期望（即平均收益）

$$E(X)=2.2+2.1-0.3=4.0(\text{万元})$$

$$E(Y)=1.2+2.8-0.1=3.9(\text{万元})$$

从平均收益看，购置房地产较为有利，平均可多收益 0.1 万元，我们再来计算它们各自的方差

$$\mathrm{Var}(X)=(11-4)^2\times 0.2+(3-4)^2\times 0.7+(-3-4)^2\times 0.1=15.4$$

$$\mathrm{Var}(Y)=(6-3.9)^2\times 0.2+(4-3.9)^2\times 0.7+(-1-3.9)^2\times 0.1=3.29$$

及标准差

$$\sigma(X)=\sqrt{15.4}=3.92,\qquad \sigma(Y)=\sqrt{3.29}=1.81$$

在这里标准差（方差也一样）愈大，收益的波动就大，从而风险也大，如购置房地产的风险要比开商店的风险高过一倍多。前后权衡，该投资者还是选择开商店，宁可收益少一点，也要回避高风险。

例 2.4.5 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $\mathrm{Var}(X)$。

解：据方差定义和定理 2.4.1，正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E(X-E(X))^2\\ &= E(X-\mu)^2\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx\end{aligned}$$

作标准化变换 $u=(x-\mu)/\sigma$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-u^2/2}du\\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}u^2e^{-u^2/2}du\end{aligned}$$

最后一个等式成立是由于被积函数为偶函数，再利用变换 $y=u^2/2$，可把上述定积分化为伽玛函数，即

$$\int_0^{\infty}u^2e^{-u^2/2}du=\sqrt{2}\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}}e^{-y}dy=\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

代回原式，即得 X 的方差为 σ^2，这表明，正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的第二个参数 σ^2 是方差，而 σ 是其标准差，它的大小表征着随机变量取值波动的大小。

2.4.3 方差的性质

定理 2.4.5 常数 c 的方差为零，即 $\mathrm{Var}(c)=0$。

证：由于常数 c 的数学期望仍为 c，故其方差

$$\mathrm{Var}(c)=E(c-E(c))^2=E(c-c)^2=0$$

定理 2.4.6 对任意常数 a 与 b 和随机变量 X，有

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

证：由数学期望性质知 $E(aX+b)=aE(X)+b$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b)&=E[aX+b-E(aX+b)]^2\\&=E[aX-aE(X)]^2\\&=a^2E(X-E(X))^2\\&=a^2\mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

定理 2.4.7 随机变量 X 的方差有如下的简便计算公式

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{2.4.4}$$

证：由数学期望性质可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=E[X-E(X)]^2\\&=E[X^2-2XE(X)+[E(X)]^2]\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\end{aligned}$$

下面利用简便公式(2.4.4)来计算一些常用分布的方差。

例 2.4.6 二项分布 $b(n,p)$的方差为 $np(1-p)$。

解：设 $X\sim b(n,p)$，其数学期望 $E(X)=np$，为算得其方差，只须再计算 $E(X^2)$：

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{x=0}^{n}x^2\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\\&=\sum_{x=2}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}+\sum_{x=1}^{n}x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\\&=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{n-x}+np\\&=n(n-1)p^2+np=n^2p^2+np(1-p)\end{aligned}$$

由此可得 X 的方差为

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2=np(1-p)$$

例 2.4.7 均匀分布 $U(a,b)$的方差为$(b-a)^2/12$。

解：设 $X\sim U(a,b)$，其数学期望在区间(a,b)的中点，即 $E(X)=(a+b)/2$。为计算其方差，先计算 $E(X^2)$。

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)\end{aligned}$$

由(2.4.4)式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)-\frac{1}{4}(a+b)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

可见,均匀分布 $U(a,b)$ 的方差为区间长度的平方除以 12。譬如均匀分布 $U(0,1)$ 的方差为 1/12。

例 2.4.8 伽玛分布 $Ga(\alpha,\lambda)$ 的方差为 α/λ^2。

解:设 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$,其数学期望 $E(X)=\alpha/\lambda$,为计算其方差,我们先计算 $E(X^2)$。

$$E(X^2) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^2\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}dx$$

由伽玛函数的性质知,上式右端的积分为 $\Gamma(\alpha+2)/\lambda^{\alpha+2}$。代回上式,即得 $E(X^2)=\alpha(\alpha+1)/\lambda^2$,从而

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}-\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

我们来讨论伽玛分布的二个特殊场合的方差。

(1)$\alpha=1$ 时的伽玛分布 $Ga(1,\lambda)$ 为指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$,所以当 $Y\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$ 时,$E(Y)=\lambda^{-1}$,$\mathrm{Var}(Y)=\lambda^{-2}$,$\sigma(X)=\lambda^{-1}$。

(2)$\alpha=\frac{n}{2}$(n 为自然数),$\lambda=\frac{1}{2}$ 时的伽玛分布为卡方分布 $\chi^2(n)$。所以,当 $Z\sim\chi^2(n)$ 时,$E(Z)=n$,$\mathrm{Var}(Z)=2n$,要记住:卡方分布的方差是其期望的二倍。

例 2.4.9 设随机变量 X 的数学期望为 μ,方差为 σ^2,则 X 的标准化随机变量 $X^*=(X-\mu)/\sigma$ 的数学期望为 0,方差为 1。

解:由数学期望和方差性质可知

$$E(X^*)=\frac{1}{\sigma}E[X-E(X)]=0$$

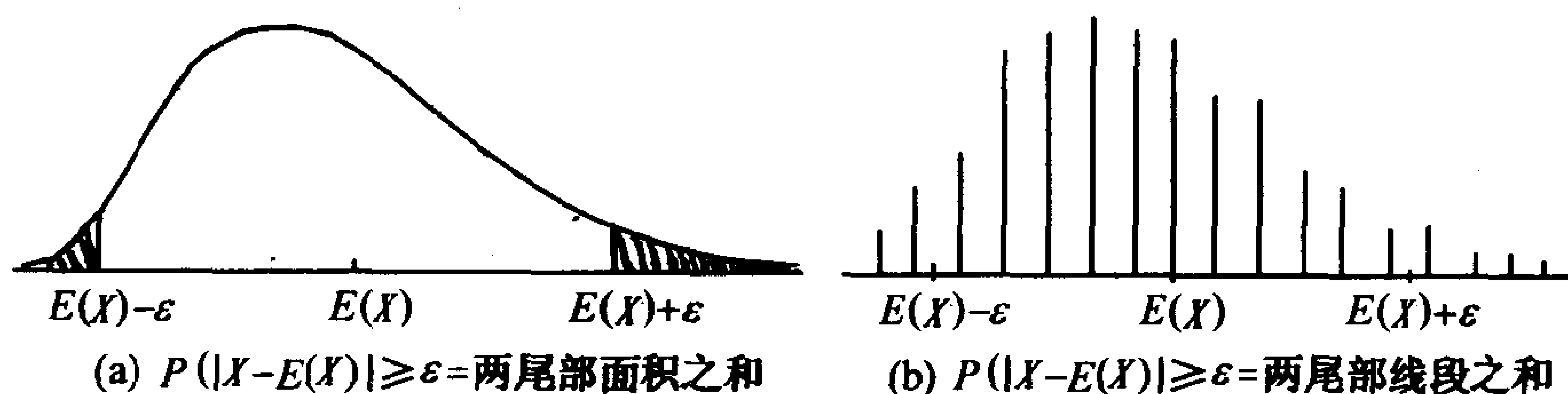
$$\mathrm{Var}(X^*)=E(X^{*2})=\frac{1}{\sigma^2}E[X-E(X)]^2=1$$

2.4.4 切比雪夫不等式

定理 2.4.8 （切比雪夫不等式）对任一随机变量 X，若 EX^2 存在，则对任一正数 ε，恒有

$$P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \tag{2.4.5}$$

先说明这个概率不等式的含义，然后给出证明。这个概率不等式对连续和离散两类随机变量都成立。在连续随机变量场合，不等式的左端概率是密度曲线下两个尾部面积之和（见图 2.4.3(a)）。这个不等式指出，这两个尾部概率之和有一个上界，这个上界与方差 $\mathrm{Var}(X)$ 成正比，而与区间 $(E(X)-\varepsilon, E(X)+\varepsilon)$ 的长度的一半 ε 的平方成反比，对离散随机变量也可作类似解释（见图 2.4.3(b)）。



(a) $P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon$=两尾部面积之和　　(b) $P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon$=两尾部线段之和

图 2.4.3 概率 $P(|X\sim E(X)\geqslant\varepsilon|)$ 的含义

证：这里仅给出连续随机变量情况下的证明，离散随机变量情况的证明亦可类似进行。设 $p(x)$ 为连续随机变量的密度函数，则有

$$P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)=\int_{|x-EX|\geqslant\varepsilon}p(x)dx$$

在此积分区域上，恒有 $(x-EX)^2/\varepsilon^2\geqslant1$。故可把上述被积函数放大

$$\int_{|x-EX|\geqslant\varepsilon}p(x)dx\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-EX|\geqslant\varepsilon}(x-EX)^2p(x)dx$$

最后，再把上式右端积分限扩大到整个数轴上，则有

$$P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2p(x)dx=\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

在切比雪夫不等式中方差是起决定作用的，若方差 $\mathrm{Var}(X)$ 较大，分布就较为分散，于是两尾部概率可能会大一些；若方差 $\mathrm{Var}(X)$ 较小，分布就较为

集中，于是两尾部概率可能会小一些。但都不会超过 $\mathrm{Var}(X)/\varepsilon^2$。直观地说，两尾部概率之和被其方差所控制。

若 ε 取为 k 倍的标准差，即 $\varepsilon=k\sigma(X)$，则切比雪夫不等式可以改写为另一种常用形式：

$$P(|X-E(X)|\geqslant k\sigma(X))\leqslant\frac{1}{k^2} \tag{2.4.6}$$

其对立事件的概率为

$$P(E(X)-k\sigma(X)<X<E(X)+k\sigma(X))>1-\frac{1}{k^2} \tag{2.4.7}$$

譬如，$k=3$ 时，我们可以说，对任一个方差存在的分布来说，在区间 $(E(X)-3\sigma(X),E(X)+3\sigma(X))$ 外的概率不超过 1/9，而在此区间内部的概率不会小于 8/9=0.89。

例 2.4.10 星期六上午来到小客车陈列室的顾客人数 X 是一个随机变量，其分布未知，但知其期望 $\mu=18$(人)，标准差 $\sigma=2.5$(人)，试问 X 在 8 到 28 人之间的概率是多少？

解：由于分布未知，无法精确求出概率 $P(8<X<28)$。现可用切比雪夫不等式大约估计这个概率，由于 $E(X)=\mu=18$。

$$\begin{aligned}P(8<X<28)&=P(-10<X-E(X)<10)\\&=P(|X-E(X)|<10)\end{aligned}$$

考虑到标准差 $\sigma=2.5$，所以上式又可写为

$$P(8<X<28)=P(|X-E(X)|<4\sigma)$$

利用(2.4.7)式可得上述概率不会小于 $1-\frac{1}{4^2}=\frac{15}{16}$，即

$$P(8<X<28)>\frac{15}{16}=0.94$$

前面曾证明：常数的方差为零，现在来讨论其逆命题。

定理 2.4.9 方差为零的随机变量 X 必几乎处处为常数。这个常数就是其期望 $E(X)$，这个定理亦可表示为：若 $\mathrm{Var}(X)=0$，则 $P(X=E(X))=1$。

证：由切比雪夫不等式可知，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}=0$$

故有 $P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)=0$，或者说，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)=1$$

由于 ε 的任意性，上式必导致

$$P(X=E(X))=1$$

这个定理表明，在方差为零的情况下，除去一个零概率事件外，X 就是仅取 $E(X)$ 一个值的随机变量。在这里，方差又起着决定性的作用。

2.4.5 贝努里大数定律

在第一章曾列举一些例子（见例 1.2.4）说明：可用事件 A 发生的频率去估计事件 A 的概率。因为随着独立重复试验次数 n 不断增加，频率将稳定于概率。这里的“稳定”是什么含义呢？下面的大数定律把稳定性说清楚了。

定理 2.4.10（贝努里大数定律） 设 X_n 是 n 重贝努里试验中事件 A 发生的次数，又设事件 A 发生的概率 $P(A)=p$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0 \tag{2.4.8}$$

证：在 n 重贝努里试验中 X_n 服从二项分布 $b(n,p)$，其数学期望与方差分别为 $E(X_n)=np$，$\mathrm{Var}(X_n)=np(1-p)$。而 X_n/n 是 n 重贝努里试验中 A 发生的频率，其数学期望与方差分别为

$$E\left(\frac{X_n}{n}\right)=p,\quad \mathrm{Var}\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{p(1-p)}{n}$$

由切比雪夫不等式可得

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\mathrm{Var}(X_n/n)}{\varepsilon^2}=\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \tag{2.4.9}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，上式右端将随着 $n\to\infty$ 而趋向于零，再考虑到概率的非负性，可得(2.4.8)，这就证明了贝努里大数定律。

贝努里大数定律说明：事件 A 发生的频率 X_n/n 与其概率 p 有较大偏差（譬如大于事先给定的 ε）的可能性愈来愈小，但这并不意味较大偏差永远就不再发生了，只是说小偏差发生的概率大，而大偏差发生的概率小，小到可以忽略不计，这就是频率稳定于概率的含义，下面的例子可以帮助我们从数量上来理解贝努里大数定律的含义。

例 2.4.11 大家知道，一枚均匀硬币的正面（事件 A）出现的概率为 0.5。若把这枚硬币连抛 10 次或 20 次，则正面出现的频率 X_n/n 与 0.5 的偏差有时会大一些，有时会小一些，总之不能保证大偏差发生的概率一定很小。可是当连抛 10^5 次时，出现大偏差（两尾部）的概率一定会很小，这可从上述定理证明中的(2.4.9)式看出，若取偏差 $\varepsilon=0.01$，则从(2.4.9)可得

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-0.5\right|\geqslant 0.01\right)\leqslant\frac{0.5\times 0.5}{n\times 0.01^2}=\frac{10^4}{4n}$$

当 $n=10^5$ 时，上式右端的概率为 1/40=0.025，这说明：连抛 10 万次时，频率与概率之间的偏差超过 0.01 的机会不会超过 2.5%，同样地，若连抛 100 万次，频率与概率之间的偏差超过 0.01 的机会不会超过 1/400=0.0025=0.25%。可见试验次数愈多，此种偏差出现的可能性愈小。但偏差超过 0.01 的机会还是存在的。由于这种机会很小，以致于不会影响人们决策。当人们对一个问题作决策时，犯错误的概率为 1/400，而正确决策的概率为 399/400。这项决策是可以下决心了，概率论与数理统计中所有决策，几乎全是在这种概率意义下作出的。

§2.5 随机变量的其它特征数

数学期望(均值)与方差是随机变量(也是其分布)最重要的两个特征数。此外，随机变量还有一些特征数，如原点矩、中心矩、变异系数、偏度、峰度、分位数、众数等。下面逐一介绍它们。

随机变量的每一个特征数都可由其分布算得(假如存在的话)，并从一个侧面刻划分布的一个特征。在实际应用中，一个分布只须用几个特征就可勾划出其大概，不需要算其所有特征数，至于选用那几个特征数，那要看具体分布而定。如正态分布只须用其均值与方差两个特征数就够了。

2.5.1 矩

定义 2.5.1 设 X 为随机变量，c 为常数，k 为正整数，则量 $E(X-c)^k$(假如它存在)称为 **X 分布关于 c 的 k 阶矩**。若 $c=0$，则量 EX^k 称为 **X 分布的 k 阶(原点)矩**，记为 μ_k；若 $c=EX$，则量 $E(X-EX)^k$ 称为 **X 分布的 k 阶中心矩**，记为 ν_k。

容易看出，一阶原点矩就是数学期望，二阶中心矩就是方差。在实际中常用低阶矩，高于四阶矩极少使用。由于 $|X|^{k-1}\leqslant|X|^k+1$，故 k 阶矩存在时，$k-1$ 阶矩也存在，从而低于 k 的各阶矩都存在。

中心矩与原点矩之间有一个简单关系，事实上

$$\nu_k=E(X-EX)^k=E(X-\mu_1)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_i(-\mu_1)^{k-i}$$

故前四阶中心矩可分别用原点矩表示

$$\nu_1=0$$

$$\nu_2=\mu_2-\mu_1^2$$

$$\nu_3=\mu_3-3\mu_2\mu_1+2\mu_1^2$$

$$\nu_4=\mu_4-4\mu_3\mu_1+6\mu_2\mu_1^2-3\mu_1^4$$

例 2.5.1 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求其 k 阶中心矩。

解：X 的 k 阶中心矩为

$$\nu_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^k e^{-u^2/2}du$$

在 k 为奇数时，上述被积函数是奇函数，故 $\nu_k=0, k=1,3,5,\cdots$；

在 k 为偶数时，上述被积函数是偶函数，再利用变换 $z=u^2/2$，可得

$$\nu_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k\int_0^{\infty}u^k e^{-u^2/2}du$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k\,2^{\frac{k-1}{2}}\int_0^{\infty}z^{\frac{k-1}{2}}e^{-z}dz$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k\,2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

$$=\sigma^k(k-1)(k-3)\cdots 1,\quad k=2,4,6,\cdots$$

故正态分布的前四阶中心矩分别为

$$\nu_1=0,\quad \nu_2=\sigma^2,\quad \nu_3=0,\quad \nu_4=3\sigma^4$$

2.5.2 变导系数

定义 2.5.2 设随机变量 X 的二阶矩存在，则比值

$$C_v=\frac{\sqrt{\upsilon_2}}{\mu_1}=\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{EX}$$

称为 X 分布的变异系数。

容易看出，变异系数是以其数学期望为单位去度量随机变量取值波动程度的特征数。它是一个无单位的量，一般说来，取值较大的随机变量的方差与标准差也较大，这时仅看方差大小就不合理。譬如北京与上海距离是一个常量，可其测量值 X 是随机变量。若设其均值 $EX=1463$ 公里 $=1463000$ 公尺，标准差 $\sigma(X)=500$ 公尺，则其变异系数 $C_v=0.00034$。而测量 100 公尺跑道，

若设 $EY=100$ 公尺，$\sigma(Y)=0.05$ 公尺 $=5$ 厘米，则其变异系数 $C_v=0.0005$。相比之下，还是测量北京至上海的距离较为精确，因为其变异系数较小。

*2.5.3 偏度

定义 2.5.3 设随机变量 X 的三阶矩存在，则比值

$$\beta_1=\frac{\nu_3}{(\nu_2)^{3/2}}=\frac{E(X-EX)^3}{[E(X-EX)^2]^{3/2}}$$

称为 X 分布的偏度系数，简称偏度。

前面告之，正态分布的三阶中心矩 $\nu_3=0$，故其偏度 $\beta_1=0$。一般，若概率密度函数 $p(x)$ 关于数学期望 EX 对称，即有 $p(EX-x)=p(EX+x)$，则其三阶中心矩 ν_3 必为 0，从而 $\beta_1=0$，这表明：关于 EX 对称的概率分布，其偏度为零（见图 2.5.1(b)）。若偏度 β_1 不为零，则其分布不是对称的，且 $|\beta_1|$ 愈大，其分布与对称分布偏离愈大，特别，若 $\beta_1>0$，则其概率分布为正偏或左偏（见图 2.5.1(a)）；若 $\beta_1<0$，则其概率分布为负偏或右偏（见图 2.5.1(c)）。定义 2.5.3 中 ν_3 除以 $(\nu_2)^{3/2}$ 是为消除量纲的影响，使其更具有可比性。

例 2.5.2 设 X 与 Y 为二个离散随机变量，它们的分布分别如下表所示。从它们各自线条图（见图 2.5.2 与图 2.5.3）上看，X 的分布是左偏的，Y 的分布是右偏的，现在来计算它们的偏度。

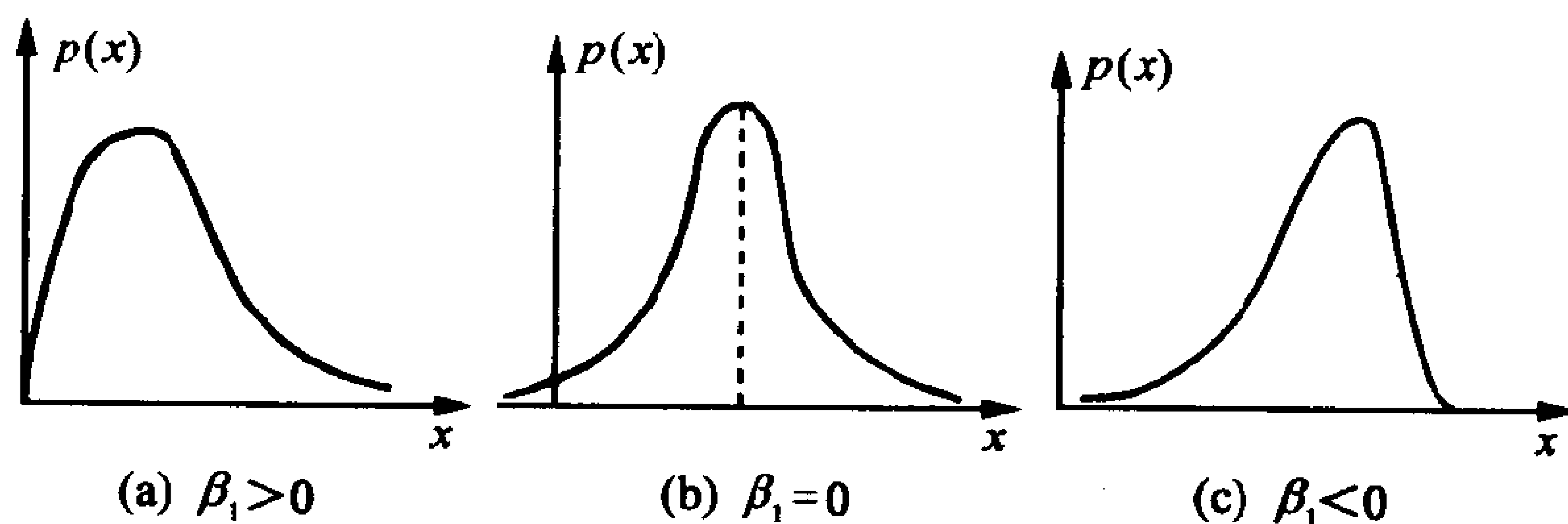


图 2.5.1 三种不同偏度的分布

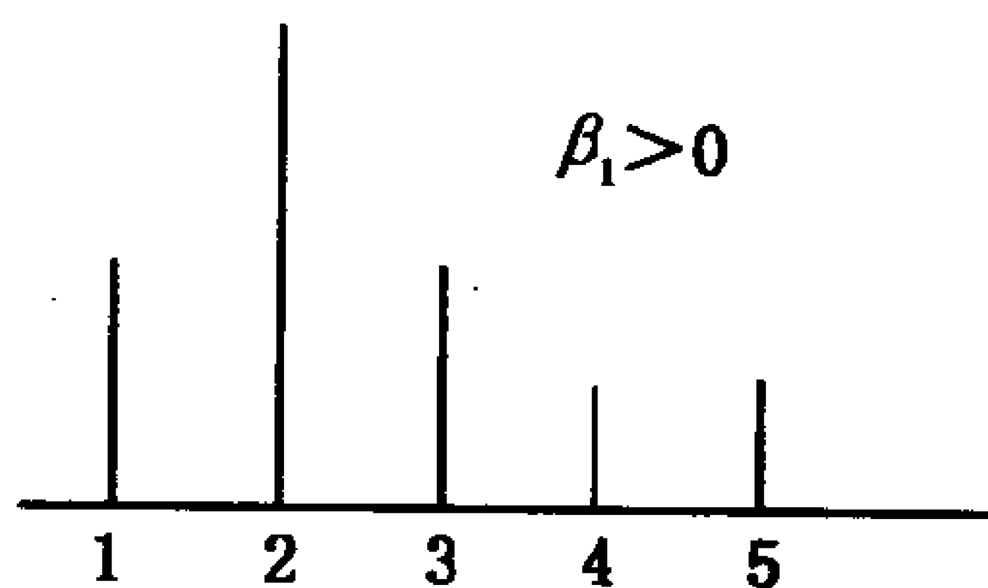


图 2.5.2 X 的分布

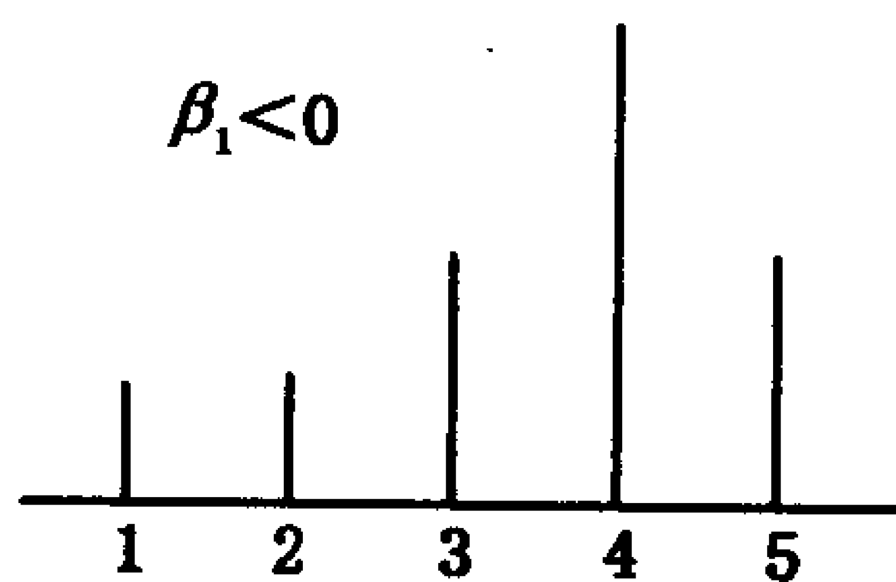


图 2.5.3 Y 的分布

X	1	2	3	4	5
P	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1

Y	1	2	3	4	5
P	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

计算结果列于下表：

	均值	方差 ν_2	三阶中心矩 ν_3	偏度 β_1	结果
X	2.5	1.45	1.2	0.6873	正偏
Y	3.5	1.45	-1.2	-0.6873	负偏

* 2.5.4 峰度

定义 2.5.4 设随机变量 X 的四阶矩存在，则比值减去 3

$$\beta_2=\frac{\nu_4}{\nu_2^2}-3=\frac{E(X-EX)^4}{[E(X-EX)^2]^2}-3$$

称为 X **分布的峰度系数，简称峰度**。

前面告之，正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 $\upsilon_2=\sigma^2,\upsilon_4=3\sigma^4$，故按上述定义可知 $\beta_2=0$，这意味着，不论均值 μ 与方差 σ^2 是多少，任一正态分布的峰度 β_2 永远为零。可见，这里谈论的“峰度”不是指一般密度函数的峰值高低，那么这里的“峰值”含义是什么呢？假如在定义 2.5.4 中，对分子和分母各除以 σ^4（标准差的 4 次方），并记 X 的标准化变量为 $X^*=(X-EX)/\sigma$，则 β_2 可改写为

$$\beta_2=\frac{E(X^*)^4}{[E(X^*)^2]^2}-3=E(X^*)^4-3$$

其中 $E(X^*)^2=\mathrm{Var}(X^*)=1$，由于标准化正态变量（记为 U）的四阶原点矩 $E(U^4)=3$，故峰度 β_2 实际上是任一标准化变量与标准化正态变量的四阶原点矩之差。以单峰分布为例，当 $\beta_2>0$ 时，即 $E(X^*)^4>E(U^4)$，这意味着 X^* 在零附近集中取值的概率要大于标准化正态变量，从而其密度在零附近的峰要比标准化正态分布的峰高，对 $\beta_2<0$ 也可作类似解释。表 2.5.1 列出常见的四个分布的峰度，均匀分布的密度函数很平坦，其峰度比正态分布峰度低，呈现负值。指数分布的密度函数为尖峭，其峰度比正态分布峰度高，呈现正值。可以预计，当 $\beta_2<-1.2$ 时，其密度函数会呈 U 形。

表 2.5.1 几种常见分布的峰度

	均值	方差	标准化变量的 四阶原点矩	峰度
均匀分布 $U(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	1.8	-1.2
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	3.0	0
指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	9.0	6
伽玛分布 $Ga(\alpha,\lambda)$	α/λ^2	α/λ^2	$3+6\alpha$	$6/\alpha$

例 2.5.3 计算伽玛分布 $Ga(\alpha,\lambda)$的偏度与峰度。

解:容易算出伽玛变量的 k 阶原点矩

$$\mu_k=EX^k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)/\lambda^k$$

由此可得其前四阶原点矩分别为

$$\mu_1=\alpha/\lambda$$
$$\mu_2=\alpha(\alpha+1)/\lambda^2$$
$$\mu_3=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)/\lambda^3$$
$$\mu_4=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)/\lambda^4$$

从而可算得二阶、三阶和四阶中心矩

$$\nu_2=\mu_2-\mu_1^2=\alpha/\lambda^2$$
$$\nu_3=\mu_3-3\mu_2\mu_1+2\mu_1^3=2\alpha/\lambda^3$$
$$\nu_4=\mu_4-4\mu_3\mu_1+6\mu_2\mu_1^2-3_1^4=3\alpha(\alpha+2)\nu\lambda^3$$

从而可得伽玛分布的偏度 β_1 与峰度 β_2

$$\beta_1=\frac{\nu_3}{(\nu_2)^{3/2}}=2/\sqrt{\alpha},\quad \beta_2=\frac{\nu_4}{\nu_2^2}-3=6/\alpha$$

可见伽玛分布的偏度与峰度只与形状参数 α 有关,而与尺度参数 λ 无关,特别,当 α 较大时,譬如 $\alpha\geqslant100$ 时,β_1 与 β_2 都接近于零,伽玛分布也愈来愈近似正态分布。

2.5.5 中位数

随机变量 X 的中位数是将 X 的取值范围分为概率相等(各为 0.5)的两部分的数值。它常在连续随机变量场合使用,故下面只对连续随机变量给出定义。

定义 2.5.5 设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,密度函数为 $p(x)$,则满足条件

$$F(x_{0.5})=\int_{-\infty}^{x_{0.5}}p(x)dx=0.5$$

的值 $x_{0.5}$称为 **X 分布的中位数**，或称 **X 的中位点**，见图 2.5.4。

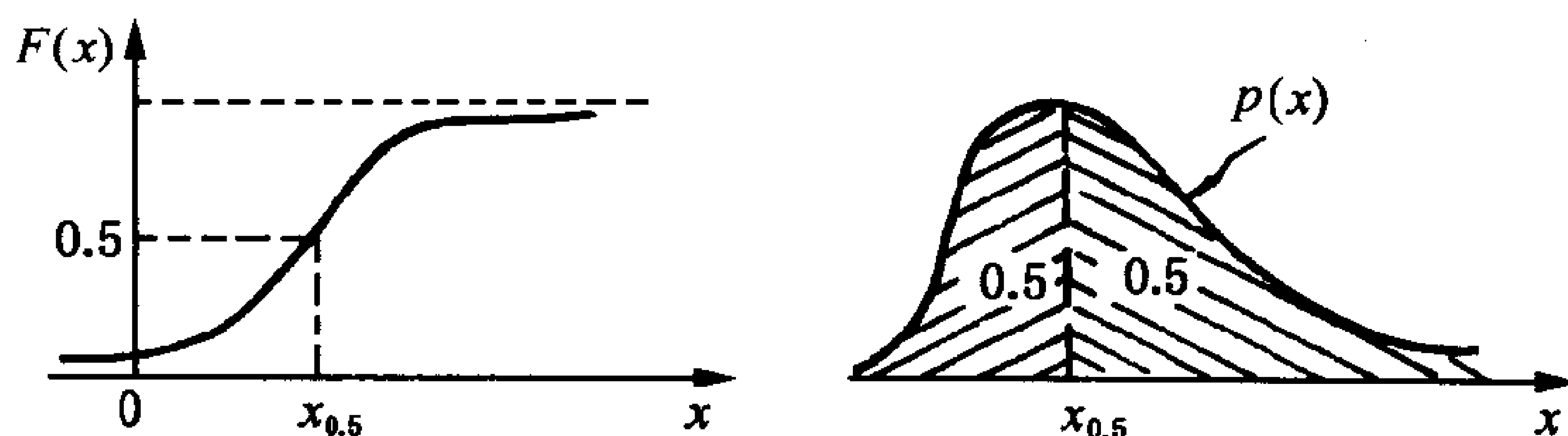


图 2.5.4　连续随机变量的中位数 $x_{0.5}$

中位数与均值一样都是随机变量的位置特征数，一个随机变量的均值可以不存在，而它的中位数总存在，一般中位数可从方程 $F(x)=0.5$ 求得。譬如指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$的中位数 $x_{0.5}$可由方程 $1-\exp\{-\lambda x_{0.5}\}=0.5$ 解得 $x_{0.5}=\ln 2/\lambda$。当分布是对称时，对称中心就是中位数，譬如正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$的中位数 $x_{0.5}$就是均值 μ。

中位数很有用，有时比均值更能说明问题。譬如甲厂的电视机寿命的中位数是 25000 小时，它表明甲厂的电视机中一半高于 25000 小时，另一半低于 25000 小时。若乙厂的电视机寿命的中位数是 30000 小时，则乙厂的电视机在寿命质量上比甲厂好。又如一个城市职工的年收入中位数是一万元，这告诉人们，该城市职工中有一半人年收入超过一万元，另一半低于一万元。

2.5.6　分位数

与中位数一样，分位数也常在连续随机变量场合使用，故下面仅对连续随机变量给出分位数的定义。

定义 2.5.6　设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $p(x)$，对任意 $\alpha(0<\alpha<1)$，假如 x_α 满足条件

$$F(x_\alpha)=\int_{-\infty}^{x_\alpha}p(x)dx=\alpha$$

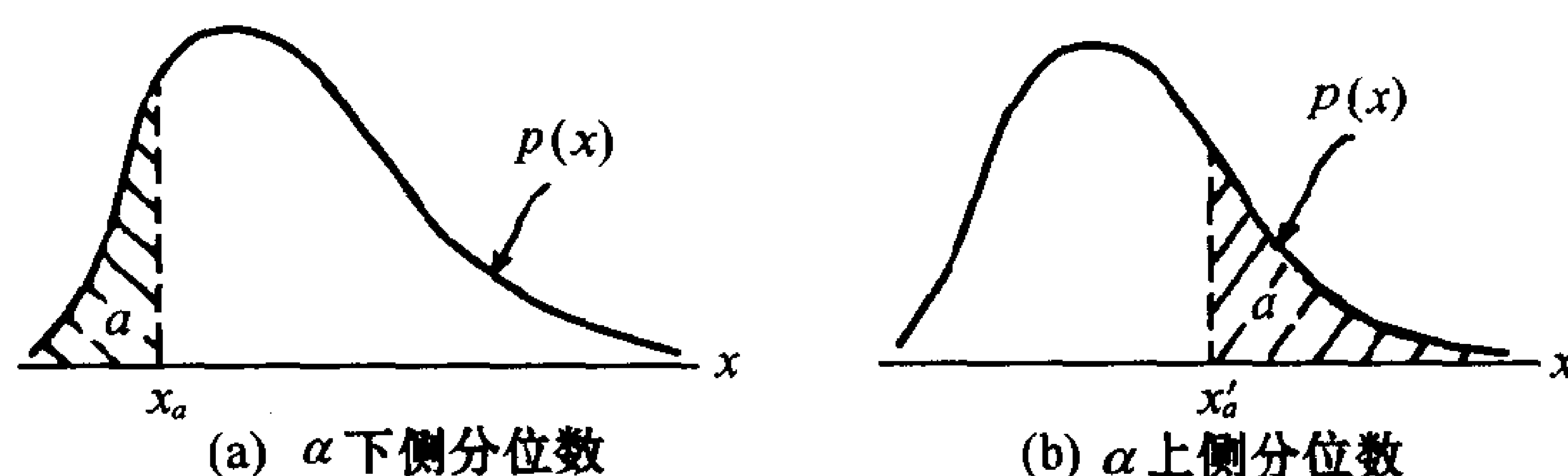
则 x_α 称为 **X 分布的 α 分位数**，或称 **α 下侧分位数**。假如 x'_α 满足条件

$$1-F(x'_\alpha)=\int_{x'_\alpha}^{\infty}p(x)dx=\alpha$$

则 x'_α 称为 **X 分布的 α 上侧分位数**，它们的区别见图 2.5.5。

常用分布的分位数可从分布函数表中查得，从上述定义和图可以看出，$x'_\alpha=x_{1-\alpha}$，知道 α(下侧)分位数，立即可转化为 $1-\alpha$ 上侧分位数。中位数就是 0.5 分位数，分位数在实际中也常使用。譬如，轴承的寿命是较长的，为了比较

轴承寿命的长短，常用 $\alpha = 0.1$ 的分位数 $x_{0.1}$，它表示有 10% 的轴承在 $x_{0.1}$ 前损坏，显然，对应较大 $x_{0.1}$ 的轴承质量较高。



(a) α 下侧分位数　　(b) α 上侧分位数

图 2.5.5

例 2.5.4（正态分布的分位数） 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 p 分位数 x_p 满足如下方程

$$\Phi\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right)=p$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数，其反函数记为 $\Phi^{-1}(\cdot)$，则有

$$\begin{aligned} x_p &= \mu+\sigma\Phi^{-1}(p) \\ &= \mu+\sigma u_p \end{aligned}$$

其中 $\Phi^{-1}(p)=u_p$，或 $\Phi(u_p)=p$，这表明 u_p 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的 p 的分位数，它可从标准正态分布表中查得。譬如，正态分布 $N(100,8^2)$ 的 0.9 分位数为

$$x_{0.9}=100+8u_{0.9}$$

从标准正态分布表（附表 3）查得 $u_{0.9}=1.282$，代入上式，可算得 $x_{0.9}=110.256$。

分位数在统计中经常使用，特别是统计中常用的三大分布分位数，为此特地编制了它们的分位数表，它们是：t 分布分位数表（附表 4）；χ^2 分布分位数表（附表 5）和 F 分布分位数表（附表 6），从这些表上可直接查得各种分位数。

*2.5.7 众数

定义 2.5.7 假如 X 是离散随机变量，则 X 最可能取的值（即使概率 $P(X=x)$ 达到最大的 x 值）称为 ***X* 分布的众数**。假如 X 是连续随机变量，则使其密度函数 $p(x)$ 达到最大的 x 值称为 X 的众数，X 的众数常记为 $\mathrm{Mod}(X)$。

众数也是随机变量的一种位置特征数，在单峰分布场合，众数附近常是随机变量最可能取值的区域，故众数及其附近区域是受到人们特别注视的。譬

如，生产服装、鞋、帽等的工厂很重视最普遍、最众多的尺码，生产这种尺码给他们带来的利润最大，这种最普遍、最众多的尺码就是众数。

例 2.5.5 寻求二项分布 $b(n,p)$ 的众数。

解：设 $X \sim b(n,p)$，记

$$b(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\cdots n$$

先比较相邻二个概率

$$\frac{b(x)}{b(x-1)} = \frac{(n-x+1)p}{x(1-p)} = 1 + \frac{(n+1)p - x}{x(1-p)}$$

当 $x < (n+1)p$ 时，上述比值大于 1，故 $b(x)$ 增加；当 $x > (n+1)p$ 时，上述比值小于 1，故 $b(x)$ 减少，可见 $b(x)$ 在 $(n+1)p$ 附近达到最大；当 $x = (n+1)p = m$ 为整数时，$b(m) = b(m-1)$，且为最大，这时二项分布 $b(n,p)$ 有两个众数，它们是 $(n+1)p$ 和 $(n+1)p-1$。

当 $(n+1)p$ 不为整数时，必存在一个整数 m，使得

$$(n+1)p - 1 < m < (n+1)p$$

这时 $b(m)$ 达到最大，此 m 就是 $(n+1)p$ 中的整数部分，可记为 $m = [(n+1)p]$。综合上述，二项分布 $b(n,p)$ 的众数为

$$\mathrm{Mod}(X) = \begin{cases} (n+1)p \text{ 和 } (n+1)p-1, & \text{当 } (n+1)p \text{ 为整数} \\ [(n+1)p] & \text{当 } (n+1)p \text{ 不为整数} \end{cases}$$

譬如，二项分布 $b(6,0.9)$ 的众数 $\mathrm{Mod}(X) = [(6+1) \times 0.9] = 6$，二项分布 $b(6,0.5)$ 的众数 $\mathrm{Mod}(X) = [(b+1) \times 0.5] = 3$。最后，二项分布 $b(7,0.5)$ 的众数有两个，$\mathrm{Mod}(X) = 3$ 和 4，因为这时 $(n+1)p = (7+1) \times 0.5 = 4.0$ 为整数。

第三章 多维随机变量

§3.1 多维随机变量及其联合分布

3.1.1 多维随机变量

在有些随机现象中，每个基本结果 ω 只用一个随机变量 $X_1(\omega)$ 去描述是不够的，而要同时用多个，譬如同时用 n 个随机变量 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ 去描述。这样就引出多维随机变量概念。

定义 3.1.1 若随机变量 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ 定义在同一个基本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 上，则称

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

是一个 **n 维随机变量**，或称 **n 维随机向量**。显然，一维随机变量就是前一章叙述的随机变量。

例 3.1.1 多维随机变量的例子

(1) 在研究四岁至六岁儿童生长发育中，很注意每个儿童(基本结果 ω)自

己的身高 $X_1(\omega)$ 和体重 $X_2(\omega)$。这里 $(X_1(\omega),X_2(\omega))$ 就是一个二维随机变量。

(2) 每个家庭(基本结果 ω) 的支出主要用在衣食住行四个方面。假如用 $X_1(\omega),X_2(\omega),X_3(\omega),X_4(\omega)$ 分别表示每个家庭 ω 的衣食住行的花费占其总收入(按年计算) 的百分比，则 (X_1,X_2,X_3,X_4) 就是很引起经济学家兴趣的四维随机变量。

(3) 从一批产品中随机抽取 n 件，一等品、二等品、三等品和不合格品的件数分别记为 X_1,X_2,X_3,X_4，则 (X_1,X_2,X_3,X_4) 就是人们很关心的四维随机变量，这里基本结果 ω 可以用长为 n 的由 1,2,3,4 等四个数字组成的序列表示，其中 1,2,3 分别表示一等品、二等品、三等品，4 表示不合格品。

(4) 炮弹的着落点的位置 (X,Y) 就是指挥官关心的二维随机变量。

(5) 遗传学家很关心儿子的身高 X 与父亲的身高 Y 之间的关系，这里 (X,Y) 就是一个二维随机变量。

一般说来，若需要同时研究 n 个随机变量时，就会遇到多维随机变量。

3.1.2 联合分布函数

多维随机变量的概率分布可以用联合分布函数来表示。

定义 3.1.2 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机变量，对任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 所组成的 n 个事件"$X_1\leqslant x_1$"，"$X_2\leqslant x_2$"，…，"$X_n\leqslant x_n$" 同时发生的概率

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n) \qquad (3.1.1)$$

称为 n 维随机变量 X 的**联合分布函数**。

在二维随机变量 (X,Y) 场合，联合分布函数 $F(x,y)$ 是交事件"$X\leqslant x$" $\cap$ "$Y\leqslant y$" 的概率，假如让 $y\to\infty$，则事件"$Y<\infty$" 是必然事件，从而上述交事件变为"$X\leqslant x$" $\cap\,\Omega=$ "$X\leqslant x$"，而其概率就是 X 的分布函数 $F_X(x)$，上述极限过程可表示为

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty}F(x,y)&=P(X\leqslant x,Y<\infty)\\&=P(X\leqslant x)=F_X(x)\end{aligned}$$

这个极限过程常用 $F(x,\infty)$ 表示，即

$$\lim_{y\to\infty}F(x,y)=F(x,\infty)=F_X(x) \qquad (3.1.2a)$$

类似地，还可从联合分布函数 $F(x,y)$ 获得 Y 的分布函数

$$\lim_{x\to\infty}F(x,y)=F(\infty,y)=F_Y(y) \qquad (3.1.2b)$$

这两个分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 又称为联合分布函数 $F(x,y)$ 的**边缘分布函数**，或简称**边缘分布**。

例 3.1.2 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

这个分布称为**二维指数分布**。其中参数 $\lambda\geqslant 0$。

利用(3.1.2)，容易求得 (X,Y) 的边缘分布函数

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0\quad, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0\quad, & x\leqslant 0\end{cases}$$

它们都是一维指数分布函数，且与参数 λ 无关。不同的 λ 对应不同的二维指数分布，而它们的两个边缘分布不变，这说明：二维联合分布不仅含有每个分量的概率分布，而且还含有两个变量 X 与 Y 之间关系的信息，这正是引起人们研究多维随机变量的原因。

若取参数 $\lambda=1$，可以计算下列事件的概率：

$$\begin{aligned}P(X\leqslant 0.5,Y\leqslant 0.3)&=F(0.5,0.3)\\&=1-e^{-0.5}-e^{-0.3}+e^{-0.95}=0.03939\\P(X\leqslant 0.5,Y\leqslant 1.3)&=F(0.5,1.3)\\&=1-e^{-0.5}-e^{-1.3}+e^{-2.45}=0.20723\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(X\leqslant 0.5,0.3<Y\leqslant 1.3)\\&\quad=P(X\leqslant 0.5,Y\leqslant 1.3)-P(X\leqslant 0.5,Y\leqslant 0.3)\\&\quad=F(0.5,1.3)-F(0.5,0.3)\\&\quad=0.20723-0.03939=0.1678\end{aligned}$$

3.1.3 多维离散随机变量

像一维随机变量那样，多维随机变量也有离散与连续两类，这里先研究二维离散随机变量。多维离散随机变量的研究亦可类似进行。

例 3.1.3 假如二维随机变量 (X,Y) 的每个分量都是一维离散随机变量，则称 (X,Y) 为二维离散随机变量。若设 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots\}$ 分别为 X 和 Y 的全部可能取值，则概率

$$P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,\quad j=1,2,\cdots$$

全体称为 (X,Y) 的概率分布，简称二维离散分布。

显然，作为二维离散分布$\{p_{ij}\}$应满足条件：

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \tag{3.1.3}$$

若记

$$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, \qquad p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij} \tag{3.1.4}$$

则(X,Y)的二个边缘分布为

$$\begin{aligned} P(X = x_i) &= P(X = x_i, Y < \infty) \\ &= \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_j p_{ij} = p_{i\cdot}, \quad i = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{3.1.5a}$$

$$p(Y = y_i) = \sum_j p_{ij} = p_{\cdot j}, \quad j = 1,2,\cdots \tag{3.1.5b}$$

例 3.1.3 设(X,Y)的联合分布如下表所示：

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.4	0.1
1	0.2	0.2	0

其中X可取0与1两个值，Y可取0,1,2等三个值，表的右下方是联合概率，譬如$P(X=0,Y=1)=0.4$。这6个联合概率满足条件(3.1.3)，故组成二维随机变量$(X、Y)$的联合概率分布。

(1) 寻求概率$P(X+Y\leqslant 1)$。

由于事件"$X+Y\leqslant 1$"是由数对(0,0),(0,1)和(1,0)组成，故它们对应概率之和就是所求事件的概率，即

$$\begin{aligned} P(X+Y\leqslant 1) &= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0) \\ &= 0.1+0.4+0.2=0.7 \end{aligned}$$

(2) 寻求X的边缘分布。

由于事件"$X=0$"是由数对(0,0),(0,1),(0,2)组成，故

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2) \\ &= 0.1+0.4+0.1=0.6 \end{aligned}$$

这正是上述联合分布表中第一行三个概率之和。类似地，上表中第二行三个概率之和就是"$X=1$"的概率，即

$$P(X=1)=0.2+0.2+0=0.4$$

上述二个行和正好组成X的边缘分布，类行地，表上三个列和正好组成Y的边缘分布。具体可用下表表示：

X \ Y	0	1	2	和行
0	0.1	0.4	0.1	0.6
1	0.2	0.2	0	0.4
列和	0.3	0.6	0.1	1.0

由于行和位于上表的右边，列和位于上表的下边，边缘分布的名称也就由此得来。

例 3.1.4(多项分布) 多项分布是最重要的多维离散分布，它是二项分布的推广。大家知道，二项分布产生于n次独立重复贝努里试验，其中每次试验仅有两个可能结果：成功与失败，如今多项分布产生于n次独立重复试验，其中每次试验有多于两个结果。譬如把制造的产品分为一等品、二等品、三等品和不合格品等四种状态；学生考试成绩被评为A、B、C、D和E等五级；一项试验被判为成功、失败和无确定结果等三种可能。一般，当把一个总体按某种属性分成几类时，就会产生多项分布，现把多项分布产生的条件叙述如下：

(1) 每次试验可能有r种结果：$A_1, A_2, \cdots, A_r$。

(2) 第i种结果A_i发生的概率为p_i, ,$i = 1,2,\cdots,r$,且

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$$

(3) 对上述试验独立地重复n次，这n次试验的结果可用某些A_i组成(允许重复)的序列(长为n)表示，譬如，下面的序列就是n次重复试验的一个结果

$$\underbrace{A_1A_1\cdots A_1}_{n_1\text{个}}\ \underbrace{A_2A_2\cdots A_2}_{n_2\text{个}}\cdots\ \underbrace{A_rA_r\cdots A_r}_{n_r\text{个}} \tag{3.1.6}$$

其中诸n_i为非负整数，且$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$。由于独立性，这个结果发生的概率为

$$p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$$

容易看出，若在序列(3.1.6)中各A_i出现次数不变，而把它们打乱后重新排成一列，不同的排列共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

个，并且每个序列的概率仍为$p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$。

(4) 在上述n次试验中以X_1表示A_1出现次数，X_2表示A_2出现次数，$\cdots$,

X_r 表示 A_r 出现次数，则$(X_1,X_2,\cdots,X_r)$是 r 维随机变量，并且事件 $X_1=n_1$，$X_2=n_2,\cdots,X_r=n_r$ 同时发生的概率为

$$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\cdots,X_r=n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r} \quad (3.1.7)$$

其中诸 n_i 为非负整数，且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$。这就是**多项分布**，记为 $M(n,p_1,p_2,\cdots,p_r)$。由多项式 n 次幂的展开式可知

$$(p_1+p_2+\cdots+p_r)^n=\sum\sum\cdots\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}=1 \quad (3.1.8)$$

所有形如(3.1.7)所示的概率组成了一个多维离散分布，多项分布的名称也由此而来。

当 $r=2$ 时，多项分布就退化为二项分布。

多项分布有广泛应用。譬如，把产品分为一等品(A_1)，二等品(A_2)，三等品(A_3)和不合格品(A_4)等四类时，若设

$$P(A_1)=0.15,\ P(A_2)=0.60,\ P(A_3)=0.20,\ P(A_4)=0.05$$

如今从一大批产品中随机取出 10 个，其中一等品有 2 个、二等品有 6 个、三等品有 2 个、而没有不合格品的概率为

$$\begin{aligned}&P(X_1=2,\ X_2=6,\ X_3=2,\ X_4=0)\\&=\frac{10!}{2!\ 6!\ 2!\ 0!}(0.15)^2(0.60)^6(0.20)^2(0.50)^0\\&=0.0529\end{aligned}$$

其中 X_1,X_2,X_3,X_4 分别表示 10 个产品中一、二、三等品和不合格品的个数。

可以证明：多项分布 $M(n,p_1,p_2\cdots,p_r)$ 中任一个分量的边缘分布是二项分布。以 X_1 为例，X_1 可以取 $0,1,2,\cdots,n$ 个值中任一个。由边缘分布定义可知

$$P(X_1=n_1)=\sum\sum\cdots\sum_{n_2+\cdots+n_r=n-n_1}\frac{n!}{n_1!\ n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$$

其中 $n_2,\cdots,n_r$ 分别是 $X_2,\cdots,X_r$ 的取值，都是非负整数，其和必为 $n-n_1$。若令

$$p_2'=\frac{p_2}{1-p_1},\quad \cdots,\quad p_r'=\frac{p_r}{1-p_r}$$

则 $p_2'+\cdots+p_r'=(p_2+\cdots+p_r)/(1-p_1)=1$。若把上式改写为

$$\begin{aligned}P(X_1=n_1)=&\left(\sum\sum\cdots\sum_{n_2+\cdots+n_r=n-n_1}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\cdots n_r!}p'^{n_2}_2\cdots p'^{n_r}_r\right)\\&\times\left(\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}p_1^{n_1}(1-p_1)^{n-n_1}\right)\end{aligned}$$

利用 3.1.8 式，上式右端第一个括号为 1，于是得到

$$P(X_1 = n_1) = \binom{n}{n_1} p_1^{n_1}(1 - p_1)^{n-n_1}, \quad n_1 = 0,1,\cdots,n$$

这正是二项分布 $b(n,p_1)$，即 n 次独立重复试验（每次试验只有二种可能 A_1 和 $\overline{A}_1 = A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r$）中 A_1 出现 n_1 次的概率。类似地可写出 X_2 的边缘分布为 $b(n,p_2)$ 等等。

3.1.4 多维连续随机变量

为简单起见，以下叙述仅对二维连续随机变量进行。读者不难把它推广到三维和更高维场合。

定义 3.1.4 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$。假如各分量 X 和 Y 都是一维连续随机变量，并存在定义在平面上的非负函数 $p(x,y)$，使得

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(x,y)dxdy \tag{3.1.9}$$

则称 (X,Y) 为二维连续随机变量，$p(x,y)$ 称为 (X,Y) 的**联合概率密度函数**，或简称**联合密度**。

在这个定义中特别强调，只有具有联合密度 $p(x,y)$ 的二维随机变量才能称为二维连续随机变量。在给出联合密度 $p(x,y)$ 后，与 (X,Y) 有关的事件“$(X,Y) \in S$”（见图 3.1.1a）的概率都可用二重积分表示，然后设法化为累次积分计算。譬如

$$P(X,Y) \in S) = \iint_S p(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} p(x,y)dydx \tag{3.1.10}$$

当 S 为长方形（见图 3.1.1b）时，可直接用累次积分计算。

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d p(x,y)dydx \tag{3.1.11}$$

其中不等号改为“≤”，(3.1.11) 仍然成立，因为平面上直线的面积为零。

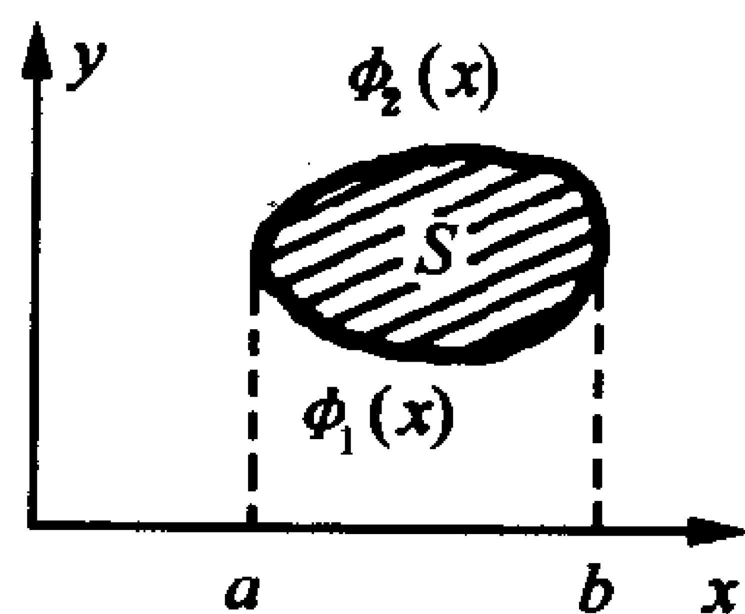


图 3.1.1a

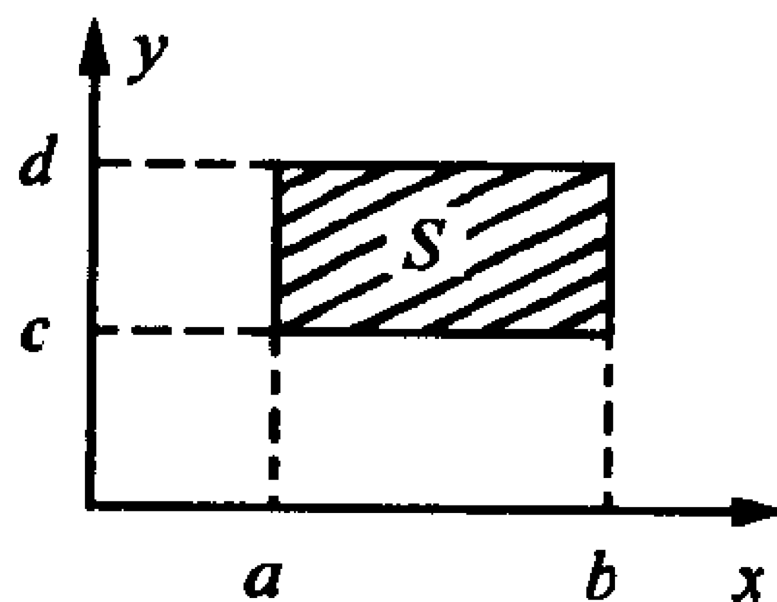


图 3.1.1b

实际中，很多二维连续随机变量的概率分布都是用联合密度 $p(x,y)$ 给出的，不过 $p(x,y)$ 都应满足如下二个条件：

$$\left.\begin{array}{l} p(x,y) \geqslant 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dxdy = 1 \end{array}\right\} \tag{3.1.12}$$

若二维连续分布是用分布函数 $F(x,y)$ 给出的，则由(3.1.9)可知，在 $F(x,y)$ 的偏导数存在的点上可写出其联合密度

$$p(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y) \tag{3.1.13}$$

而在 $F(x,y)$ 的偏导数不存在的点上 $p(x,y)$ 的值可任意用一个常数给出，这不会影响以后有关事件概率的计算结果。因为这类点组成的集合发生的概率为零。

由联合密度 $p(x,y)$ 不难求出各个分量的概率密度。譬如 X 的分布函数可改写为

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\ (X \leqslant x,\ Y < \infty) \\ &= \int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy\right\}dx \\ &= \int_{-\infty}^{x} p_X(x)dx \end{aligned}$$

其中

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy \tag{3.1.14a}$$

就是 X 的概率密度函数，类似可得 Y 的概率密度函数

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx \tag{3.1.14b}$$

$p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$ 又称为(X,Y)的(或 $p(x,y)$ 的) **边缘密度函数**。

例 3.1.5 设(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x}e^{-3y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它场合} \end{cases}$$

试求：(1)$P(X < 1, Y > 1)$；(2)$P(X > Y)$；(3)(X,Y)的边缘密度函数。

解：(1)

$$\begin{aligned} P(X<1,Y>1) &= \int_0^1\int_1^{\infty} 6e^{-2x}e^{-3y}dydx \\ &= 6\int_0^1 e^{-2x}dx\int_1^{\infty} e^{-3y}dy \\ &= 6\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1\left(-\frac{1}{3}e^{-3y}\right)\Big|_1^{\infty} \end{aligned}$$

$$= (1-e^{-2})e^{-3} = 0.8647 \times 0.0498 = 0.0431$$

(2) $$P(X>Y) = \iint\limits_{x>y} 6e^{-2x}e^{-3y}dxdy$$

上述积分区域如图 3.1.2 上的阴影部分,从而容易写出累次积分

$$P(X>Y) = \int_0^{\infty}\int_0^{x} 6e^{-2x}e^{-3y}dydx$$
$$= \int_0^{\infty} 2e^{-2x}(1-e^{-3x})dx$$
$$= \left[-e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{-5x}\right]_0^{\infty}$$
$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

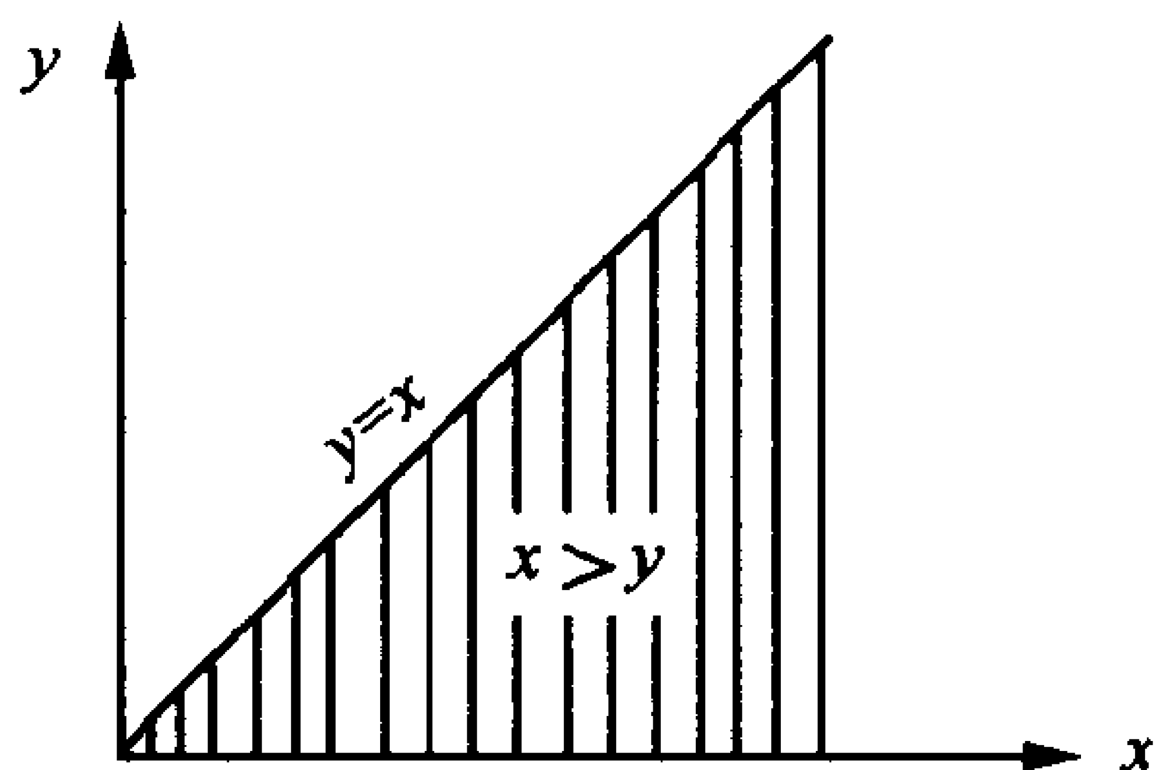


图 3.1.2

(3) $$p_X(x) = \int_0^{\infty} 6e^{-2x}e^{-3y}\alpha y = 2e^{-x}, \quad x>0$$
$$p_Y(y) = \int_0^{\infty} 6e^{-2x}e^{-3y}\alpha x = 2e^{-3y}, \quad y>0$$

而当 $x \leqslant 0$ 时,$p_X(x) = 0$;当 $y \leqslant 0$ 时,$p_Y(y) = 0$。

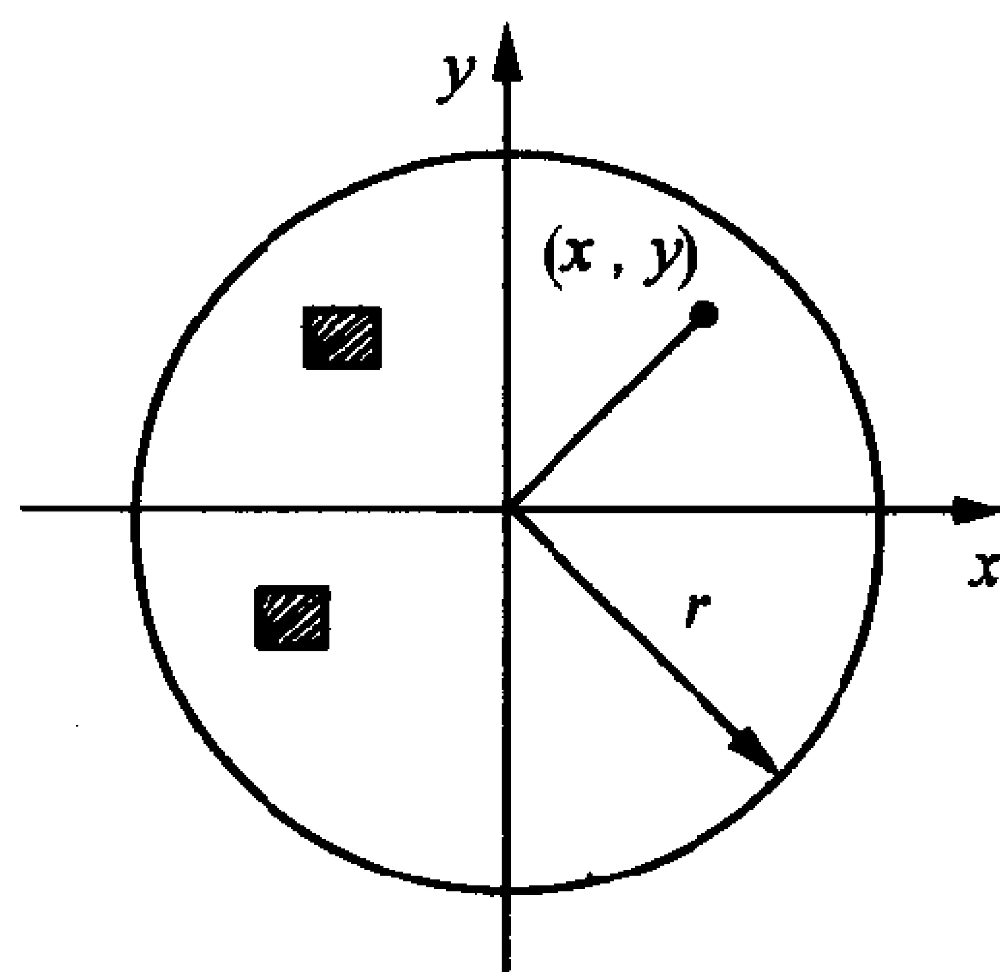


图 3.1.3 二维均匀分布区域

例3.1.6(二维均匀分布) 向半径为 r 的圆内随机投点,落在圆内面积相等的不同区域(如图 3.1.3 上圆内二个正方形)内是等可能的。若把坐标原点放在圆心,落在坐标 (x,y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} c, & \text{当 } x^2+y^2 \leqslant r^2 \\ 0, & \text{当 } x^2+y^2 > r^2 \end{cases}$$

其中 c 为某一常数。这个二维分布称为**在圆上的均匀分布**。类似可定义长方形

上的均匀分布、椭圆上的均匀分布以及平面上任一有限区域上的均匀分布。

(1) 确定 c 的值。

(2) 求 (X,Y) 的边缘密度函数。

(3) 计算落点 (X,Y) 到原点的距离 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 不大于 a 的概率 $(0<a<r)$。

解:(1) 由条件(3.1.12) 可知

$$c\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}dxdy=1$$

由于上述积分表示圆的面积,故等于 πr^2。从而有 $c=(\pi r^2)^{-1}$。

(2) 先求 X 的边缘密度函数,当 $x^2\leqslant r^2$ 时,有

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}dy$$

$$=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}$$

而当 $x^2>r^2$ 时,$p_X(x)=0$。类似地可求出 Y 的边缘密度函数

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}, & y^2\leqslant r^2\\ 0, & y^2>r^2\end{cases}$$

(3) 所求的概率为

$$P(Z\leqslant a)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant a)=P(X^2+Y^2\leqslant a^2)$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}p(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}dxdy$$

$$=\frac{\pi a^2}{\pi r^2}=\frac{a^2}{r^2}$$

例 3.1.7(二维正态分布) 联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_2\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty<x,y<+\infty \qquad (3.1.15)$$

的二维分布称为**二维正态分布**,它是最重要的二维连续分布。它含有五个参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ 和 ρ。其取值范围分别为:

$$-\infty<\mu_1<\infty,\ -\infty<\mu_2<\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,\ -1\leqslant\rho\leqslant 1$$

常把这个分布记为 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。这个密度函数在 $0xy$ 平面上的图形很象一顶四周无限延伸的草帽(见图 3.1.4),其中心在点(μ_1,μ_2) 处。

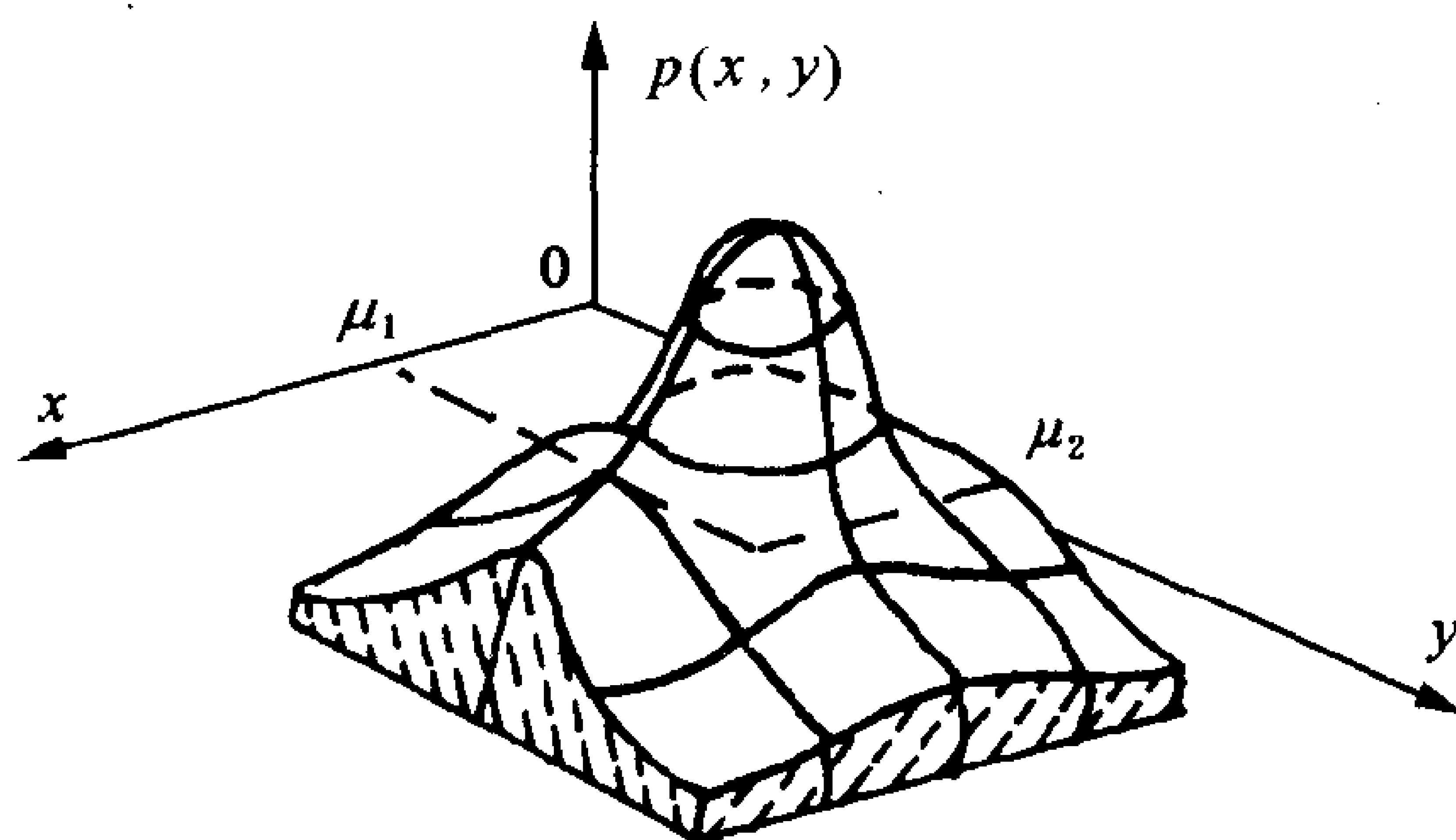


图 3.1.4　二维正态密度函数

下面证明一个重要结论:二维正态分布的边缘分布是一维正态分布。即若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。首先,把二维正态密度函数 $p(x,y)$ 的指数部分(见(3.1.15) 式) 改写为

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}$$

于是 X 的边缘密度函数为

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right\}dy$$

然后对积分变量 y 作如下变换(注意把 x 看作常量):

$$t=\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

则上式可化为

$$p_X(x)=\frac{\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\cdot\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$

注意到上式中的积分恰好等于$\sqrt{2\pi}$，故有

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

这 正是一维正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的密度函数。类似地，可求得 Y 的边缘分布是 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$。

顺便指出，由(3.1.15)式表示的 $p(x,y)$ 显然是非负的，又由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)dx=1$$

因此就验证了(3.1.15)式表示的 $p(x,y)$ 确是一个二维密度函数。

从这个例子还可看出一个有趣的现象：由二维联合分布可以唯一决定其每个分量的边缘分布，但反过来不成立。即知道 X 与 Y 的边缘分布，也不足以决定其联合分布。譬如考虑两个二维正态分布

$$N(0,0,1,1,1/2)\text{ 和 }N(0,0,1,1,1/3)$$

它们的任一边缘分布都是标准正态分布$N(0,1)$。但这两个二维正态分布是不同分布，因为其参数 ρ 的数值不同。引起这个现象的原因是：二维联合分布不仅含有每个分量的概率分布，而且还含有两个变量X与Y之间关系的信息，后者正是人们研究多维随机变量的原因。以后会看到，这里参数 ρ 的值将会反映二个变量 X 与 Y 之间关系密切的程度。

§3.2 随机变量的独立性

3.2.1 随机变量的独立性

在多维随机变量中，各分量的取值有时会相互影响，有时会毫无影响。譬如在研究父子身高中，父亲的身高Y往往会影响儿子的身高X。假如让父子各掷一颗骰子，那各出现的点数Y_1与X_1相互间就看不出有任何影响。这种相互之间没有任何影响的随机变量称为相互独立的随机变量。本节将研究这类多维随机变量。另一类将在 §3.4 中研究。

定义 3.2.1 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是n维随机变量。若对任意n个实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$所组成的n个事件“$X_1\leqslant x_1$”，“$X_2\leqslant x_2$”…“$X_n\leqslant x_n$”相互独立，即有

$$P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)$$
$$=P(X_1\leqslant x_1)p(X_2\leqslant x_2)\cdots P(X_n\leqslant x_n)\qquad(3.2.1)$$

或

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n)\qquad(3.2.2)$$

则称 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**，否则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **不相互独立**，或称**相依的**。其中 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数，$F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_n(x_n)$ 分别是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的边缘分布函数。

例 3.2.1 在例 3.1.2 中已给出二维指数分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy}, & \text{当 } x>0, y>0\\ 0 \quad, & \text{其它场合}\end{cases}$$

其中 $\lambda \geqslant 0$。它的二个边缘分布函数分别是

$$F_1(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & \text{当 } x>0\\ 0 \quad, & \text{当 } x\leqslant 0\end{cases}$$

$$F_2(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & \text{当 } y>0\\ 0 \quad, & \text{当 } y\leqslant 0\end{cases}$$

由于两个边缘分布函数都不含参数 λ，故在 $\lambda \neq 0$ 时，有

$$F(x,y) \neq F_1(x)F_2(y)$$

这时 X 与 Y 不是相互独立的随机变量。而 $\lambda = 0$ 时，有

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

这时 X 与 Y 是相互独立的随机变量。

在多维离散随机变量场合，独立性条件(3.2.2)等价于下述条件：对任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都有

$$\begin{aligned}&P(X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n)\\ &= P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\cdots P(X_n=x_n)\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

在多维连续随机变量场合，独立性条件(3.2.2)又等价于下述条件：对任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，几乎处处都有

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_1(x_1), p_2(x_2), \cdots, p_n(x_n) \tag{3.2.4}$$

其中 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合密度函数，$p_1(x_1), p_2(x_2), \cdots, p_n(x_n)$ 分别为其 n 个边缘密度函数。这里两个等价性都是可以证明的。下面仅对 $n=2$ 时给出(3.2.4)与(3.2.2)的等价性的证明，其它都省略。

若(3.2.2)成立，即 $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$，对其两端分别对 x 和 y 求导，可得

$$\begin{aligned}p(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2(y)}{\partial y}\\ &= p_1(x)p_2(y)\end{aligned}$$

这个等式对 F_1 和 F_2 不可导点可能不成立，但这些点的全体发生的概率为零，这意味着(3.2.4)式几乎处处成立。反之，若(3.2.4)几乎处处成立，则有

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_1(x)p_2(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{x} p_1(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{y} p_2(y)dy \\ &= F_1(x)\cdot F_2(y)\end{aligned}$$

即(3.2.2)式成立。

例 3.2.2 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$,则$\rho=0$是$X$与$Y$独立的充要条件。实际上当$\rho=0$时,二维正态联合密度函数(3.1.5)为

$$\begin{aligned}p(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \\ &= p_X(x)p_Y(y)\end{aligned}$$

其中$p_X(x)$和$p_Y(y)$分别是X和Y边缘分布(见例3.1.7)。故X与Y独立,这就是充分性。反之,若X与Y独立,则对一切x与y应有$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$。当然在$x=\mu_1,y=\mu_2$也有$p(\mu_1,\mu_2)=p_X(\mu_1)p_Y(\mu_2)$,由此得$\rho=0$,这就是必要性。

例 3.2.3 设$(X_1,X_2,\cdots,X_r)$服从多项分布$M(n,p_1,\cdots,p_r)$,其中诸$p_i>0$。由于每个变量X_i的边缘分布都是二项分布$b(n,p_i)$(见例3.1.4),而其乘积不等于多项分布的联合概率,即

$$\begin{aligned}&p(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_r=x_r) \\ &\quad\neq P(X_1=x_1)P(X_2=x_2),\cdots,P(X_r=x_r)\end{aligned}$$

所以服从多项分布的变量$X_1,X_2,\cdots,X_r$不相互独立。这个结论从直观上看是甚为明显。按多项分布定义应有$X_1+X_2+\cdots+X_r=n$,若$r>2$,则X_1虽不足以唯一决定X_2,但二者有关。譬如,当X_1取n时,$X_2,X_3,\cdots,X_r$都只能取0;当X_1取$n-1$时,$X_2,\cdots,X_r$中只能有一个取1,其它只能取0;当X_1取很大值时,X_2等取大值的可能性就要降低。这一切都说明$X_1,X_2,\cdots,X_r$间存有某种关系,它们是相依的随机变量。

上述随机变量独立性的定义3.2.1与人们的实际经验是一致的。只要两个随机变量间没有任何关系,就可确认它们是相互独立的。所以在实际中,往往不是先用定义3.2.1来验证$X_1,X_2,\cdots,X_n$的独立性,而是尽量从问题的实际背景来判断它们之间的取值有无影响,若无影响,就可认定$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的。然后再由定义3.2.1把每个随机变量的分布(可以是$P(X_i=x_i)$或$p_i(x)$等)连乘起来就可得到其联合分布,从而可以计算有关多维随机

变量的事件概率。下面例子可说明独立性的应用。

例 3.2.4 设 X 与 Y 是两个相互独立且分布相同的随机变量。其共同分布由下列密度函数给出

$$p(x)=\begin{cases}2x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

现要求计算 $P(X+Y\leqslant 1)$。

解：要求概率 $P(X+Y\leqslant 1)$，必需先知道 (X,Y) 的联合分布，如今已知 X 与 Y 相互独立，故其联合密度函数为

$$p(x,y)=p(x)p(y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x,y\leqslant 1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

于是要求的概率是

$$\begin{aligned}P(X+Y\leqslant 1)&=\iint\limits_{x+y\leqslant 1}p(x,y)dxdy\\&=\int_0^1\int_0^{1-x}4xydydx\\&=\int_0^1 2x(1-x)^2dx=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

3.2.2 随机变量函数的独立性

关于随机变量函数的独立性有一些明显的事实，现罗列如下。

(1) X 与 Y 是二个相互独立的随机变量，则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 亦相互独立，其中 $f(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$ 是二个函数。

譬如，若 X 与 Y 相互独立，则 X^2 与 Y^2 亦相互独立，若 a 与 b 是二个常数，则 $aX+b$ 与 e^Y 相互独立，若 X 与 Y 还是正值随机变量，则 $\ln X$ 与 $\ln Y$ 亦相互独立。

(2) 常数 c 与任一随机变量相互独立。

(3) 设 $X_1,\cdots,X_r,X_{r+1},\cdots,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，其中 $1<r<n$，则其部分 $(X_1,\cdots,X_r)$ 与 $(X_{r+1},\cdots,X_n)$ 相互独立，它们的函数 $f(X_1,\cdots,X_r)$ 与 $g(X_{r+1},\cdots,X_n)$ 亦相互独立。

譬如，当 $X_1,\cdots,X_r,X_{r+1},\cdots,X_n$ 相互独立，则有

$\frac{1}{r}(X_1+\cdots+X_r)$ 与 $\frac{1}{n-r}(X_{r+1}+\cdots+X_n)$ 相互独立；

$X_1^2+\cdots+X_r^2$ 与 $X_{r+1}^2+\cdots+X_n^2$ 相互独立；

$\frac{1}{r}(X_1+\cdots+X_r)$ 与 $(X_{r+1}^2+\cdots+X_n^2)^{1/2}$ 相互独立。

3.2.3 最大值与最小值的分布

在这一小节我们将致力于寻求若干个相互独立随机变量的最大值和最小值的分布，为此我们首先必须明确这里所指的最大值与最小值是什么，然后才能去寻求其分布。下面先通过一个简单的例子来说明。

例 3.2.5 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，其中 X_1 以等可能取 0 与 1 两个值，X_2 以等可能取 0,1,2 三个值，也就是说，X_1 与 X_2 的分布分别为

X_1	0	1
P	1/2	1/2

X_2	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

现把 (X_1, X_2) 看作一个二维随机变量，它的取值是数对 (i,j)，$i = 0,1$，$j = 0,1,2$。共有 6 种可能，由于独立性的假设，这 6 种可能数对也是等可能的，因为

$$P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i)P(X_2 = j) = 1/6$$

这两个随机变量 X_1 与 X_2 的最大值与最小值可记为

$$Y = \max(X_1, X_2), \qquad Z = \min(X_1, X_2)$$

每当 X_1 取值 i 时，X_2 取值 j 时，Y 的相应取值为 $\max(i,j)$，Z 的相应取值为 $\min(i,j)$。由此可见，Y 与 Z 都是 X_1 与 X_2 的函数，并且这个函数不能用初等函数表示。求它们的分布要从它们各自的定义出发，由于 (X_1, X_2) 的取值只有 6 种可能，我们把它罗列出来，相应 Y 与 Z 的取值也可罗列出来，详见表 3.2.1。

表 3.2.1 (X_1, X_2), Y, Z 的取值

$(X_1,$	$X_2)$	Y	Z
0	0	0	0
0	1	1	0
0	2	2	0
1	0	1	0
1	1	1	1
1	2	2	1

从表 3.2.1 上立刻可看出 Y 只可能取 0,1,2 三值，Z 只可能取 0,1 二个值，但都不是等可能，而是如下分布

Y	0	1	2
P	1/6	3/6	2/6

Z	0	1
P	2/3	1/3

这样我们就求得了最大值Y与最小值Z的分布。从分布上可看出，Y与Z是不同于X_1与X_2的两个新的分布，相应的随机变量Y与Z不相互独立，这只要看表3.2.1的第一行就可看出，该表第一行意味着$P(Y=0,Z=0)=1/6$，而$P(Y=0)P(Z=0)=(1/6)\times(2/3)=1/9$。这两个值不相等就破坏了独立性。

寻求若干个相互独立随机变量最大值与最小值的分布常常是对连续随机变量进行的，下面将在一般场合讨论寻求最大值与最小值的分布的一般方法。

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立同分布的n个随机变量，它们共同的分布函数为$F_X(x)$，共同的密度函数为$p_X(x)$，现要寻求它们的最大值Y与最小值Z的分布，其中

$$Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n),\qquad Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

先考察Y的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant y)$$

其中事件“$\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant y$”等价于事件“$(X_1\leqslant y,X_2\leqslant y,\cdots,X_n\leqslant y)$”因为$n$个随机变量的最大值不超过$y$必导致其中每一个都不超过$y$；反之，若$n$个随机变量中每个都不超过$y$必导致其最大值不超过$y$，再考虑到独立性，立即可得

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(X_1\leqslant y,X_2\leqslant y,\cdots,X_n\leqslant y)\\&=P(X_1\leqslant y)P(X_2\leqslant y)\cdots P(X_n\leqslant y)\\&=[F_X(y)]^n\end{aligned}$$

这就是最大值Y的分布函数，对其求导，立即可得Y的密度函数

$$p_Y(y)=n[F_X(y)]^{n-1}p_X(y)$$

再考察Z的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(X\leqslant z)=P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant z)\\&=1-P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>z)\\&=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z)\\&=1-P(X_1>z)P(X_2>z),\cdots,P(X_n>z)\\&=1-[1-F_X(z)]^n\end{aligned}$$

这就是最小值Z的分布函数，对其求导，可得Z的密度函数

$$p_Z(z)=n[1-F_X(z)]^{n-1}p_X(z)$$

综合上述，可得如下定理。

定理 3.2.1　设$X_2,X_2,\cdots,X_n$是n个相互独立同分布随机变量，$F_X(x)$和$p_X(x)$是它们的分布函数与密度函数，则其最大值$Y=\max(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)$

的分布函数与密度函数分别为

$$F_Y(y) = [F_X(y)]^n \tag{3.2.5}$$

$$p_Y(y) = n[F_X(y)]^{n-1}p_X(y) \tag{3.2.6}$$

而其最小值 $Z = \min(X_2, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数与密度函数分别为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n \tag{3.2.7}$$

$$p_Z(z) = n[1 - F_X(z)]^{n-1}p_X(z) \tag{3.2.8}$$

例 3.2.6 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 n 个相互独立、且都服从均匀分布 $U(0,1)$ 的随机变量，则诸 X_i 的分布函数与密度函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leqslant x \end{cases} \qquad p_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是最大值 Y 与最小值 Z 的密度函数可从(3.2.6)和(3.2.8)获得

$$p_Y(y) = \begin{cases} ny^{n-1}, & 0 < y < 1 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \begin{cases} n(1-z)^{n-1}, & 0 < z < 1 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

不难看出，$p_Y(y)$ 是贝塔分布 $\mathrm{Be}(n,1)$ 的密度函数；$p_Z(z)$ 是贝塔分布 $\mathrm{Be}(1,n)$ 的密度函数。

3.2.4 卷积公式

当随机变量 X 与 Y 相互独立时，如何由 X, Y 的分布求出 $X+Y$ 的分布在实际中是很重要问题，在离散和连续场合寻求 $X+Y$ 的分布都各有一个简便的卷积公式，下面我们来叙述它。

定理 3.2.2(泊松分布的卷积) 设 $X \sim P(\lambda_1)$，$Y \sim P(\lambda_2)$，且 X 与 Y 独立，则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$。

这个定理告诉我们，两个相互独立的泊松变量之和仍为泊松变量。

证：由于泊松变量 X 与 Y 可取所有非负整数，故其和 $X+Y$ 也只可取所有非负整数。因为对任一非负整数 k，事件“$X+Y=k$”可以写成如下 $k+1$ 个互不相容事件之并：

$$\text{“}X=0, Y=k\text{”}, \text{“}X=1, Y=k-1\text{”}, \cdots, \text{“}X=k, Y=0\text{”}$$

考虑到独立性，可得

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \tag{3.2.9}$$

这就是离散形式的卷积公式，把泊松概率代入上式，可得

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\right)\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

由于上式中的括号内的量恰好等于$(\lambda_1+\lambda_2)^k$，所以

$$P(X+Y=k) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, \quad k=0,1,\cdots$$

这就是参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布，即 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

在概率论中把寻求独立随机变量和的分布的运算称为卷积运算，并以符号“$*$”表示。上述结果可表示为

$$P(\lambda_1) \times P(\lambda_2) = P(\lambda_1+\lambda_2) \tag{3.2.10}$$

这一简明表示便于我们推广。譬如三个相互独立的泊松变量之和的分布为

$$P(\lambda_1) \times P(\lambda_2) \times P(\lambda_3) = P(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

又如 n 个独立同分布的泊松变量之和的分布为

$$\underbrace{P(\lambda) \times P(\lambda) \times \cdots \times P(\lambda)}_{n\text{个}} = P(n\lambda) \tag{3.2.11}$$

这些结果是很容易看出的。

定理 3.2.3（二项分布的卷积） 设 $X \sim b(n,p)$，$Y \sim b(m,p)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y \sim b(n+m,p)$。

这个定理告诉我们，成功概率 p 相同的两个相互独立的二项变量之和仍为二项变量。

证：由于 X 可取 $0,1,\cdots,n$ 的值，Y 可取 $0,1,\cdots,m$ 的值，故 $X+Y$ 可取 $0,1,\cdots,n+m$ 的值。再用卷积公式(3.2.9)可得

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\left[\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\right]\left[\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}\right]$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\right]p^k(1-p)^{n+m-k}$$

应用组合恒等式

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

可得

$$P(X+Y=k)=\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}$$

这就是二项分布 $b(n+m,p)$，其结果可用如下卷积公式表示

$$b(n,p)\times b(m,p)=b(n+m,p) \tag{3.2.11}$$

要注意的是，两个二项分布中的成功概率 p 要相同，否则上述卷积公式不成立。这里 p 起着单位尺度的作用，两个单位尺度相同的变量才可以相加。

容易看出，上述结果可以推广到有限个二项分布场合。譬如，n 个相互独立的二点分布 $b(1,p)$ 的卷积为

$$\underbrace{b(1,p)\times b(1,p)\times\cdots\times b(1,p)}_{n\text{个}}=b(n,p) \tag{3.2.12}$$

这表明：若进行 n 次独立贝努里试验，记 X_i 为第 i 次贝努里试验中成功出现的次数（非 0 即 1），X 为成功出现的总次数，则 X 是 n 个相互独立随机变量 X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 之和，即 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$。类似地可把服从二项分布 $b(m,p)$ 的随机变量 Y 进行分解，可得 $Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_m$，其中 Y_j 是 m 次独立贝努里试验的第 j 次中成功出现的次数。当 X 与 Y 独立时，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 亦相互独立，从而 $X+Y$ 可看作 $n+m$ 次独立贝努里试验中成功出现的次数，故 $X+Y\sim b(n+m,p)$。

在连续随机变量场合，寻求独立随机变量和的密度函数有如下的一个连续形式卷积公式：

定理 3.2.4（卷积公式） 设 X 与 Y 为两个相互独立的连续随机变量，其密度函数分别为 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$，则其和 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy \tag{3.2.13}$$

证：$Z=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P(X+Y\leqslant z)&=\iint_{x+y\leqslant z}p_X(x)p_Y(y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{z-y}p_X(x)dx\right\}p_Y(y)dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}F_X(z-y)p_Y(y)dy\end{aligned}$$

其中 F_X 为 X 的分布函数。对上式求导，可得 Z 的密度函数

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} F_X(z-y) p_Y(y) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(z-y) p_Y(y) dy$$

这就是连续随机变量场合下的卷积公式(3.2.13)。

下面对正态分布和伽玛分布使用这个公式。

定理 3.2.5(正态分布的卷积) 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

证：由于 X 与 Y 都在整个实数轴上取值，故其和 $Z = X+Y$ 也在整个实数轴上取值。利用卷积公式(3.2.13)可得 Z 的密度函数。按卷积公式应先把 X 的密度函数 $p_X(x)$ 中的 x 用 $z-y$ 代替，而 Y 的密度函数 $p_Y(y)$ 不变，代入卷积公式后，即得

$$P_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{ -\frac{(z-y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \right) \times$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{ -\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\} \right) dy$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(z-y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \right\} dy$$

经过一些代数运算，不难得到

$$\frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = \frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + A\left(y - \frac{B}{A} \right)^2$$
$$A = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}, \qquad B = \frac{z-\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}$$

代回原式，可得

$$p_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \right\}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{A}{2} (y - \frac{B}{A})^2 \right\} dy$$

利用正态分布性质，上式中的积分等于 $(2\pi/A)^{\frac{1}{2}}$。于是

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \right\}$$
$$(-\infty < z < \infty)$$

这正是均值为 $\mu_1+\mu_2$，方差为 $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ 的正态分布。这表明：两个独立的正态变量之和仍为正态变量，其参数对应相加，即

$$N(\mu_1,\sigma_1^2) * N(\mu_2,\sigma_2^2) = N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2) \qquad (3.2.14)$$

这一简明表示便于我们推广上述结果。譬如三个相互独立的正态变量之和的分布为

$$N(\mu_1,\sigma_1^2) * N(\mu_2,\sigma_2^2) * N(\mu_3,\sigma_3^2) = N(\mu_1+\mu_2+\mu_3,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)$$

例 3.2.7 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为相互独立同分布的正态变量，其共同分布为 $N(\mu,\sigma^2)$，现要求其算术平均数 $\overline{X}=(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$ 的分布。

解：由正态分布的卷积公式可知

$$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

再利用正态变量的线性变换（见习题 2.3.13）可知

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n) \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

由此可见，算术平均数 $\overline{X}$ 仍服从正态分布，其均值与 X_1 的均值 μ 相同，但其方差缩小了 n 倍，为 σ^2/n，其标准差缩小了 $\sqrt{n}$ 倍，为 $\sigma/\sqrt{n}$。这表明：$\overline{X}$ 的分布更显集中趋势，图 3.2.1 示意了这种变化。

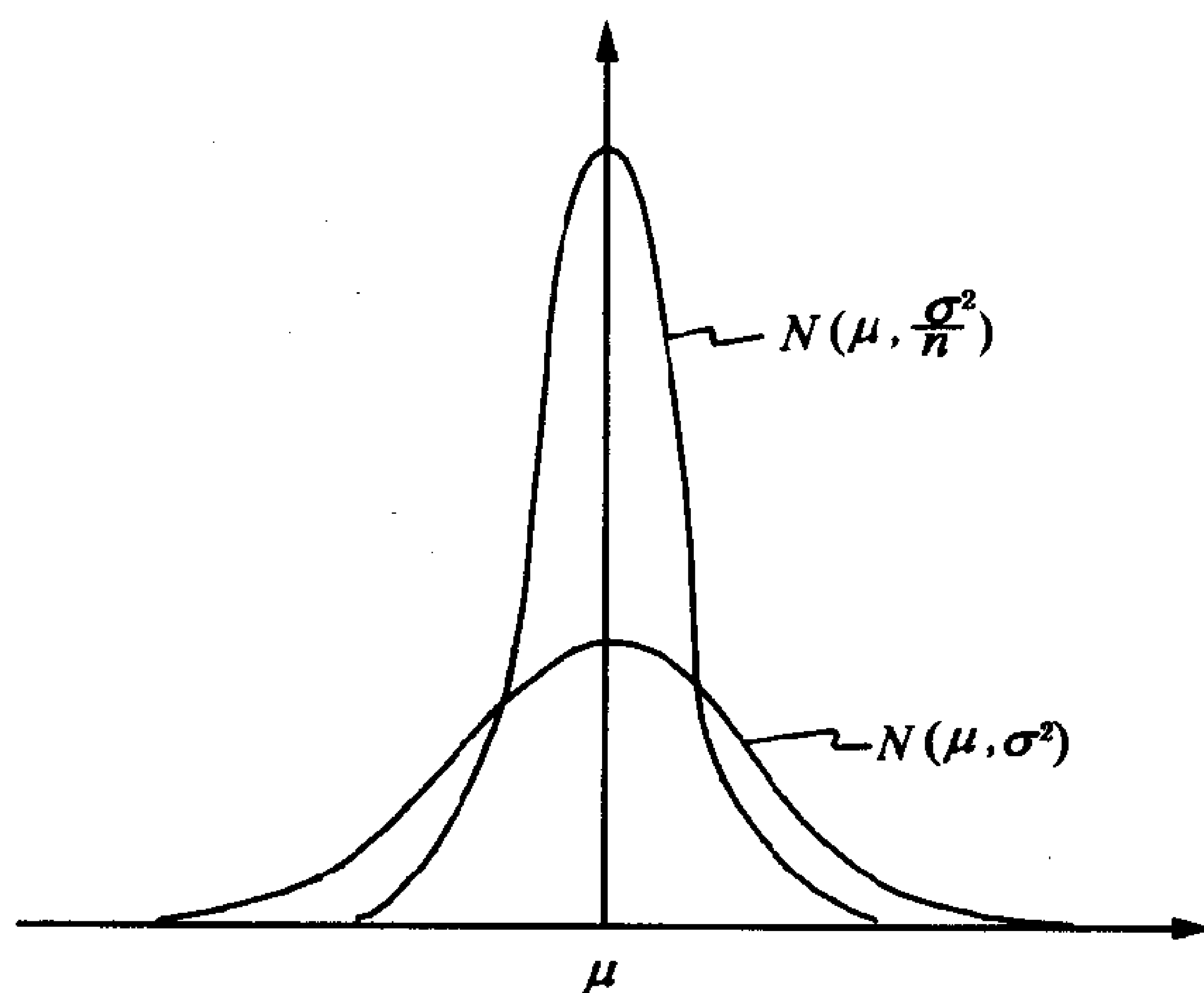


图 3.2.1 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ 的密度曲线

定理 3.2.6（伽玛分布的卷积） 设 $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$。

证：由于 X 与 Y 的取值均为正实数，其和的取值也为正实数。故当 $z\leqslant 0$ 时，有 $p_Z(z)=0$；而当 $z>0$ 时，可应用卷积公式（3.2.13）要使被积函数 $p_X(z$

$-y)p_Y(y)>0$，必须 $z-y>0$ 和 $y>0$ 同时成立，这就意味着积分变量 y 应在 0 到 z 中变化，即

$$\begin{aligned}P_Z(z) &= \int_0^z p_X(z-y)p_Y(y)dy \\ &= \int_0^z \left(\frac{\lambda^{a_1}}{\Gamma(a_1)}(z-y)^{a_1-1}e^{-\lambda(z-y)}\right)\times\left(\frac{\lambda^{a_2}}{\Gamma(a_2)}y^{a_2-1}e^{-\lambda y}\right)dy \\ &= \frac{\lambda^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}e^{-\lambda z}\int_0^z (z-y)^{a_1-1}y^{a_2-1}dy\end{aligned}$$

若取变换 $y=zu, dy=zdu$，上述积分可化为贝塔函数，即

$$\begin{aligned}\int_0^z (z-y)^{a_1-1}y^{a_2-1}dy &= z^{a_1+a_2-1}\int_0^1 (1-u)^{a_1-1}u^{a_2-1}du \\ &= z^{a_1+a_2-1}\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}\end{aligned}$$

代回原式即得

$$p_Z(z) = \frac{\lambda^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1+a_2)}z^{a_1+a_2-1}e^{-\lambda z}, \quad z>0$$

这是形状参数为 a_1+a_2、尺度参数仍为 λ 的 Γ 分布。这个结果可表示为

$$Ga(a_1,\lambda)*Ga(a_2,\lambda) = Ga(a_1+a_2,\lambda) \qquad (3.2.15)$$

这表明：尺度参数相同的两个独立的伽玛变量之和仍是伽玛变量，其形状参数为两个形状参数之和，尺度参数不变。假如尺度参数不同的两个独立的伽玛变量之和就没有上述简明结果，这很像单位不同不宜相加一样。

上述结果可以推广到有限个伽玛变量场合。譬如，有

$$Ga(1,\lambda)*Ga(1,\lambda)*\cdots*Ga(1,\lambda) = Ga(n,\lambda) \qquad (3.2.16)$$

其中 $Ga(1,\lambda)$ 是参数为 λ 的指数分布。上式表明：参数相同的 n 个相互独立的指数变量之和仍是伽玛变量，其形状参数为 n，尺度参数不变。

例 3.2.8（χ^2 分布的由来） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个相互独立、同分布的随机变量，其共同分布为标准正态分布 $N(0,1)$，则 $Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2(n)$。下面来导出 χ^2 分布的密度函数。

解：首先求 $Z=X_1^2$ 的分布。由于 Z 非负，故当 $z\leqslant 0$ 时，$P(Z\leqslant z)=0$，而当 $z>0$ 时，则 Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}P(Z\leqslant z) &= p(X_1^2\leqslant z) = P(-\sqrt{z}\leqslant X_1\leqslant\sqrt{z}) \\ &= F_{X_1}(\sqrt{z}) - F_{X_1}(-\sqrt{z})\end{aligned}$$

对 z 求导数，得 Z 的密度函数

$$p_Z(z) = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}[p_{X_1}(\sqrt{z}) + p_{X_1}(-\sqrt{z})]$$

其中 $p_{X_1}(x)=(\sqrt{2\pi})^{-1}\exp\{-x^2/2\}$ 为标准正态密度函数。代入上式，可得

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{-\frac{1}{2}}e^{-z/2}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

这正是伽玛分布 $Ga\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，即形状参数与尺度参数皆为 $\frac{1}{2}$ 的伽玛分布。

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，故 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 亦为独立同分布，其公共分布为 $Ga\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。再由伽玛分布的卷积公式(3.2.11)可得 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 的分布 $Ga\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$，这正是 χ^2 分布，其密度函数为(见(2.3.30)式)

$$p_n(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

χ^2 分布中的唯一参数 n 就是独立正态变量个数，故称 n 为**自由度**。

§3.3 多维随机变量的特征数

3.3.1 多维随机变量函数的数学期望

在§2.4.1中，我们曾给出一维随机变量函数的数学期望的计算公式(2.4.2)。在那里用一维随机变量 X 的分布就算得其函数 $g(X)$ 的数学期望。如今有了多维随机变量的分布，就可把公式(2.4.2)推广到多维场合。为叙述方便，下面仅对二维随机变量给出计算公式，读者不难把它推广到三维或更高维场合，而以下所涉及的数学期望都假设存在。

定理3.3.1 设 (X,Y) 是二维随机变量，则其函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E[g(X,Y)]=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_i), & \\ \qquad\qquad \text{当}(X,Y)\text{为二维离散随机变量} & \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)p(x,y)dxdy, & \\ \qquad\qquad \text{当}(X,Y)\text{为二维连续随机变量}\end{cases} \tag{3.3.1}$$

其中 $P(X=x_i,Y=y_j),i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$ 为二维离散分布，$p(x,y)$ 为二维联合密度函数。

这个定理的证明超出本书范围，故省略，下面看它的两个特殊场合。

(1) 当 $g(X,Y)=X$，则在二维连续随机变量场合有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left\{\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy\right\}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x)dx$$

其中，$p_X(x)$ 是 X 的边缘密度函数，这表明：分量 X 的数学期望就是用边缘分布算得的数学期望。这个性质对分量 Y 也成立，在离散场合也成立。

(2) 当 $g(X,Y)=(X-EX)^2$，则在二维连续随机变量场合有

$$E(X-EX)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2p(x,y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2p_X(x)dx=\mathrm{Var}(X)$$

这表明：分量X的方差就是用其边缘分布 $p_X(x)$ 算得的方差。这一性质对分量 Y 也成立，在离散场合也成立。

从以上两个特殊场合看出，多维随机变量各分量的期望与方差都可用各自边缘分布算得，但要求 $E(X+Y)$ 与 $E(XY)$ 之类的期望还得用联合分布。

例 3.3.1 设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}12y^2, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

试求 $E(X+Y)$，$E(XY)$，$E(X)$，$E(Y)$，$\mathrm{Var}(X)$，$\mathrm{Var}(Y)$。

解：(1) 求$E(X+Y)$。令 $g(X+Y)=X+Y$，由(3.3.1)式可得

$$E(X+Y)=\int_0^1\int_0^x(x+y)\cdot 12y^2dydx$$
$$=\int_0^1 7x^4dx=\frac{7}{5}$$

(2) 求$E(XY)$。令 $g(X,Y)=XY$，由(3.3.1)式可得

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 12y^2dydx$$
$$=\int_0^1 3x^5dx=\frac{1}{2}$$

(3) 求 $E(X)$ 和 $E(Y)$。先求出 X 与 Y 的边缘密度函数。

$$p_X(x)=\int_0^x 12y^2dy=4x^3,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

$$p_Y(y)=\int_y^1 12y^2dx=12y^2(1-y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1$$

其它场合下 $p_X(x)$ 与 $p_Y(y)$ 均为零，利用上述边缘分布可算得

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 4x^3dx=\frac{4}{5}$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\cdot 12x^2(1-y)dy=\frac{3}{5}$$

(4) 最后求 Var(X) 和 Var(Y)。利用上述边缘分布先算得

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3dx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 y^2\cdot 12x^2(1-y)dy=\frac{2}{5}$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

3.3.2 数学期望与方差的运算性质

在 §2.4.1 中曾给出一个随机变量的数学期望与方差的性质，这里再给出三条性质，它们涉及多个随机变量的数学期望与方差。

定理 3.3.2 设 (X,Y) 为二维随机变量，则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)\tag{3.3.2}$$

证：在连续场合，在(3.3.1)式中令 $g(X,Y)=X+Y$，则有

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)p(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yp(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yp_Y(y)dy\\&=E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

在离散场合亦可类似证得。

这个性质可以简单叙述为“和的期望等于期望的和”。这个性质还可推广到 n 个随机变量场合，即

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\tag{3.3.3}$$

定理 3.3.3 设 (X,Y) 为二维独立随机变量，则有

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

证：在连续场合，由 X 与 Y 独立可知 $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$，在(3.3.1)式中令 $g(X,Y) = XY$，则有

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp_X(x)p_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

在离散场合亦要类似证得。

这个性质可以叙述为“独立随机变量积的期望等于期望之积”，在这里独立性条件是不能忽略的。在例 3.3.1 中，有 $E(X)E(Y) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = 12/25 \neq 1/2 = E(XY)$，即定理 3.3.3 不成立。这是因为例 3.3.1 中定义的二个随机变量 X 与 Y 不独立，即 $p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$。但在例 3.3.1 中，定理 3.3.2 是成立的，$E(X) + E(Y) = 7/5 = E(X+Y)$。这是因为定理 3.3.2 没有独立性的要求，它在任意场合都成立。

定理 3.3.3 也可推广到 n 个独立随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 场合，即

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)。 \tag{3.3.5}$$

定理 3.3.4 设 (X,Y) 为二维独立随机变量，则有

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)。 \tag{3.3.6}$$

证：由方差定义可知

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X \pm Y) &= E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2 \\ &= E[(X - EX) \pm (Y - EY)]^2 \\ &= E(X - EX)^2 + E(Y - EY)^2 \\ &\quad \pm 2E[(X - EX)(Y - EY)] \end{aligned}$$

由 X 与 Y 相互独立，故 $X - EX$ 与 $Y - EY$ 也相互独立，由定理 3.3.3 知

$$E[(X - EX)(Y - EY)] = E(X - EX)E(Y - EY) = 0$$

代入原式，即得(3.3.6)式。

这个性质也可叙述为“独立随机变量和的方差等于方差之和”，这个性质也可推广到 n 个独立随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 场合，即

$$\mathrm{Var}(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) \tag{3.3.7}$$

例 3.3.2 设 X_1, X_2, X_3 为相互独立随机变量，它们的期望依次为 10，4，

7，它们的标准差依次为 3，1，2。现要求 $Y = 2X_1 + 7X_2 - 3X_3$ 的期望、方差与标准差。

解：应用定理 3.3.2 可得 Y 的期望

$$EY = 2E(X_1) + 7E(X_2) - 3E(X_3)$$
$$= 2 \times 10 + 7 \times 4 - 3 \times 7 = 27$$

应用定理 3.3.4 可得 Y 的方差与标准差

$$\mathrm{Var}(Y) = 4\mathrm{Var}(X_1) + 49\mathrm{Var}(X_2) + 9\mathrm{Var}(X_3)$$
$$= 4 \times 3^2 + 49 \times 1^2 + 9 \times 2^2 = 121$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{121} = 11$$

例 3.3.3　试求自由度为 n 的 χ^2 变量的数学期望与方差。

解：由例 3.2.8 知，$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$，其中诸 X_i 相互独立，且皆为标准正态变量。由例 2.5.1 知

$$EX_1^2 = 1, \quad EX_1^4 = 3, \quad \mathrm{Var}(X_1^2) = 2$$

从而可得

$$E(\chi^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_n^2) = n$$
$$\mathrm{Var}(\chi^2) = \mathrm{Var}(X_1^2) + \mathrm{Var}(X_2^2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n^2) = 2n$$

可见，χ^2 变量的数学期望就是其自由度，方差是其自由度的二倍。

3.3.3 协方差

前面讨论的多维随机变量的数学期望与方差只利用其边缘分布所提供的信息，没有涉及诸个分量之间关系的信息。这里将提出一个新的特征数——协方差，它将能反映多维随机变量各分量间的关系。在讨论了协方差性质后，我们将给出若干个随机变量和的方差计算公式。

定义 3.3.1　设 (X,Y) 为二维随机变量，它的二个方差都存在，则称 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 为 X 与 Y 的**协方差**或**相关矩**，记为

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] \tag{3.3.8}$$

从这个定义可以看出，X 与 Y 的协方差是 X 的偏差 $(X-EX)$ 与 Y 的偏差 $(Y-EY)$ 乘积的数学期望。由于偏差可正可负，故协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 可正可负，也可以为零，定义中要求两个方差存在，是为了保证协方差存在。

下面我们来研究协方差的运算性质。

定理 3.3.5　设 X 与 Y 的协方差为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与 X,Y 的次序无关，即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$$

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$； (3.3.9)

(3) 若 X 与 Y 独立，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$。

证：(1) 可从定义 3.3.1 看出，(2) 可从定义 3.3.1 推出

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E[(X-EX)(Y-EY)]\\&=E[XY-XEY-YEX+EX\cdot EY]\\&=E(XY)-EXEY-EXEY+EXEY\\&=E(XY)-EXEY\end{aligned}$$

若 X 与 Y 独立，$E(XY)=EXEY$，从而有 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即(3) 成立。

例 3.3.4 设随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

现要求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

解：从 $p(x,y)$ 的定义域可以看出，虽然 x 与 y 都在 0 与 1 之间，但 y 要小于 x，或 x 要大于 y，而 x 与 y 分别是随机变量 X 与 Y 的取值，所以 Y 的取值总小于 X 的取值，这表明 X 与 Y 不会是相互独立的，其相关程度要看协方差的大小，为计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，我们需要 $E(XY)$，$E(X)$，$E(Y)$ 等值。

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 3x\,dy\,dx\\&=\int_0^1 3x^2\cdot\frac{x^2}{2}dx\\&=\frac{3}{2}\,\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1=\frac{3}{10}\\E(X)&=\int_0^1\int_0^x x\cdot 3x\,dy\,dx\\&=\int_0^1 3x^2\cdot x\,dx=\frac{3}{4}\\E(Y)&=\int_0^1\int_0^x y\cdot 3x\,dy\,dx\\&=\int_0^1 3x\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

最后，按(3.3.8) 式我们得到

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{160}>0$$

这是正相关，随机变量Y的取值将会随X的取值增加而有增加的趋势，但他们之间相关程度不会很大。

定理 3.3.6 记 $\mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2$，$\mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2$，则有

$$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 \leqslant \sigma_X^2\sigma_Y^2 \tag{3.3.10}$$

证：不妨设 $\sigma_X^2>0$。因为当 $\sigma_X^2=0$ 时，则定理 2.4.9 知，X 几乎处处为常数，而常数与 Y 的协方差必为零，这意味着(3.3.10)式两端皆为零，故(3.3.10)式成立。在 $\sigma_X^2>0$ 成立下，考虑 t 的如下二次函数：

$$E[t(X-EX)+(Y-EY)]^2 = t^2\sigma_X^2 + 2t\mathrm{Cov}(X,Y) + \sigma_Y^2$$

上述 t 的二次三项式非负，平方项系数 σ_X^2 为正，则其判别式非正，即

$$[2\mathrm{Cov}(X;Y)]^2 - 4\sigma_X^2\sigma_Y^2 \leqslant 0$$

移项后即得(3.3.10)。

最后，给出随机变量和的方差计算公式，所涉及的方差都假设存在。

定理 3.3.7 对任意二维随机变量 (X,Y)，有 $\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$。

证：由方差定义知

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X\pm Y) &= E[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2\\ &= E[(X-EX)\pm(Y-EY)]^2\\ &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

从这个性质可以看出，当 X 与 Y 独立时，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，从而(3.3.11)就退化为独立随机变量和的方差公式(3.3.6)。这个性质可以推广到任意有限个场合，即

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum\mathrm{Cov}(X_i,Y_j) \tag{3.3.12}$$

这个一般公式的证明类似于(13.3.11)式的证明。

例 3.3.5 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(x+y), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

试计算 $\mathrm{Var}(2X-3Y+8)$。

解：由方差性质知

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(2X-3Y+8) &= \mathrm{Var}(2X)+\mathrm{Var}(3Y)-2\mathrm{Cov}(2X,3Y)\\ &= 4\mathrm{Var}(X)+9\mathrm{Var}(Y)-12\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

为了计算上述方差与协方差，需要先计算 EX，EX^2，EY，EY^2 和 EXY。为此先计算 X 的边缘分布。

$$p_X(x)=\int_0^2 \frac{1}{3}(x+y)dy=\frac{2}{3}(x+1),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

由此可算得 $EX=5/9, EX^2=7/8$，从而 $\mathrm{Var}(X)=13/162$。类似可算得 Y 的边缘分布

$$p_Y(y)=\int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)dx=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+y),\quad 0\leqslant y\leqslant 2$$

由此又可算得 $EY=11/9, EY^2=16/9$，从而 $\mathrm{Var}(Y)=23/81$。最后我们来计算

$$EXY=\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^2 xy(x+y)dydx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(2x^2+\frac{8}{3}x)dx=\frac{2}{3}$$

于是可得协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\times\frac{11}{9}=-\frac{1}{81}$$

代回原式，可得

$$\mathrm{Var}(2X-3Y+8)=4\times\frac{13}{162}+9\times\frac{23}{81}-12\times\left(-\frac{1}{81}\right)=\frac{245}{81}\approx 3。$$

例 3.3.6（配对问题） 有 n 个人，每人将自己的礼品扔入同一箱中，把礼品充分混合后，每人再随机从中选取一个，试求选中自己礼品的人数 X 的期望值与方差。

解：设 $X_i=\begin{cases}1, \text{当第} i \text{个人恰好取出自己礼品}\\ 0, \text{当第} i \text{个人取出别人的礼品}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$

这 n 个随机变量是同分布的，其共同分布为

$$p(X_i=1)=\frac{1}{n},\qquad p(X_i=0)=1-\frac{1}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n$$

所以其期望与方差分别为

$$E(X_i)=\frac{1}{n},\qquad \mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

在上述假设下，n 个人中选中自己礼品的人数 X 恰好为

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

故

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

即平均地说，它们当中仅有一人能选中自己的礼品。

另一方面，诸 X_i 间不是独立的，所以 X 的方差为

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

为计算 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$，我们来考察 X_iX_j 的含义：

$$X_iX_j = \begin{cases} 1, & \text{当第 } i \text{ 和第 } j \text{ 个人都恰好取出各自的礼品} \\ 0, & \text{其它场合} \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} E(X_iX_j) &= P(X_i = 1, X_j = 1) \\ &= P(X_i = 1)P(X_j = 1 \mid X_i = 1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot \frac{n-1}{n^2} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

由此可见，在配对问题中，成对个数的均值与方差均为 1，而与参与人数 n 无关。

3.3.4 相关系数

两个随机变量之间的关系可分为独立和相依（即不独立），在相依中又可分为线性相依和非线性相依，由于非线性相依种类繁多，至今尚无实用指标来区分他们，但线性相依程度可用线性相关系数来刻划，这一段将研究刻划两个变量之间线性相依程度的特征数。

定义 3.3.2 设 (X,Y) 为二维随机变量，它的两个方差 σ_X^2 和 σ_Y^2 都存在，且都为正，则称 $\mathrm{Cov}(X,Y)/\sigma_X\sigma_Y$ 为 **X 与 Y 的线性相关系数**，简称**相关系数**，记为

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{3.3.13}$$

它与协方差同符号，当 $\mathrm{Corr}(X,Y) > 0$，称 **X 与 Y 间为正相关**；当 $\mathrm{Corr}(X,Y) < 0$，称 **X 与 Y 间为负相关**；当 **$\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$**，称 **X 与 Y 不相关**。

例 3.3.7 设随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

现要求相关系数 $\mathrm{Corr}(X,Y)$。

解：这个例子曾在例 3.3.4 中作过讨论，在那里曾获得协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 3/160$ 和两个期望 $E(X) = 3/4, E(Y) = 3/8$。为完成计算尚需计算 $E(X^2)$ 和 $E(Y^2)$。它们可从 $p(x,y)$ 直接获得

$$E(X^2) = \int_0^1\int_0^x x^2 \cdot 3x dy dx = \int_0^1 3x^3 \cdot x dx = \frac{3}{5}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1\int_0^y y^2 \cdot 3y dy dx = \int_0^1 3x \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{1}{5}$$

由此可得 X 与 Y 的方差

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} = 0.0375$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{19}{320} = 0.0594$$

最后得到 X 与 Y 的相关系数

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{3/160}{\sqrt{\dfrac{3\times 19}{80\times 320}}} = \sqrt{\frac{3}{19}} = 0.3973$$

这个相关系数近似 0.4，不算很小，说明 X 与 Y 有一定程度的相关，而相应的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 3/160 = 0.0188$ 是很小的。若从协方差上看，X 与 Y 间的相关性是很微弱的，几乎可忽略不计，此种错觉是由于没有考察方差，若两个方差都很小(如这个例子那样，分别为 0.0375 和 0.0594)，即使协方差小一些，相关系数也能显示出一定程度的相关性。由此可见，在协方差的基础上加工形成的相关系数是更为重要的相关性的特征数。

例 3.3.8(二维正态分布的相关系数)　设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，现在来验证：二维正态分布中的第五个参数 ρ 不是别的，正是 X 与 Y 的相关系数，即 $\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho$。

验证：关键是要算得协方差，由二维正态联合密度函数(3.1.15)可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2) \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} dx dy\end{aligned}$$

注意上式中方括号内的量

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$
$$=\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2+\left(\sqrt{1-\rho^2}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

作变量替换

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\\ v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}x-\mu_1=\sigma_1[u\sqrt{1-\rho^2}+\rho v]\\ y-\mu_2=\sigma_2 v\end{cases}$$
$$dxdy=\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dudv$$

从而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[uv\sqrt{1-\rho^2}+\rho v^2]e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}dudv$$

上式右端重积分可分为二个重积分,其中

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}uve^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}dudv=\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}ve^{-\frac{v^2}{2}}dv=0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v^2e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}dudv=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}v^2e^{-v^2/2}dv=2\pi$$

代回原式,即得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\cdot\rho\cdot 2\pi=\rho\sigma_1\sigma_2$$
$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

可见二维正态分布中第五个参数 ρ 不是别的,正是其相关系数。

下面来研究相关系数的性质,通过这些性质,可以更深刻地理解相关系数的含义,以下研究都是在方差 σ_X^2 和 σ_Y^2 存在且都不为零的假设下进行,即相关系数存在的条件下进行,以后不再重复叙述这一点。

定理 3.3.8 $$-1\leqslant \mathrm{Corr}(X,Y)\leqslant 1 \qquad (3.3.14)$$

证:这可从协方差性质(3.3.6)式看出。

定理 3.3.9 $\mathrm{Corr}(X,Y)=\pm 1$ 的充要条件是在 X 与 Y 间几乎处处有线性关系。

证：充分性。若 $Y = aX + b$ $(X = cY + d$ 也一样)，则 $\mathrm{Corr}(X,Y) = \pm 1$。事实上，当 $Y = aX + b$ 时，$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$，$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, aX + b) = a\mathrm{Cov}(X,X) = a\sigma_X^2$，代入相关系数定义，可得

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$= \frac{a\sigma_X^2}{|a|\sigma_X^2} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

这就证明了充分性。

必要性。若 $\mathrm{Corr}(X,Y) = \pm 1$，则几乎处处有 $Y = aX + b$。为证明此点，我们来考察如下方差

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} \pm \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = 2[1 \pm \mathrm{Corr}(X,Y)]$$

当 $\mathrm{Corr}(X,Y) = 1$ 时，$\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = 0$，而方差为零的变量必几乎处处为常数，即

$$\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y} = c\right) = 1 \text{ 或 } P\left(Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X - c\sigma_R\right) = 1$$

这正说明在 X 与 Y 间几乎处处有线性关系，且斜率 σ_Y/σ_X 为正。类似地，当 $\mathrm{Corr}(X,Y) = -1$ 时，有

$$P\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y} = c\right) = 1 \text{ 或 } P\left(Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + c\sigma_Y\right) = 1$$

这正说明在 X 与 Y 间几乎处处有线性关系，且斜率 $-\sigma_Y/\sigma_X$ 为负。这样就证明了必要性。

定理 3.3.10 若 X 与 Y 是相互独立随机变量，则 $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$，反之不然。

证：由于 X 与 Y 独立，立即知 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$，从而有 $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$，但从 $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$ 不一定有 X 与 Y 独立。为了说明这一点，只要举出一个反例即可。设 $X \sim N(0,1)$，$Y = X^2$，于是有

$$E(X) = 0,\ E(Y) = E(X^2) = 1$$

$$E(XY) = E(X^3) = 0$$

可见 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$，从而 $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$。但 X 与 Y 间确有函数关系：$Y = X^2$，不能说 X 与 Y 独立，这就证明了“反之不然”。

定理 3.3.10 说明：两个随机变量间的独立与不相关是两个不同概念。“不相关”只说明两个随机变量之间没有线性关系，而“独立”说明两个随机变量

之间既无线性关系，也无非线性关系，所以“独立”必导致“不相关”，反之不然。这两个概念在逻辑上的关系如图 3.3.1 所示。

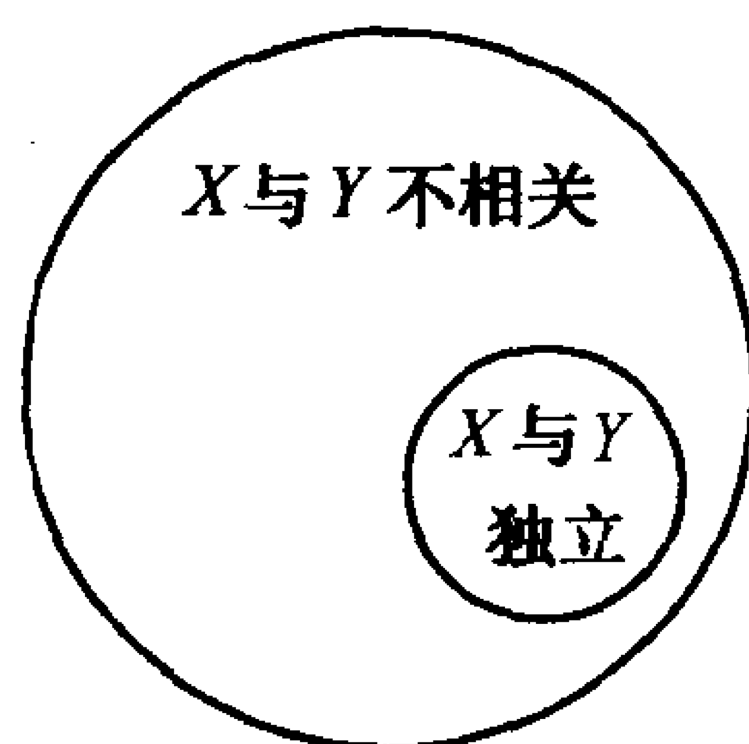


图 3.3.1　独立与不相关的逻辑关系

但有一点例外，在二维正态分布场合，不相关与独立等价，这是因为 X 与 Y 不相关($\text{Cov}(X,Y)=0$)等价于相关系数 $\text{Corr}(X,Y)=0$。当 (X,Y) 为二维正态变量时，$\text{Corr}(X,Y)=\rho$(见例 3.3.8)，所以 X 与 Y 不相关等价于 $\rho=0$，而 $\rho=0$ 是 X 与 Y 独立的充要条件(见例 3.2.2)。二维正态分布的这个独特性质使人们判断二维正态变量的独立性变得简单得多，只要验证其相关系数或协方差是否为零即可。

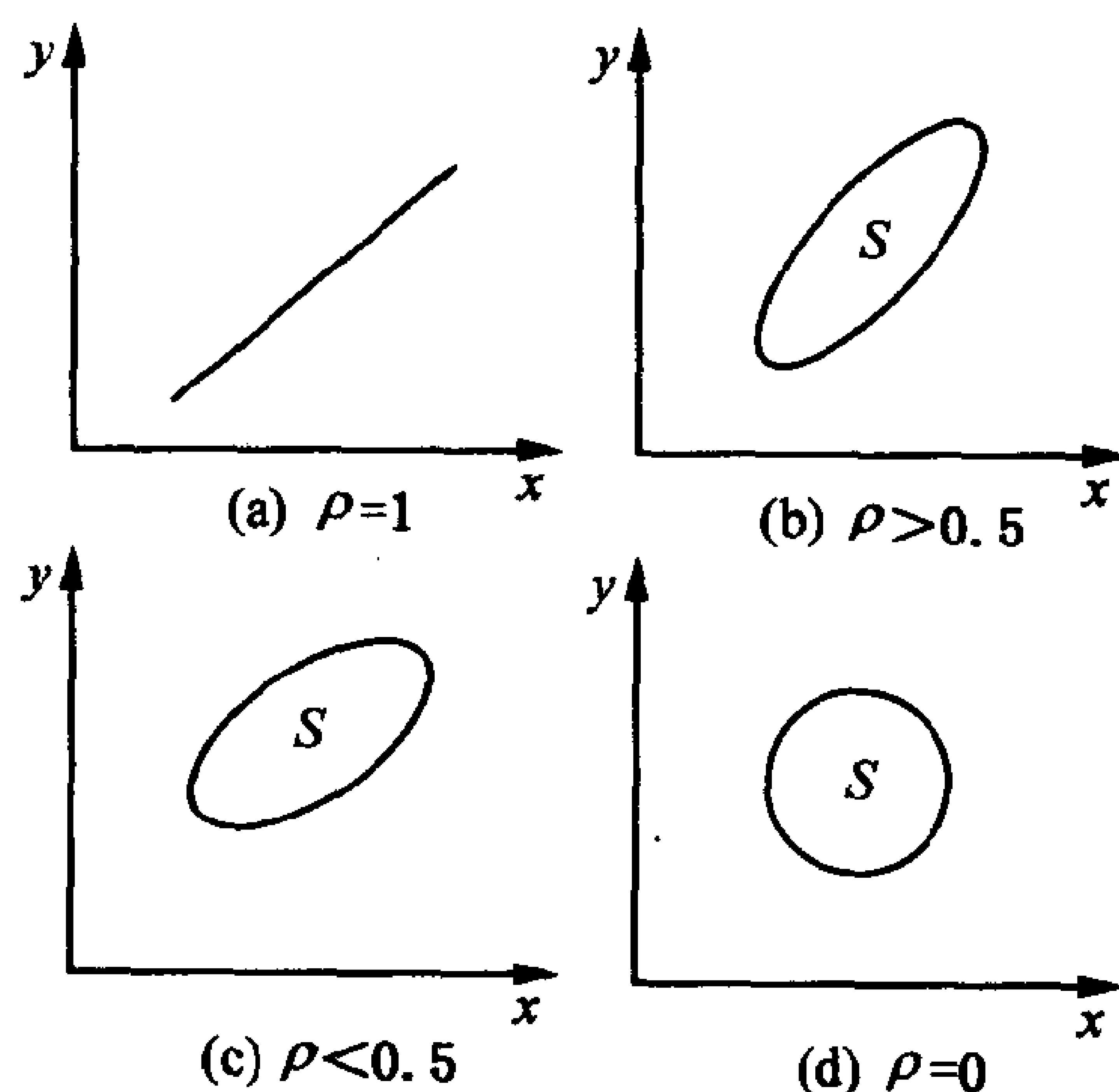


图 3.3.2　相关系数大小示意图，其中 (X,Y) 在 S 上均匀分布

二维正态分布的这个例外并不影响定理 3.3.10 成立。

上述定理 3.3.9 和定理 3.3.10 说明相关系数 $\text{Corr}(X,Y)$ 的两个极端。当

$\mathrm{Corr}(X,Y)=0$时，X与Y间无线性关系；当$\mathrm{Corr}(X,Y)=\pm 1$时，X与Y间有线性关系；而当$0<|\mathrm{Corr}(X,Y)|<1$时，则认为X与Y间有“一定程度”的线性关系，$\mathrm{Corr}(X,Y)$愈接近± 1，其线性相关的程度就愈高(见图3.3.2(b))，当$\mathrm{Corr}(X,Y)$愈接近0时，其线性相关的程度就愈低(见图3.3.2(c))；当$\mathrm{Corr}(X,Y)>0$时，Y将随着X增加而增大；当$\mathrm{Corr}(X,Y)<0$时，Y将随着X增加而减少。所以相关系数是衡量X与Y间线性相关程度的特征量。

*§3.4 条件分布与条件期望

3.4.1 条件分布的概念

多维随机变量的各个分量之间关系主要表现为独立与相依两类关系，独立性已在§3.2作了讨论。线性相依性在§3.3.4中也作了一些讨论。现在我们着手讨论一般的相依性。假如两个随机变量X与Y不独立，则X与Y间就有一定的相依性，由于X与Y取值的随机性，它们之间一般不会呈现出一种确定性函数关系，但对随机现象的大量观察就会发现它们之间隐含着某种趋势。为了把这种趋势揭露出来，最有用的工具是条件分布与条件期望，下面例子会给我们一些启发。

例3.4.1 在一个地区或一个国家中父亲的身高X和儿子(成年人)的身高Y是一个二维随机变量(X,Y)，从遗传学上看，或从人们生活经历上看，这两个随机变量不会是相互独立的，父高X会影响儿子的身高Y，看到父亲很高就会想到他的儿子(若有的话)不会很低；看到小个子的男青年也会想到他父亲亦不会很高。但也不是绝对的，可能有例外，大多数场合下，上述的经验事实是经常出现的，所以父高X与儿高Y之间是相依的两个随机变量。

如何研究这种相依性呢?首先把父亲的身高固定在一个水平上，譬如固定在$x_1=1.50$(米)处，这些身高为1.5米的父辈们的儿子身高不会是相同的，有高有低，在有些高度上人多一些，在另一些高度上人少一些，呈现出一定的分布，这是父高为1.5米条件下，儿子身高Y的分布。若以概率密度函数表示，可记为$p(y|X=x_1)$，它就是条件密度函数(见图3.4.1)。

当条件改变时，譬如父高固定在$x_2=1.6$(米)处，其子身高Y也有一个条件密度函数$p(y|X=x_2)$，类似地可写出不同条件下(父高固定在不同水平上)Y的条件密度函数(见图3.4.1)

$p(y|X=x_1)$， $p(y|X=x_2)$， $p(y|X=x_3)$， …， $p(y|X=x_n)$，等

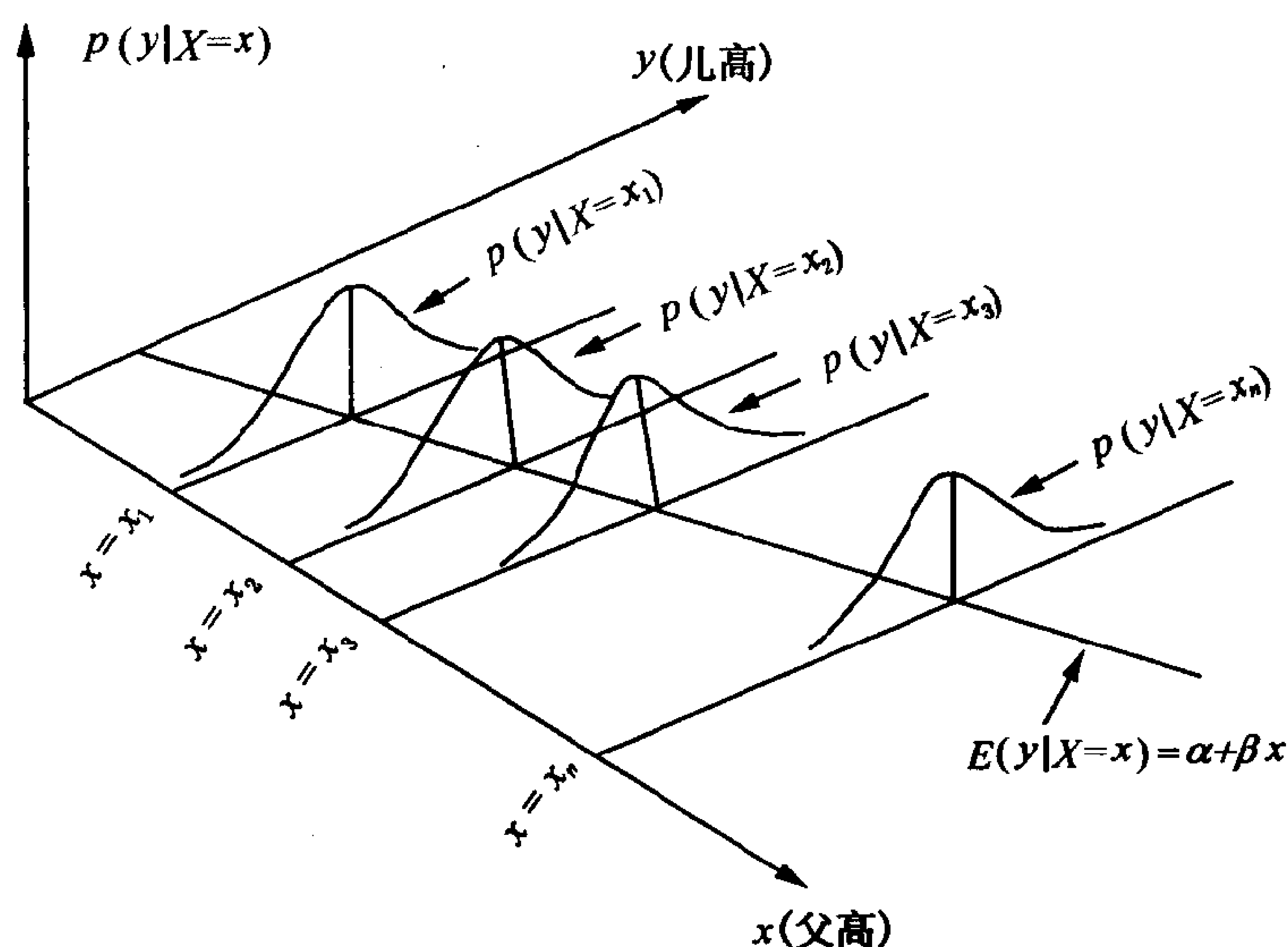


图 3.4.1　条件分布与条件期望示意图

从这些条件密度函数的位置看，其位置随着 X 的取值增加而显示增大的趋势。假如用条件密度的均值（就是条件期望，记为 $E(Y|X=x)$）表示分布位置，则 $E(Y|X=x)$ 将随着 x 增加而增加。在这个例子中呈线性增加，而在其它场合可能是某个函数 $f(x)$。进一步要研究的是：$E(Y|X=x)$ 是 x 的函数的具体形式是什么？这是回归分析要研究的问题，这里就不再深入下去了，本节以后篇幅将把研究重点放在条件分布及其条件期望上，致力于把这些概念和所涉及的一些计算弄明白。

3.4.2　离散随机变量的条件分布

对于任意两事件 A 和 B，当 $P(B)>0$ 时，在 B 已发生条件下，事件 A 发生的条件概率定义为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

因此，如果 (X,Y) 是二维离散随机变量，其联合分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,\quad j=1,2,\cdots$$

那么对一切使 $P(Y=y_j)>0$ 的 y_i 可以定义"**给定 $Y=y_j$ 下 X 的条件分布**"为

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots \tag{3.4.1}$$

其中 $p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}$。在这个条件分布中，$Y$ 固定在 y_j 上，而让 X 随机取值。类似可定义**“给定 $X=x_i$ 下 Y 的条件分布”**

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots \tag{3.4.2}$$

其中 $p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}$。

例 3.4.2 设二维离散概率分布如下表示：

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$(行和)
1	0.1	0.3	0.2	0.6
2	0.2	0.05	0.15	0.4
$p_{\cdot j}$(列和)	0.3	0.35	0.35	1.00

诸 $p_{i\cdot}$(行和) 与 $p_{\cdot j}$(列和) 已求得，也列在上表中。

按公式(3.4.1)，“给定 $X=1$ 下，Y 的条件分布”用第一行上的三个概率(指 0.1，0.3 和 0.2) 分别除以第一行的行和 $p_{1\cdot}=0.6$ 就可得到，具体如下：

$$P(Y=1|X=1)=0.1/0.6=1/6$$
$$P(Y=2|X=1)=0.3/0.6=1/2$$
$$P(Y=3|X=1)=0.2/0.6=1/3$$

把它们合在一起写，可记为

$$P(Y=j|X=1)=\begin{cases}1/6, & j=1\\ 1/2, & j=2\\ 1/3, & j=3\end{cases}$$

类似地，“给定 $X=1$ 下，Y 的条件分布”亦可类似求得

$$P(Y=j|X=2)=\begin{cases}1/2, & j=1\\ 1/8, & j=2\\ 3/8, & j=3\end{cases}$$

由于 X 只可能取两个值，故在 X 给定下 Y 的条件分布只有这两个，而给定 Y 下，X 的条件分布有三个，它们是

$$P(X=i|Y=1)=\begin{cases}1/3, & i=1\\ 2/3, & i=2\end{cases}$$

$$P(X=i|Y=2)=\begin{cases}6/7, & i=1\\ 1/7, & i=2\end{cases}$$

$$P(X=i|Y=3)=\begin{cases}4/7, & i=1\\ 3/7, & i=2\end{cases}$$

在这个例子中共有五个不同的条件分布，在实际问题中可能遇到的条件分布会更多，但其计算方法都按(3.4.1)和(3.4.2)两个公式进行。

例 3.4.3 设 X 与 Y 是两个相互独立的泊松变量，且 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$。在已知 $X+Y=n$ 的条件下，求 X 的条件分布。

解：由习题 3.2.13 知，在独立场合 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。在这个问题中虽然 X 与 Y 相互独立，可 X 与 $X+Y$ 是相依的。这里要求条件分布

$$P(X=k|X+Y=n),\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

其中 n 是给定的，由于和 $X+Y=n$，故 X 取值不能超过 n。以下求这组条件概率：

$$\begin{aligned}P(X=k|X+Y=n)&=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}\\&=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}\\&=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{n!}e^{(-\lambda_1+\lambda_2)}}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n\end{aligned}$$

这表明，在已知 $X+Y=n$ 下 X 的条件分布是以 n 及 $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ 为参数的二项分布 $b(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$。

3.4.3 连续随机变量的条件分布

设 (X,Y) 是二维连续随机变量，$p(x,y)$ 是其联合密度函数，$p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$ 是其边缘密度函数。由于在连续场合，$P(X=x)=0$，$P(Y=y)=0$，故在$P(y\leqslant Y\leqslant y+\Delta y)>0$ 时，改为考虑如下条件概率

$$\begin{aligned}P(X\leqslant x|y\leqslant Y\leqslant y+\Delta y)&=\frac{P(X\leqslant x,y\leqslant Y\leqslant y+\Delta y)}{P(y\leqslant Y\leqslant y+\Delta y)}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\Delta y}p(x,y)dydx}{\int_{y}^{y+\Delta y}p_y(y)dy}\end{aligned}$$

$$
=\frac{\int_{-\infty}^{x}\left\{\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y}p(x,y)dy\right\}dx}{\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y}p_{y}(y)dy}
$$

当 $\Delta y \to 0$ 时，上式左端为 $P(X \leqslant x | Y = y)$，它是在给定 $Y = y$ 下，$X \leqslant x$ 的条件概率，这不是别的，正是在给定 $Y = y$ 下，X 的条件分布函数 $F(x|y)$，而在上式右端的分母与分子中，只要 $p_Y(y)$ 和 $p(x,y)$ 在 y 处连续，则由积分中值定理可得

$$
\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y}p_{Y}(y)dy = p_{Y}(y)
$$

$$
\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y}p(x,y)dy = p(x,y)
$$

于是当 $p_Y(y) > 0$ 时，在给定 $Y = y$ 下 X 的条件分布函数可表示为

$$
F(x|y) = \int_{-\infty}^{x}\frac{p(x,y)}{p_{Y}(y)}dx
$$

这表明 $p(x,y)/p_Y(y)$ 是在**给定 $Y = y$ 下 X 的条件密度函数**，记它为 $p(x|y)$，即

$$
p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_{Y}(y)} \tag{3.4.3}
$$

类似地，当 $p_X(x) > 0$ 时，可得在**给定 $X = x$ 下 Y 的条件密度函数**为

$$
p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_{X}(x)} \tag{3.4.4}
$$

在连续场合，常用上述两个公式计算条件密度函数。

例 3.4.4　设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求其两个条件密度函数。

解：在例 3.1.7 中已算出 X 与 Y 的边缘分布分别为 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$。于是有

$$
\begin{aligned}
p(x|y) &= \frac{p(x,y)}{p_{Y}(y)} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]\Bigg/\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\rho^2\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\sigma^2)}\left[x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right]^2\right\} \quad (3.4.5)$$

这正好是正态分布 $N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$。类似地可求得在给定 $X=x$ 下 Y 的条件分布为

$$N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

因此,二维正态变量的条件分布仍为正态,这正是正态分布的又一个重要性质。

例 3.4.5 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & \text{当 } 0<x,y<\infty\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

要求 $P(X>1|Y=y)$。

解:先在给定 $Y=y>0$ 下求得 X 的条件密度。

$$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{e^{-x/y}e^{-y}/y}{\dfrac{e^{-y}}{y}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x/y}dx}=\frac{e^{-x/y}}{y},\quad x>0$$

因此在 $y>0$ 时,有

$$P(X>1|Y=y)=\int_1^{\infty}p(x|y)dx$$
$$=\int_1^{\infty}\frac{e^{-x/y}}{y}dx=e^{-1/y}$$

在条件"$Y=y$"没有具体给定时,上述条件概率也不能完全确定,只能用 y 的函数表示出来,一旦给定"$Y=1$",则有

$$P(X>1|Y=1)=e^{-1}=0.3679$$

上述条件概率也就随之确定。

3.4.4 构造联合分布

构造联合分布有多种途径。以二维联合密度函数为例,至今已涉及三种途径,现综述如下:

(1) 由实际背景和实际数据归纳而得 $p(x,y)$,如二维均匀分布、二维正态分布等。在瞄准目标射击中弹着点的坐标 (X,Y) 是二维随机变量,其联合密度函数可用二维正态分布。又如,当 (X,Y) 只能在平面上某个有限区域 S 上取值,但又说不出在哪一个部分上取值的可能性更大一些时,就可用区域 S 上

的均匀分布来表示其联合分布。

(2) 由独立性而得 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$。§3.2中的例子都由独立性导出。其中 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$ 可由一维分布获得。

(3) 把(3.4.3)与(3.4.4)改写为

$$p(x,y)=p_X(x)p(y|x) \tag{3.4.6}$$

$$p(x,y)=p(x|y)p_X(y) \tag{3.4.7}$$

即用一个变量的分布与这个变量给定下另一个变量的条件分布可给出联合分布。

顺便指出，假如能获得 X 的密度函数 $p_X(x)$ 及在 X 给定下 Y 的条件密度函数 $p(y|x)$，则由其乘积的积分可得 Y 的边缘分布

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{x}p(y|x)p_X(x)dx \tag{3.4.8}$$

这就是全概率公式的密度函数形式，在离散场合下的全概率公式已在§1.5.3中讨论过，(3.4.8)式常会在实际中使用。

比较(3.4.5)和(3.4.6)可得

$$p(x|y)=\frac{p(y|x)p_X(x)}{p_Y(y)}$$

$$=\frac{p(y|x)p_X(x)}{\int_{-\infty}^{x}p(y|x)p_X(x)dx} \tag{3.4.9}$$

这就是**贝叶斯公式的密度函数形式**，贝叶斯公式的离散形式已在§1.5.4中讨论过。(3.4.9)式将在寻求未知参数的估计中要用到。

例3.4.6 设 $X\sim U(0,1)$，x 是其一个观察值。又设在 $X=x$ 下 Y 的条件分布是 $U(x,1)$。这两个均匀分布的密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

$$p(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

由此可得(X,Y)的联合密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它场合}\end{cases}$$

其不为零的区域如图3.4.2的斜线部分。而 Y 的边缘密度 $p_Y(y)$ 在区间$(0,1)$外为零，而当 $0<y<1$，有

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{1-x}dx$$

$$= -\ln(1-y) = \ln\frac{1}{1-y}$$

它的图形如图 3.4.3 所示，可见 $p_Y(y)$ 是一个无界函数。

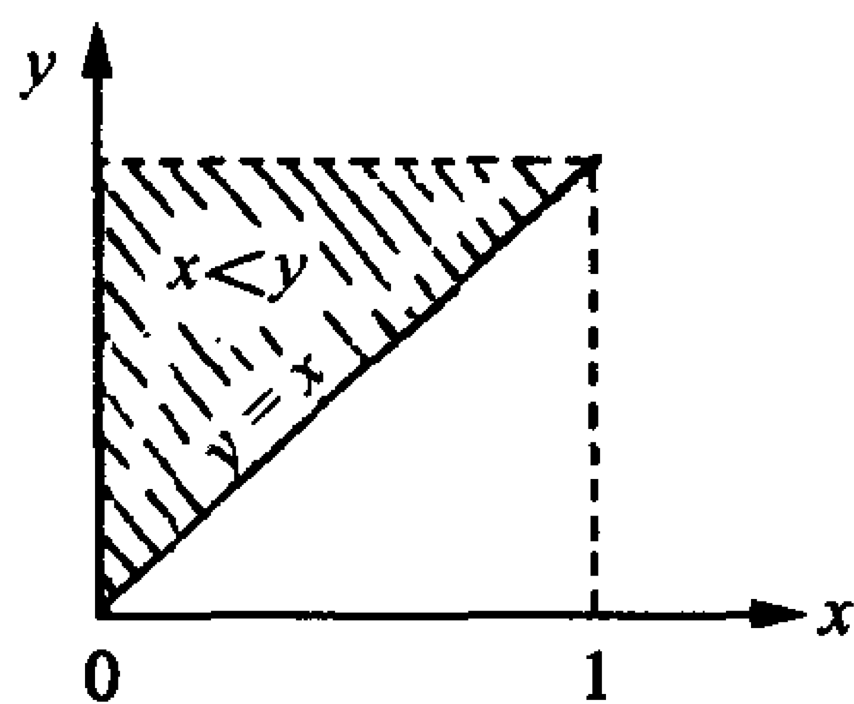


图 3.4.2 $p(x,y) \neq 0$ 的区域

（例 3.4.6）

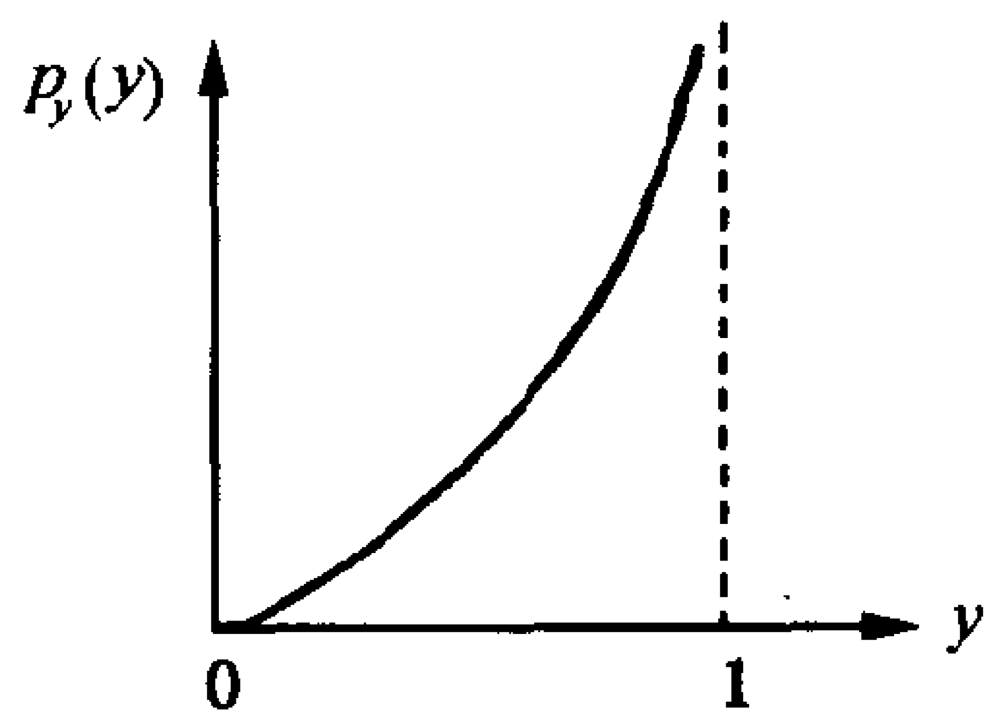


图 3.4.3 $p_Y(y)$ 的图形

（例 3.4.6）

现在来求 $Y > 0.5$ 的概率，这可利用上述 $p_Y(y)$

$$P(Y > 0.5) = -\int_{0.5}^{1} \ln(1-y)dy = -\int_0^{0.5} \ln u du$$

最后一个等式是利用变换 $u = 1 - y$ 得到的。$\ln u$ 的原函数为 $u\ln u - u$，故

$$P(Y > 0.5) = -[u\ln u - u]_0^{0.5} = 0.5\ln 2 + 0.5 = 0.8466$$

3.4.5 条件期望

定义 3.4.1 条件分布的数学期望称为条件期望，它可用条件分布算得：

$$E(X|y) = \begin{cases} \sum_i x_i P(X=x_i|Y=y), & \text{当}(X,Y)\text{为二维离散随机变量} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|y)dx, & \text{当}(X,Y)\text{为二维连续随机变量} \end{cases}$$

(3.4.10)

其中 $P(X=x_i|Y=y)$ 为在给定 $Y=y$ 下 X 的条件分布，$p(x|y)$ 为在 $Y=y$ 下 X 的条件密度函数。上述数学期望都假设存在。

注意条件期望 $E(X|y)$ 与（无条件）期望 $E(X)$ 的区别。它们不仅在计算公式上有重要差别，含义也绝然不同。譬如 X 表示中国人的年收入，则 $E(X)$ 表示中国人的平均年收入。若用 Y 表示中国人受教育的年限，则 $E(X|y)$ 表示受过 y 年教育的中国人群中的平均年收入。$E(X)$ 只有一个，可 $E(X|y)$ 有很多

个，当 Y 取不同值时，如 $Y=0,1,2,\cdots$ 等，$E(X|y)$值是不同的。一般来说 $E(X|y)$是 y 的某个函数，这个函数刻划了 X 的条件期望如何随 Y 的取值 y 变化而变化的趋势。又如 X 表示中国成年人的身高，则 $E(X)$表示中国成年人的平均身高。若用 Y 表示中国成年人的足长(脚趾到脚跟的长度)，则 $E(X|y)$表示是足长为 y 的中国成年人的平均身高，我国公安部门研究获得

$$E(X|y)=6.876y$$

一案犯在保险柜前面留下足印，测得 25.3 厘米，代入上式算得，此案犯身高大约在 174 厘米左右。这一信息对刻划案犯外形有重要作用。

例 3.4.7 设(X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它场合} \end{cases}$$

求 $E(X|y)$ 和 $E(Y|x)$。

解：先求 X 与 Y 的边缘密度函数：

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\int_x^{\infty}e^{-y}dy=e^{-x},\quad x>0$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y},\quad y>0$$

而当 $x\leqslant 0$ 时，有 $p_X(x)=0$；当 $y\leqslant 0$ 时，亦有 $p_Y(y)=0$。

再求条件分布。在 $y>0$ 时，$p_Y(y)>0$，故有

$$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases} 1/y, & 0<x<y<\infty \\ 0\ , & \text{其它场合} \end{cases}$$

在 $x>0$ 时 $p_X(x)>0$，故有

$$p(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases} e^{x-y}, & 0<x<y<\infty \\ 0\ , & \text{其它场合} \end{cases}$$

最后求条件期望

$$E(X|y)=\int_0^{y}x\cdot\frac{1}{y}dx=\frac{y}{2},\qquad y>0$$

在条件"$Y=y$"尚未具体给定时，上述条件期望也不能定下，只能表示为 y 的函数。假如给定"$Y=4$"，立即可得 $E(X|y)=2$。类似地，

$$E(Y|x)=\int_x^{\infty}y\cdot e^{-x-y}dy=e^{-x}\int_x^{\infty}ye^{-y}dy$$

$$=e^{-x}[-e^{-y}(1+y)]_x^{\infty}=(1+x)e^{-2x},\quad x>0$$

一般场合下，条件期望 $E(Y|x)$ 总是条件 x 的函数，只有当条件给定时，如 $X=1$ 时，$E(Y|X=1)=2e^{-2}=0.2707$。

例 3.4.8 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，在例 3.4.4 中已求得在给定 $Y=y$ 下 X 的条件分布为一维正态分布，即

$$X|Y=y\sim N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$$

由正态分布性质可知，其条件期望

$$E(X|y)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2) \tag{3.4.11}$$

它是 y 的线性函数。由于 σ_1 与 σ_2 均为正数，故当相关系数 $\rho>0$ 时，$E(X|y)$ 随 y 增加而按线性增加，这就是以前提及的"正相关"；当 $\rho<0$ 时，$E(X|y)$ 随 y 增加而按线性减少，这就是"负相关"；当 $\rho=0$ 时，X 与 Y 独立，$E(X|y)$ 当然与 y 无关。

条件期望是条件分布的数学期望，故它具有数学期望的一切性质。譬如：

(1) $$E(a_1X_1+a_2X_2|y)=a_1E(X_1|y)+a_2E(X_2|y) \tag{3.4.12}$$

(2) 对任一函数 $g(X)$，有

$$E[g(X)|y]=\begin{cases}\sum_i g(x_i)P(X=x_i|Y=y), & \text{在离散场合}\\ \int_{-\infty}^{\infty}g(x)p(x|y)dx, & \text{在连续场合}\end{cases} \tag{3.4.13}$$

此外，条件期望还有一个重要性质。

定理 3.4.1 条件期望的期望就是(无条件) 期望，即

$$E[E(X|Y)]=E(X) \tag{3.4.14}$$

证：先在连续场合证明。由(3.4.7) 可得

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x|y)p_Y(y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}xp(x|y)dx\right\}p_Y(y)dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}E(X|y)p_Y(y)dy\end{aligned}$$

由于条件期望 $E(X|y)$ 是 y 的函数，记为 $g(y)$。则上式就是随机变量函数 $g(Y)$ 的期望值，即

$$E(X)=E[g(Y)]=E[E(X|Y)]$$

类似地，亦可在离散场合证明上式成立。

这个命题不仅在概率论中是一个较深刻的命题，而且在实际中很有用。在不少场合，直接计算 $E(X)$ 是困难的，而在限定变量 Y（与 X 有关系的量）的值 y 之后，计算条件期望 $E(X|y)$ 则较为容易。因此可分二步走：第一步借助条件分布 $p(x|y)$ 和固定的 y 值算得条件期望 $E(X|y)$；第二步再把 y 看作 Y 的取值，$E(X|y)$ 看作 $Y=y$ 时 X 取值的平均，借助 Y 的分布 $p_Y(y)$ 再求一次期望，先后两次期望即得 $E(X)$。更直观一些说，你可以把 $E(X)$ 看作在一个很大范围上求平均，然后找一个与 X 有关的量 Y，用 Y 的不同值把上述大范围划分为若干个小区域。先在每个小区域上求平均，再对此类平均求加权平均，即可获得大范围上的平均 $E(X)$。譬如要求全校学生的平均年龄，可先求出每个班级学生的平均年龄，然后再对各班平均年龄求加权平均，其中权就是班级人数在全校学生中所占的比例。

例 3.4.9 一矿工被困在有三个门的矿井里。第一个门通一坑道，沿此坑道走 3 小时可使他到达安全地点；第二个门可使他走 5 小时后又回到原处；第三个门可使他走 7 小时后也回到原地。如设此矿工在任何时刻都等可能地选定其中一个门，试问他到达安全地点平均要用多长时间？

解：设 X 为该矿工到达安全地点所需时间（单位：小时），Y 为他所选的门，则由(3.4.14)可得

$$E(X)=E(X|Y=1)P(Y=1)+E(X|Y=2)\times$$
$$P(Y=2)+E(X|Y=3)P(Y=3)$$

其中 $P(Y=1)=P(Y=2)=P(Y=3)=1/3$，$E(X|Y=1)=3$。而 $E(X|Y=2)$ 为矿工从第二个门出去要到达安全地点所需平均时间。而他沿此坑道走 5 小时又转回原地，而一旦返回原地，问题就与当初他还没有进第二个门之前一样，因此他要到达安全地点平均还需再用 $E(X)$ 小时，故

$$E(X|Y=2)=5+E(X)$$

类似地有

$$E(X|Y=3)=7+E(X)$$

代回原式，可得

$$E(X)=\frac{1}{3}(3+5+E(X)+7+E(X))$$
$$E(X)=15(\text{小时})$$

该矿工到达安全地点平均需要 15 小时。

例 3.4.10 设走进某百货商店的顾客数是均值为 35000 的随机变量。又设这些顾客所花的钱数是相互独立、均值为 52 元的随机变量。再设任一顾客

所花的钱数和进入该商店的总人数相互独立。试问该商店一天的平均营业额是多少？

解：令 N 表示走进该商店的顾客数，X_i 表示第 i 位顾客所花的钱数，则 N 位顾客所花的总钱数 $\sum_{i=1}^{N} X_i$ 就是该商店一天的营业额。由于

$$E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[E(\sum_{i=1}^{N} X_i | N)]$$

其中

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i | N = n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = nE(X_1)$$

上式最后第二个等式成立是由于诸 X_i 与 N 独立，从而条件期望就是无条件期望

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i | N) = NE(X_1)$$

从而

$$E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[NE(X_1)] = E(N) \cdot E(X_1)$$

在我们问题中，$E(N) = 35000$(人)，$E(X_1) = 52$ 元，故该商店一天的平均营业额为 $35000 \times 52 = 1.82$ 百万元。

这是一个寻求个数为随机的独立随机变量和的数学期望问题。这类问题很多，譬如，一只昆虫一次产卵数 N 为随机的，每只卵成活的概率为 p，假如 N 服从参数为 λ 的泊松分布，则一只昆虫一次产卵能成活的平均数为 λp。又如，一兽类的个数 N 为随机的，如果每只野兽掉入人们设置陷井的概率为 p，则被捕获的野兽的平均数为 $E(N)E(X_1)$，其中 $X_1 \sim b(1,p)$。

§3.5 中心极限定理

中心极限定理是概率论中最重要和最常用的一类极限定理。我们从一个重要现象谈起。

3.5.1 一个重要现象

n 个相互独立、同分布的随机变量之和的分布近似于正态分布，并且 n 愈

大，此种近似程度愈好，这一重要现象可从下面两个例子看出。

例 3.5.1 一棵均匀的骰子连掷 n 次，其点数之和 Y_n 是 n 个相互独立同分布的随机变量之和，即

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

其中诸 X_i 的共同的概率分布为

X_1	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

这也是 Y_1 的概率分布，其概率直方图（图 3.5.1(a)）是平顶的。

当 $n = 2$ 时，$Y_2 = X_1 + X_2$ 的概率分布可用离散形式的卷积公式(3.2.9)求得。

$Y_2 = X_1 + X_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

它的概率直方图（图 3.5.1(b)）呈单峰对称的阶梯形，且阶梯的每阶高度相等。

当 $n = 3$ 和 4 时，$Y_3 = X_1 + (X_2 + X_3)$ 的概率分布和 $Y_4 = (X_1 + X_2) + (X_3 + X_4)$ 的概率分布都可用卷积公式求得。它们的概率直方图（图 3.5.1(c) 与(d)）仍呈单峰对称的阶梯形，但台阶增多，每个台阶高度不等，中间台阶高度要比两侧台阶高度略高一点，从图(c) 和(d) 上已显现出正态分布的轮廓。

当 n 再增大时，可以想象，$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的概率直方图的轮廓线与正态密度曲线更为接近，只是分布中心 $E(Y_n)$ 将随着 n 的增加不断地向右移动，而标准差 $\sigma(Y_n)$ 不断增大。假如对 Y_n 施行标准化变换后，所得

$$Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - E(X_1 + \cdots + X_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n)}}$$

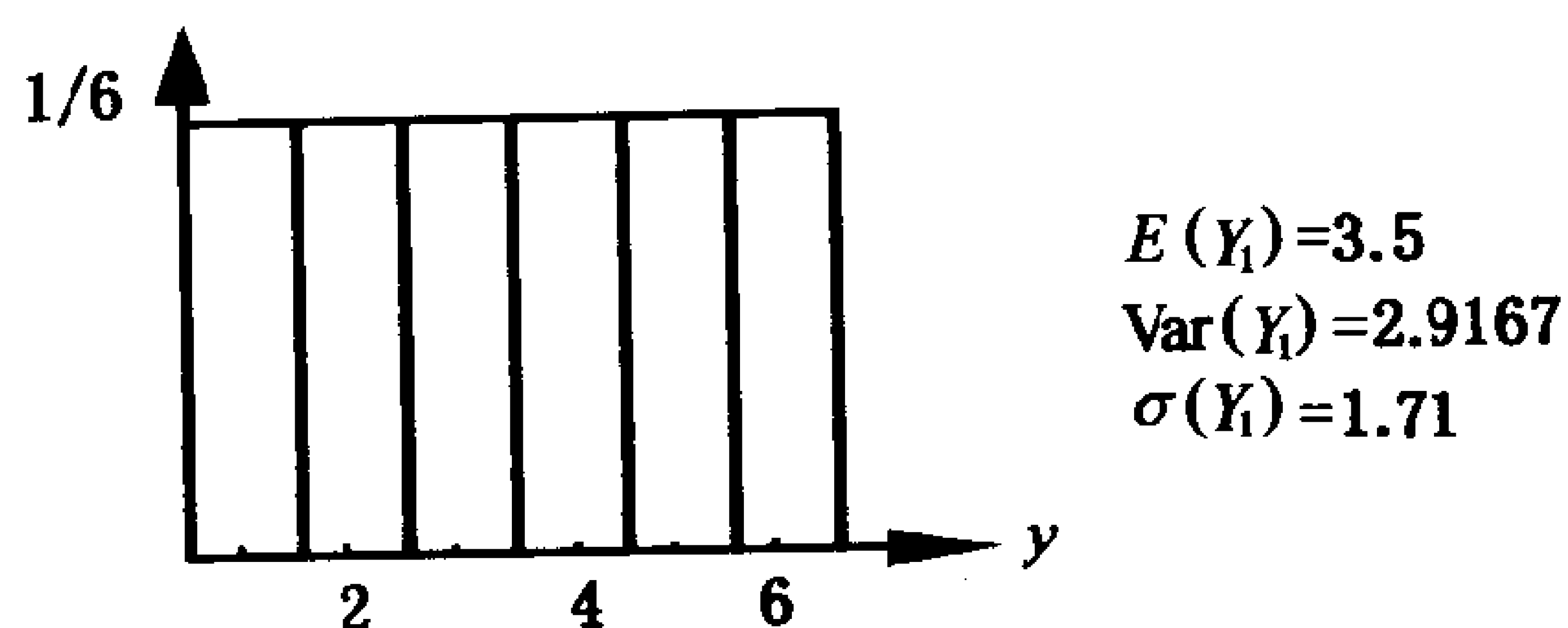
$$= \frac{X_1 + \cdots + X_n - nE(X_1)}{\sqrt{n}\,\sigma(Y_1)}$$

的分布有望接近标准正态分布(0,1)。这种期望已被证明是正确的。在标准正态分布 $N(0,1)$ 的帮助下近似计算概率 $P(Y_n < a)$ 已不是很困难的事了。

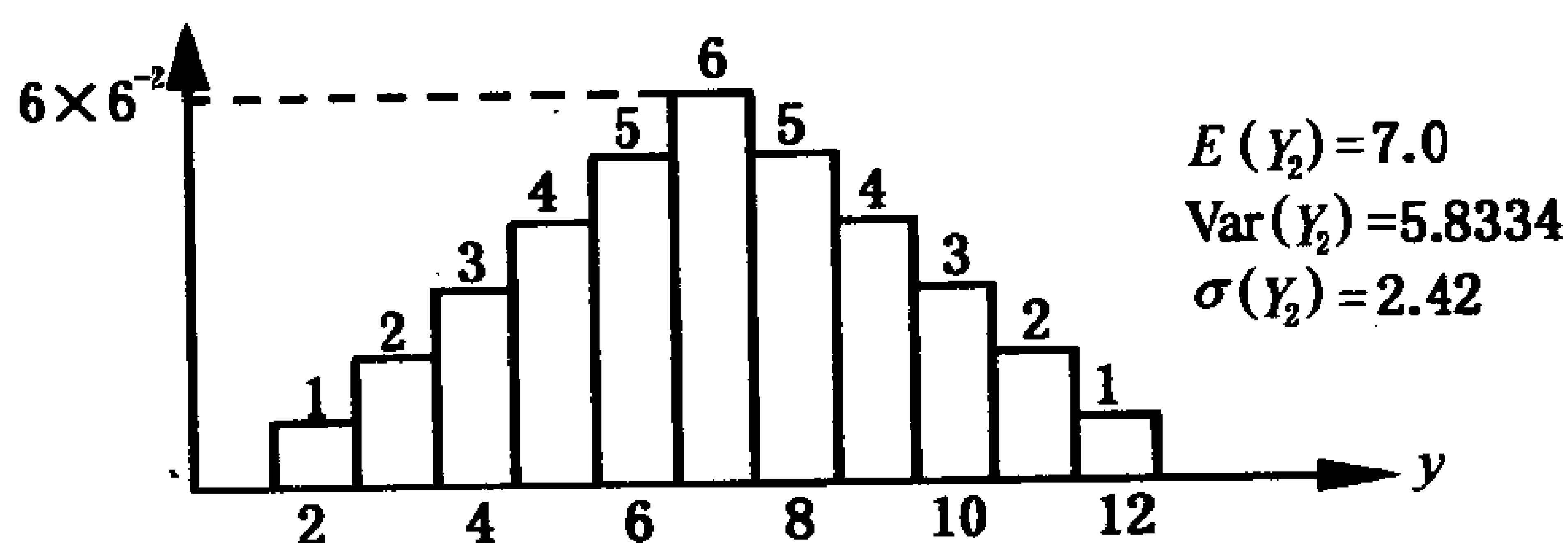
譬如，当 $n = 100$ 时，$E(Y_{100}) = 100 \times 3.5 = 350$，$\sigma(Y_{100}) = \sqrt{100} \times 1.71 = 17.1$，于是利用标准正态分布可得，

$$P(Y_{100} \leqslant 400) = P\left(\frac{Y_{100} - 350}{17.1} \leqslant \frac{400 - 350}{17.1}\right)$$

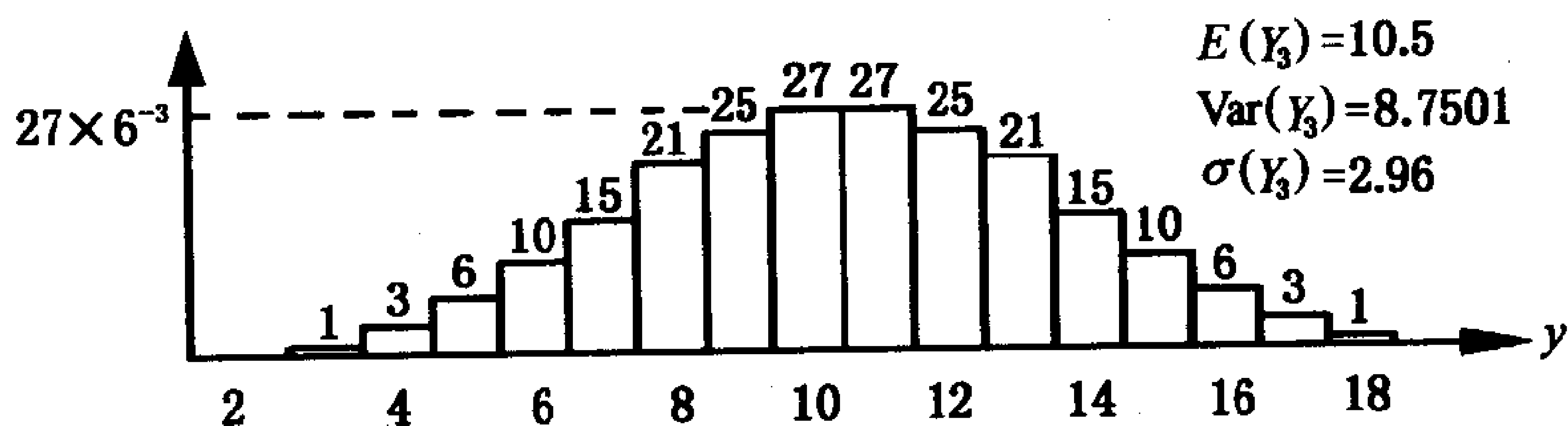
$$= P(Y_{100}^* \leqslant 2.9240) \doteq \Phi(2.9240) = 0.9982$$



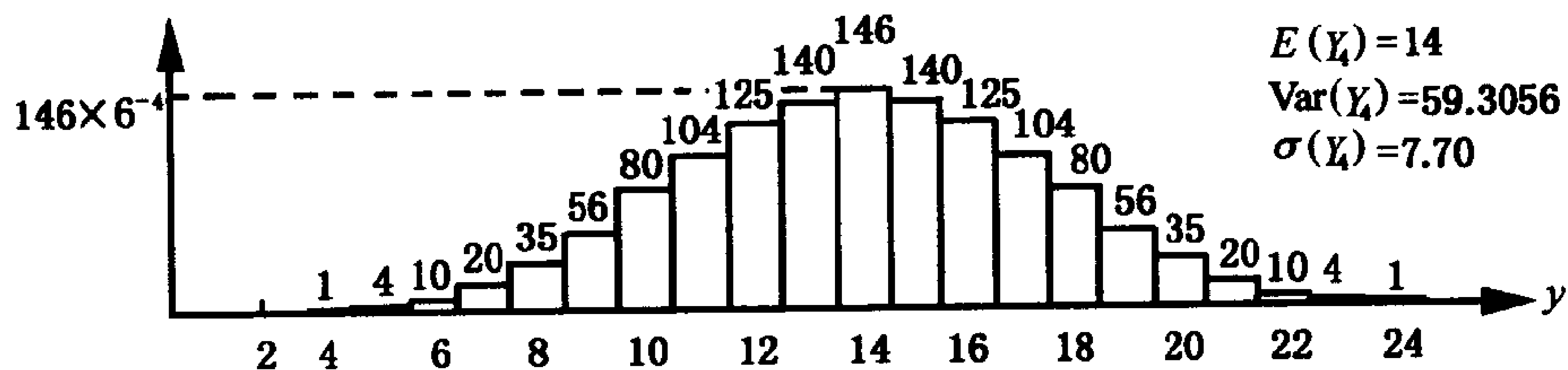
(a)$Y_1 = X_1$ 的概率分布



(b)$Y_2 = X_1 + X_2$ 的概率分布(矩形顶端数字 $\div\ 6^2 =$ 矩形面积)



(c)$Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$ 的概率分布(矩形顶端数字 $\div\ 6^3 =$ 矩形面积)



(d)$Y_2 = X_1 + X_2$ 的概率分布(矩形顶端数字 $\div\ 6^2 =$ 矩形面积)

图 3.5.1　多次掷骰子,点数之和的概率分布

假如不利用正态近似,完成此种计算是很困难的,最后结果表明:连续 100 次掷骰子,其点数之和不超过 400 几乎是必然发生的事件。

例3.5.2 设 $X_1, X_3 \cdots, X_n$ 是 n 个独立同分布的随机变量，其共同分布为区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，即诸 $X_i \sim U(0,1)$。若取 $n = 100$，要求概率 $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqslant 60) = ?$

要精确地求出上述概率，就要寻求 n 个独立同分布随机变量和 $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的分布。若记 $p_n(y)$ 为 Y_n 的密度函数，则在较小的 n 场合尚能用卷积公式(3.2.13)写出 $p_n(y)$，譬如

$$p_1(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它场合} \end{cases}$$

$$p_2(y) = \begin{cases} y, & 0 < y < 1 \\ 2 - y, & 1 \leqslant y < 2 \\ 0, & \text{其它场合} \end{cases}$$

对 $p_2(y)$ 和 $p_1(y)$ 使用卷积公式(3.2.13)又可得 $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$ 的密度函数

$$p_3(y) = \begin{cases} y^2/2, & 0 < y < 1 \\ -(y - 3/2)^2 + 3/4, & 1 \leqslant y < 2 \\ (3 - y)^2/2, & 2 \leqslant y < 3 \\ 0, & \text{其它场合} \end{cases}$$

这是一个连续函数，它的非零部分是由三段二次曲线相连(见图 3.5.2)，类似地可求出 $Y_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ 的密度函数

$$p_4(y) = \begin{cases} y^2/6, & 0 < y < 1 \\ [y^3 - 4(y - 1)^3]/6, & 1 \leqslant y < 2 \\ [(4 - y)^3 - 4(3 - y)^3]/6, & 2 \leqslant y < 3 \\ (4 - y)^3/6, & 3 \leqslant y < 4 \\ 0, & \text{其它场合} \end{cases}$$

这也是一个连续的函数(见图 3.5.2)，它的非零部分是由四段三次曲线相连，

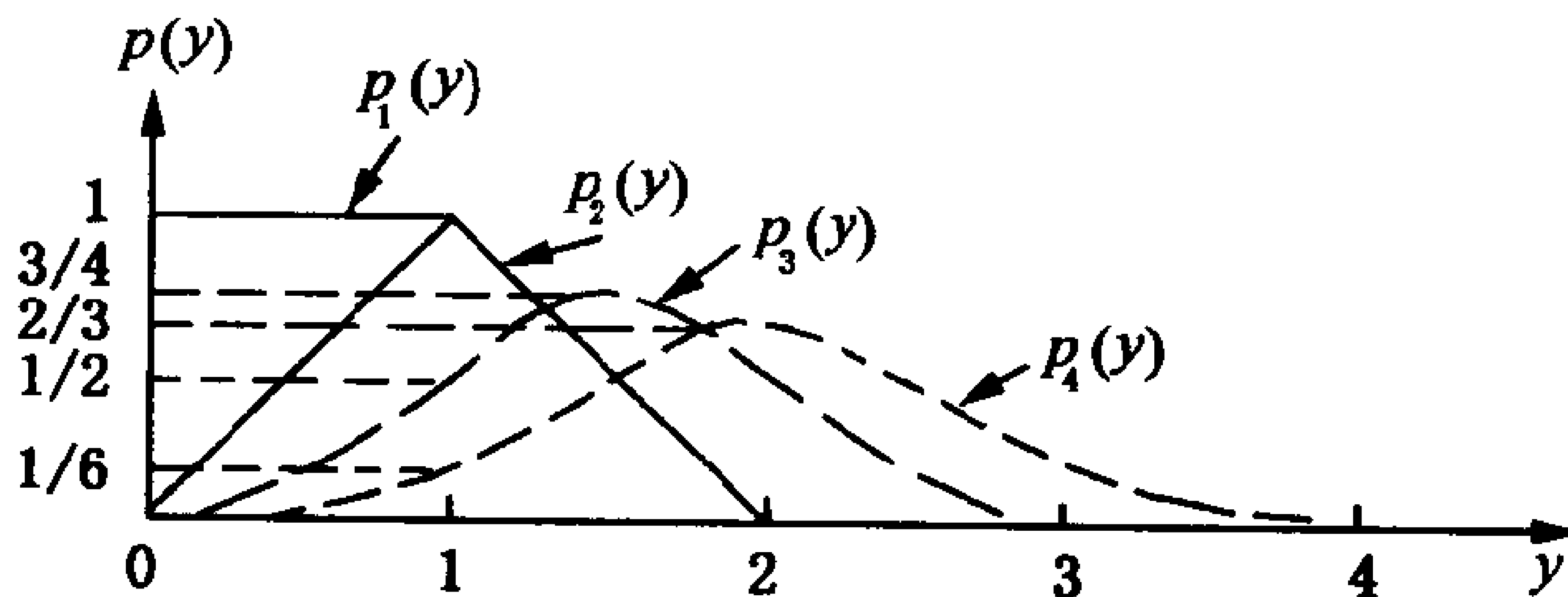


图 3.5.2 均匀分布的卷积

并且连接处较为光滑。照此下去，可以看出，Y_n 的密度函数 $p_n(y)$ 是一个连续

函数，它的非零部分是由 n 段 $n-1$ 次曲线相连。但是要具体写出 $p_n(y)$ 的表达式绝非易事。即使写出表达式，使用起来也很不方便。这样一来，要精确计算概率 $p(X_1+\cdots+X_n\leqslant 60)$ 就发生困难。图 3.5.2 给人们提供了一条解决这个问题的思路，随着 n 增加，$p_n(y)$ 的图形愈来愈接近正态曲线。并且光滑程度也愈来愈接近正态密度曲线的光滑程度。

如例 3.5.1 一样，当 n 增大时 Y_n 的密度函数 $p_n(y)$ 中的 $E(Y_n)$ 右移，标准差 $\sigma(Y_n)$ 增大，为了克服这些障碍，使用标准化技术就可使极限分布稳定于标准正态分布 $N(0,1)$，用此极限分布计算上述概率已不是很难的事了。

由于均匀分布 $U(0,1)$ 的期望与标准分别为

$$E(X_1)=0.5,\qquad \sigma(X_1)=\sqrt{1/12}=0.2887$$

当 $n=100$ 时，$E(Y_{100})=100\times 0.5=50$，$\sigma(Y_n)=\sqrt{100}\times 0.2887=2.887$。于是

$$\begin{aligned}&P(X_1+\cdots+X_{100}\leqslant 60)\\&=P\left(\frac{X_1+\cdots X_{100}-50}{2.887}\leqslant\frac{60-50}{2.887}\right)\\&\doteq\Phi(3.464)=0.9997\end{aligned}$$

这个概率很接近于 1，说明事件“$X_1+\cdots+X_{100}\leqslant 60$”几乎是必然要发生的。

3.5.2 独立同分布下的中心极限定理

定理 3.5.1（林德贝格—列维中心极限定理） 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量序列，其 $E(X_1)=\mu$，$\mathrm{Var}(X_1)=\sigma^2$，假如方差 σ^2 有限，且不为零（$0<\sigma^2<\infty$），则前 n 个变量之和的标准化变量

$$Y_n^*=\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\tag{3.5.1}$$

的分布函数将随着 $n\to\infty$ 而收敛于标准化正态分布函数 $\Phi(y)$，即对任意实数 y

$$\lim_{n\to\infty}P(Y_n^*\leqslant y)=\Phi(y)\tag{3.5.2}$$

这个定理的证明需要更多的数学工具，这里就省略了。这个中心极限定理是由林德贝格和列维分别独立地在 1920 年获得的。这个定理告诉我们，对独立同分布随机变量序列，只要其共同分布的方差存在，且不为零，就可使用该定理的结论(3.5.2)。由于掷一颗骰子出现点数的方差为 2.9167。均匀分布 $U(0,1)$ 的方差为 1/12，它们都有限，且不为零，所以例 3.5.1 和例 3.5.2 的计算全部有效。

定理 3.5.1 的结论告诉我们，只有当 n 充分大时，Y_n^* 才近似服从标准正态

分布 $N(0,1)$。而当 n 较小时，此种近似不能用。在概率论中，常把只在 n 充分大时才具有的近似性质称为渐近性质，而在统计中称为大样本性质。这样一来，定理 3.5.1 的结论可叙述为：Y_n^* 渐近服从标准正态分布 $N(0,1)$，或者说，Y_n^* 的渐近分布是标准正态分布 $N(0,1)$，记为

$$Y_n^* \dot\sim N(0,1) \tag{3.5.3}$$

这种符号表明，Y_n^* 的真实分布不是 $N(0,1)$，只是在 n 充分大时，Y_n^* 的真实分布与 $N(0,1)$ 近似，并且 n 愈大，此种近似程度愈好，所以只有在 n 较大时，可用 $N(0,1)$ 近似计算与 Y_n^* 有关事件的概率，而 n 较小时，此种计算的近似程度是得不到保障的。

当(3.5.3) 式成立时，由(3.5.1) 表达式不难获得

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \dot\sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\overline{X} \dot\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

这表明：当 n 较大时，可用正态分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 近似计算与 n 个相互独立、同分布随机变量的算术平均值 $\overline{X}$ 有关事件的概率和各阶矩，这在应用中是有重要意义的。

3.5.3 二项分布的正态近似

现在让我们来研究一个特殊场合 —— 相互独立的贝努里试验序列。大家知道，一次贝努里试验仅可能有两个结果：成功(记为1) 和失败(记为0)。若设成功概率为 $p > 0$，则一次贝努里试验结果可用一个服从二点分布 $b(1,p)$ 的随机变量 X_1 表示：

$$p(X_1 = 1) = p, \qquad p(X_1 = 0) = 1 - p$$

它的期望与方差分别为 $E(X_1) = p$，$\mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$。这样一来，独立的贝努里试验序列对应一个相互独立、同分布(皆为 $b(1,p)$) 的随机变量序列 $\{X_k\}$。

该序列 $\{X_k\}$ 前 n 项之和 $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是服从二项分布 $b(n,p)$ 的随机变量，其中 Y_n 为 n 重贝努里试验中成功出现的次数，由于该序列中的共同分布的方差有限，且不为零，故满足定理 3.5.1 的条件。从而可得如下定理：

定理 3.5.2(德莫弗一拉普拉斯定理) 设随机变量 $Y_n \sim b(n,p)$，则其标准化随机变量 $Y_n^* = (Y_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ 的分布函数的极限

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - nP}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y\right) = \Phi(y) \qquad (3.5.2)$$

其中 $\Phi(y)$ 为标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数。

这个定理是最早的中心极限定理。大约在 1733 年德莫弗对 $p = 1/2$ 证明了上述定理，后来拉普拉斯把它推广到 p 是任一个小于 1 的正数上去。

这个定理的实质是用正态分布对二项分布作近似计算，常称为"二项分布的正态近似"，它与"二项分布的泊松近似(见定理 2.2.1)"都要求 n 很大，但在实际使用中为获得更好的近似，对 p 还是各有一个最佳适用范围。

当 p 很小，譬如 $p \leqslant 0.1$，而 np 不太大时用泊松近似；

当 $np \geqslant 5$ 和 $n(1-p) \geqslant 5$ 都成立时用正态近似。

譬如，当 $n = 25, p = 0.4$ 时，$np = 10$ 和 $n(1-p) = 15$ 都大于 5，这时用正态近似为好(见图 3.5.3a)；当 $n = 25, p = 0.1$ 时，$np = 2.5 < 5$，这时用正态近似误差会大一些(见图 3.5.3b)，而用泊松近似为好。

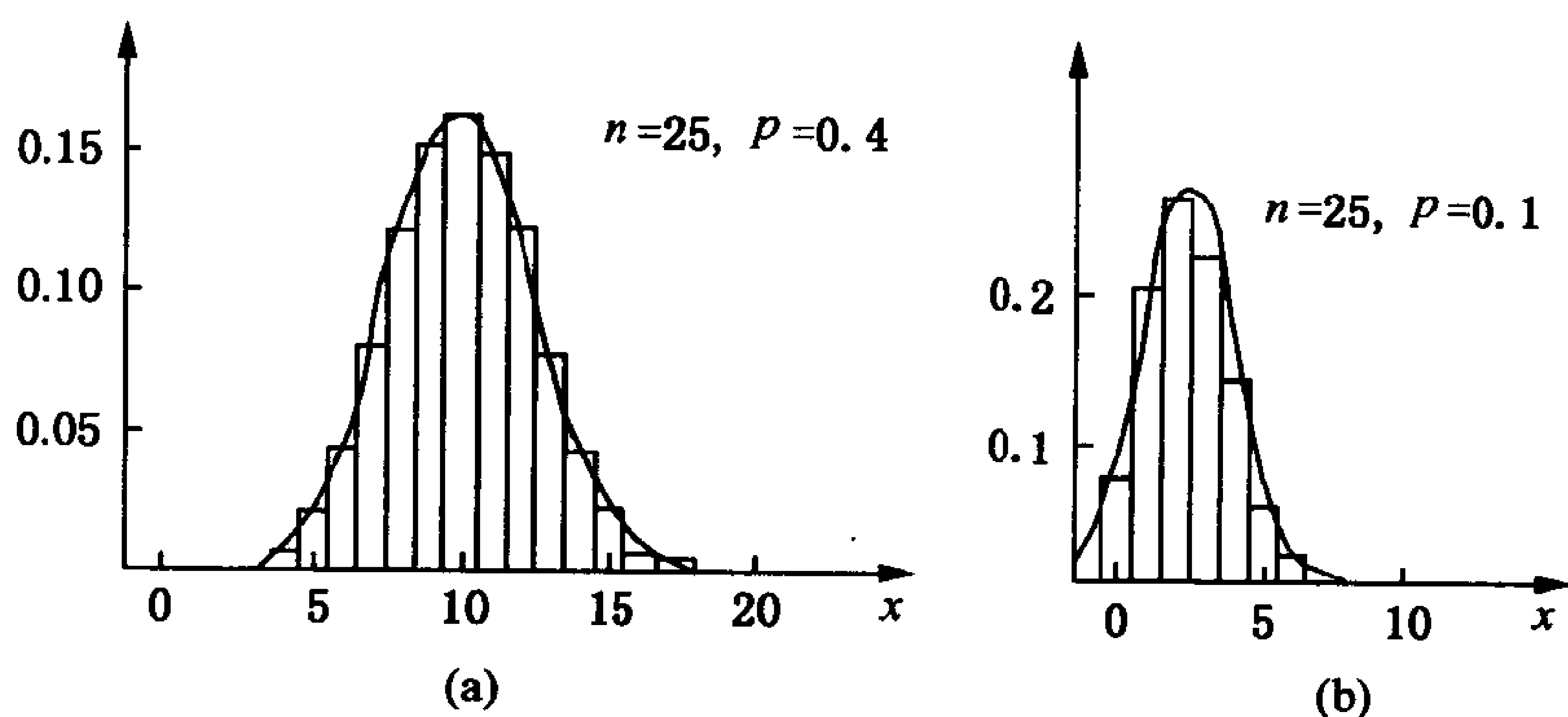


图 3.5.3 二项分布的正态近似

使用"二项分布的正态近似"(即定理 3.5.2)时还有一项修正，在图 3.5.3(a) 上画出了二项分布 $b(25, 0.4)$ 的概率直方图。图上长条矩形(底长为 1)面积表示二项概率 $P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{1-k}$。其中 k 位于矩形底部的中点，若要计算 Y_n 在 $[5,15]$ 的概率，使用正态近似应把区间修改为 $\left[5 - \frac{1}{2}, 15 + \frac{1}{2}\right]$，这种合理的修正可提高近似程度，譬如，二项分布 $b(25, 0.4)$ 与正态分布 $N(10,6)$ 很接近，且数学期望 $np = 10$ 相同，方差 $np(1-p) = 6$ 也相同。这时要计算 Y_n 在 $[5,15]$ 内的概率，若使用正态近似最好把区间修改为 $\left[5 - \frac{1}{2}, 15 + \frac{1}{2}\right]$，这样可以提高精度。

$$P(5 \leqslant Y_n \leqslant 15) = P\left(5 - \frac{1}{2} < Y_n < 15 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= P\left(\frac{4.5 - 10}{\sqrt{6}} < Y_n^* < \frac{15.5 - 10}{\sqrt{6}}\right)$$
$$= P(-2.245 < Y_n^* < 2.245)$$
$$\doteq \Phi(2.245) - \Phi(-2.245)$$
$$= 2\Phi(2.245) - 1$$
$$= 2 \times 0.9877 - 1 = 0.9754$$

这时与精确值 0.9780 较为接近。若不作此修正，可得

$$P(5 \leqslant Y_n \leqslant 15) = P\left(\frac{5 - 10}{\sqrt{6}} < Y_n^* < \frac{15 - 10}{\sqrt{6}}\right)$$
$$\doteq 2\Phi(2.245) - 1$$
$$= 2 \times 0.9794 - 1 = 0.9588$$

这与精确值 0.9780 相差较大。综合上述，棣莫弗一拉普拉斯定理的实际使用公式是：设 $Y_n \sim b(n,p)$，假如 n 和 p 满足

$$np \geqslant 5 \text{ 和 } n(1-p) \geqslant 5$$

则二项分布的正态近似的计算公式是

$$P(a \leqslant Y_n \leqslant b) \doteq \Phi\left[\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] - \Phi\left[\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \quad (3.5.3)$$

$$P(Y_n \leqslant b) \doteq \Phi\left[\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \quad (3.5.4)$$

$$P(Y_n \geqslant a) \doteq 1 - \Phi\left[\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \quad (3.5.5)$$

例 3.5.3 提前三周以上诞生的婴儿称为早产婴儿，某国新闻周报(1988 年 5 月 16 日) 报导，该国早产婴儿占 10%，假如随机选出 250 个婴儿，其中早产婴儿数记为 X，要求概率

$$P(15 \leqslant X \leqslant 30) \text{ 和 } P(X < 20)$$

解：这里 $n = 250, p = 0.1$，由于

$$np = 25 > 5, \quad n(1-p) = 225 > 5$$

故可用正态分布作近似计算，其 $np = 25, \sqrt{np(1-p)} = 4.743$

$$P(15 \leqslant X \leqslant 30) = P\left(\frac{14.5 - 25}{4.743} < X^* < \frac{30.5 - 25}{4.743}\right)$$

$$= P(-2.21 < X^* < 1.16)$$
$$\doteq \Phi(1.16) - [1 - \Phi(2.21)]$$
$$= 0.8770 - 1 + 0.9864$$
$$= 0.8634$$

$$P(X < 20) = P(X \leqslant 19) = P\left(X^* < \frac{19.5 - 25}{4.743}\right)$$
$$= P(X^* < -1.16)$$
$$\doteq 1 - \Phi(1.16) = 0.1366$$

上述近似计算的示意图可见图 3.5.4(a) 与(b)。

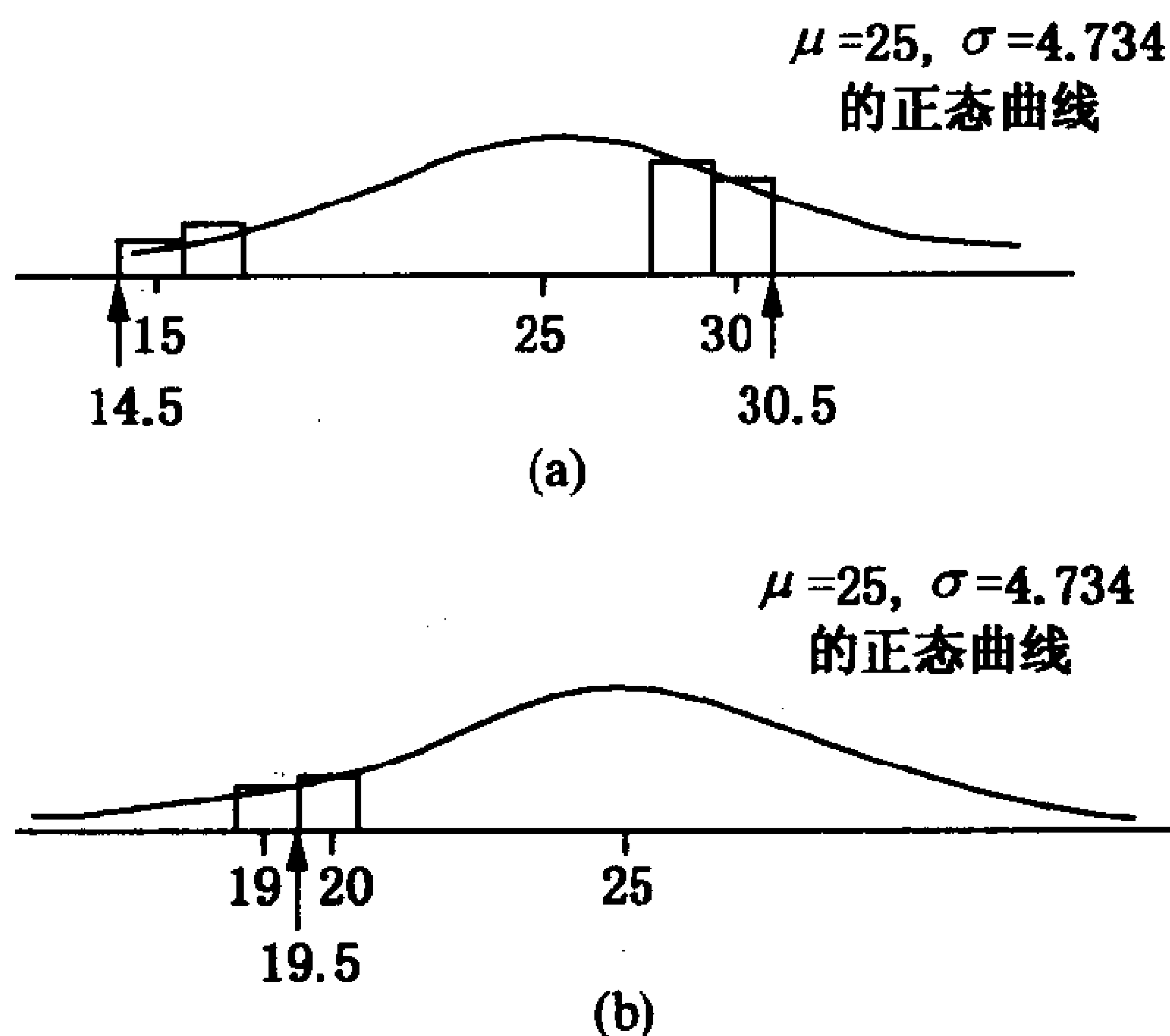


图 3.5.4　二项分布的正态近似(例 3.5.3)

例 3.5.4　某保险公司有 10000 个同龄又同阶层的人参加人寿保险。已知该类人在一年内死亡概率为 0.006。每个参加保险的人在年初付 12 元保险费,而在死亡时家属可由公司领得 1000 元。问在此项业务活动中,

(1) 保险公司亏本的概率是多少?

(2) 保险公司获得利润(暂不计管理费)不少于 40000 元的概率是多少?

解:在参加人寿保险中把第 i 个人在一年内死亡记为"$X_i = 1$",一年内仍活着记为"$X_i = 0$"。则 X_i 是一个服从二点分布 $b(1, 0.006)$ 的随机变量,其和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_{10000}$ 表示一年内总死亡人数。另一方面,保险公司在该项保险业务中每年共收入 $10000 \times 12 = 120000$ 元,故仅当每年死亡人数多于 120 人时公司才会亏本;仅当每年死亡人数不超过 80 人时公司获利不少于 40000 元。由此可知,所要求的概率分别为

$$P(X_1 + x_2 + \cdots + X_{10000} > 120) = ?$$
$$P(X_1 + x_2 + \cdots + X_{10000} \leqslant 80) = ?$$

由于诸 X_i 是独立同分布随机变量，$E(X_i) = 0.006$，$\mathrm{Var}(X_i) = 0.006(1 - 0.006) = 0.005964$。由德莫弗一拉普拉斯定理和(3.5.5)知

$$\begin{aligned} &P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10000} \geqslant 120) \\ &= P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10000} - 60}{\sqrt{59.64}} > \frac{120 - 0.5 - 60}{\sqrt{59.64}}\right) \\ &\doteq 1 - \Phi(7.7046) = 0 \\ &P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10000} \leqslant 80) \doteq \Phi\left(\frac{80 + 0.5 - 60}{\sqrt{59.64}}\right) \\ &= \Phi(2.6545) = 0.9960 \end{aligned}$$

可见该公司在这项保险业务中亏本的概率近似于0，而得利不少于40000元的概率近于0.9960。

例3.5.5 报名听心理学课的学生人数是服从均值为100(人)的泊松分布。负责这门课程的教授决定，如果报名人数超过120，就分成两班讲授；如果不超过120人，就集中在一个班讲授。试问该教授将讲授两个班的概率是多少？

解：设 X 是均值为100的泊松变量，则所求的概率为

$$P(X > 120) = \sum_{i=121}^{\infty} \frac{(100)^i}{i!} e^{-100}$$

这个概率是难于计算，又无表可查。但如想到均值为100的泊松变量可以分解为100个均值为1的独立泊松变量之和(见(3.2.11)式)，我们就可以利用中心极限定理求其近似值。具体是设 $X_i \sim P(1)$，$i = 1, 2, \cdots, 100$。则有 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} \sim P(100)$，其 $E(X) = \mathrm{Var}(X) = 100$。由中心极限定理知，该教授将分二班讲授的概率为

$$P(X > 120) = P\left(\frac{X - 100}{\sqrt{100}} > \frac{120 - 0.5 - 100}{\sqrt{100}}\right) \doteq 1 - \Phi(1.95) = 0.0256$$

例3.5.6 在随机模拟(蒙特卡洛方法)中经常需要产生正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数，但一般计算机只备有产生区间(0,1)上的均匀分布随机数(常称伪随机数)的软件，怎样通过均匀分布 $U(0,1)$ 的随机数来产生正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数呢？这有多种途径，下面介绍一种用上述中心极限定理获得 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数的方法，具体操作如下：

(1) 从计算机中产生均匀分布 $U(0,1)$ 随机数12个，记为 $u_1, u_2, \cdots, u_{12}$。

(2) 计算：$E = u_1 + u_2 + \cdots + u_{12} - 6$。它可以看作来自标准正态分布

$N(0,1)$ 的一个随机数。

(3) 计算：$x=\mu+\sigma E$。由正态分布性可知，它可看作来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个随机数。

(4) 重复(1) ~ (3)n 次，即得正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 n 个随机数。

实际使用表明，上述产生正态分布随机数能满足实际需要，它的关键是在(2)，它由中心极限定理得以保证的。

例 3.5.7 实际计算中，任何实数 x 都只能用一定位数的小数 x 近似，如 $\pi=3.141592654\cdots$ 和 $e=2.718281828\cdots$ 在计算中取 5 位小数，则其近似数为 $\pi'=3.14159$，$e'=2.71828$。它们的第 6 位以后的小数都用四舍五入方法舍去，这时就会产生误差 $\varepsilon=x-x'$。假如在市场调查中(或水位观察中，或物理测量中)获得 10000 个用 5 位小数表示的近似数，那末其和的误差是多少呢?

这是一个误差分析问题。当用一个 5 位小数 x' 近似表示一个实数 x 时，其误差 $\varepsilon=x-x'$ 可看作是区间 $(-0.000005,0.000005)$ 上的均匀分布。其均值、方差和标准差分别为

$$E(\varepsilon)=0,\quad \mathrm{Var}(\varepsilon)=10^{-10}/12,\quad \sigma(\varepsilon)=0.2887\times 10^{-5}$$

那末 10000 个近似数之和的总误差应为 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{10000}$，其中诸 ε_i 可看作是独立同分布随机变量，其共同分布就是上述均匀分布 $U(-0.000005,0.000005)$。这 10000 个误差之和的均值、方差和标准差分别为

$$E(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{10000})=0$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{10000})=10000\times 10^{-10}/12=10^{-6}/12$$

$$\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{10000})=10^{-3}/\sqrt{12}=0.0002887$$

由林德贝格—列维中心极限定理可知：$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{10000})/0.0002887$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，故对给定的 k，有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{10000}\varepsilon_i\right|<k\times 0.0002887\right)=\Phi(k)-\Phi(-k)=2\Phi(k)-1$$

若取 $k=3$，上式右端为 0.9974，因此我们能以 99.74% 的概率断言：10000 个 5 位小数之和的总误差的绝对值不超过 $3\times 0.0002887=0.0008661$。

*3.5.4 独立不同分布下的中心极限定理

现在我们转入讨论独立但不同分布的随机变量序列场合下的中心极限定理。

设 $\{X_n\}$ 是独立随机变量序列，又设其期望与方差分别为

$$E(X_n)=\mu_n,\quad \mathrm{Var}(X_n)=\sigma_n^2,\quad n=1,2,\cdots$$

依据独立性，该序列前 n 个随机变量之和

日＼股票代码	600104	600688	600854	600631	600663	600115	600100	600643
1	10.03	3.63	20.40	10.24	14.68	4.33	32.98	11.50
2	10.00	3.57	20.75	10.18	14.01	4.27	32.22	11.39
3	9.85	3.58	20.50	10.24	14.01	4.30	32.18	11.31
6	9.68	3.59	20.47	10.27	13.90	4.28	32.01	10.86
7	9.78	3.58	20.40	10.22	13.75	4.27	32.22	10.80
8	9.71	3.58	20.32	10.19	13.82	4.29	32.25	10.66
9	9.69	3.51	20.23	10.46	13.94	4.27	32.35	10.45
10	9.64	3.51	20.30	10.85	13.98	4.29	34.27	10.57
13	9.80	3.51	20.06	10.53	14.10	4.27	33.52	10.54
14	9.74	3.66	20.19	10.35	13.96	4.24	33.99	10.50
15	10.04	3.68	20.82	10.43	14.03	4.30	35.63	10.70
16	9.81	3.57	20.36	10.11	13.50	4.20	36.15	10.45
17	9.69	3.56	20.30	10.14	13.40	4.15	35.58	10.50
21	9.58	3.50	19.78	9.74	13.00	4.01	34.50	10.11
22	9.51	3.51	19.77	9.94	12.90	3.94	34.90	10.06
23	9.76	3.44	19.30	10.10	12.97	3.85	34.95	9.94
24	9.68	3.41	18.91	10.05	12.95	3.85	34.93	10.04
27	9.53	3.44	18.51	9.80	12.81	3.89	36.15	10.08
28	9.48	3.56	18.59	9.74	12.87	3.90	35.70	10.10
29	9.55	3.57	18.83	9.75	12.94	3.88	35.90	10.11
30	9.60	3.54	19.25	9.78	13.19	3.90	36.20	10.43

请在同一坐标系中作上述 8 个箱线图，从中可看出些什么？

10 用随机模拟方法求来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 总体的容量为 $n=20$ 的样本偏度 SK 的 0.10 与 0.90 的分位数，写出模拟计算的步骤。

11 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记统计量

$$G=\frac{X_{(n)}-\overline{X}}{S}$$

其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$。拟用随机模拟方法求 $n=10$ 时 G 的 $p=0.95$ 的分位数。设模拟次数为 10 000 次，写出模拟计算的步骤。

并且还有如下极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\mu_i|^3)=0 \tag{3.3.8}$$

则对一切实数 y，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\leqslant y\right)=\Phi(y)$$

其中 μ_i 与 B_n 如前所述。

例 3.5.9 一份考卷由 99 个题目组成，并按由易到难顺次排列。某学生答对第 1 题的概率是 0.99；答对第 2 题的概率是 0.98；一般地，他答对第 i 题的概率是 $1-i/100, i=1,2,\cdots,99$。假如该学生回答各问题是相互独立的，并且要正确回答其中 60 个问题以上（包括 60）才算通过考试。试计算该学生通过考试的概率是多少？

解：设

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若学生答对第 } i \text{ 题}\\ 0, & \text{若学生答错第 } i \text{ 题}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,99$$

于是 X_i 是二点分布：

$$P(X_i=1)=p_i,\qquad P(X_i=0)=1-p_i$$

其中 $p_i=1-i/100$。因此 $E(X_i)=p_i$，$\mathrm{Var}(X_i)=p_i(1-p_i)$。为了使其成为随机变量序列，我们规定从 X_{100} 开始都与 X_{99} 同分布，且相互独立，于是

$$B_n^2=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

另一方面，上述独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足李雅普洛夫条件 (3.5.7) 和 (3.5.8)。因为

$$\begin{aligned}E(|X_i-p_i|^3)&=p_i(1-p_i)^3+p_i^3(1-p_i)\\&=p_i(1-p_i)[p_i^2+(1-p_i)^2]\leqslant p_i(1-p_i)<\infty\end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-p_i|^3)\leqslant\frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)\right]^{1/2}}$$

故对该序列 $\{X_n\}$ 可以使用中心极限定理。另外，可算得

$$\sum_{i=1}^{99}E(X_i)=\sum_{i=1}^{99}\left(1-\frac{i}{100}\right)=99-\frac{1}{100}\cdot\frac{99\times100}{2}=49.5$$

$$B_{99}=\sum_{i=1}^{99}\mathrm{Var}(X_i)=\sum_{i=1}^{99}\left(1-\frac{i}{100}\right)\left(\frac{i}{100}\right)$$

$$=49.5-\frac{i}{(100)^2}\cdot\frac{99\times100\times199}{6}=16.665$$

而该学生通过考试的概率应为

$$P\left(\sum_{i=1}^{99}X_i\geqslant60\right)=P\left[\frac{\sum_{i=1}^{99}X_i-49.5}{\sqrt{16.665}}\geqslant\frac{60-49.5}{\sqrt{16.665}}\right]$$

$$\approx1-\Phi(2.5735)=0.0050$$

此学生通过考试的可能性很小，大约只有千分之五的可能性。

例 3.5.10 一位操作者在机床上加工机械轴，使其直径符合规格要求，但在加工中会受到一些因素的影响，譬如：

在机床方面有零件的磨损与老化的影响；

在刀具方面有装配与磨损的影响；

在材料方面有硬度、成份、产地的影响；

在操作者方面有精力集中程度和当天的情绪的影响；

在测量方面有量具的误差、感觉误差和心理等影响；

在环境方面有车间的温度、湿度、光线、电源电压等影响；

在具体场合还可列出一些有影响的因素。

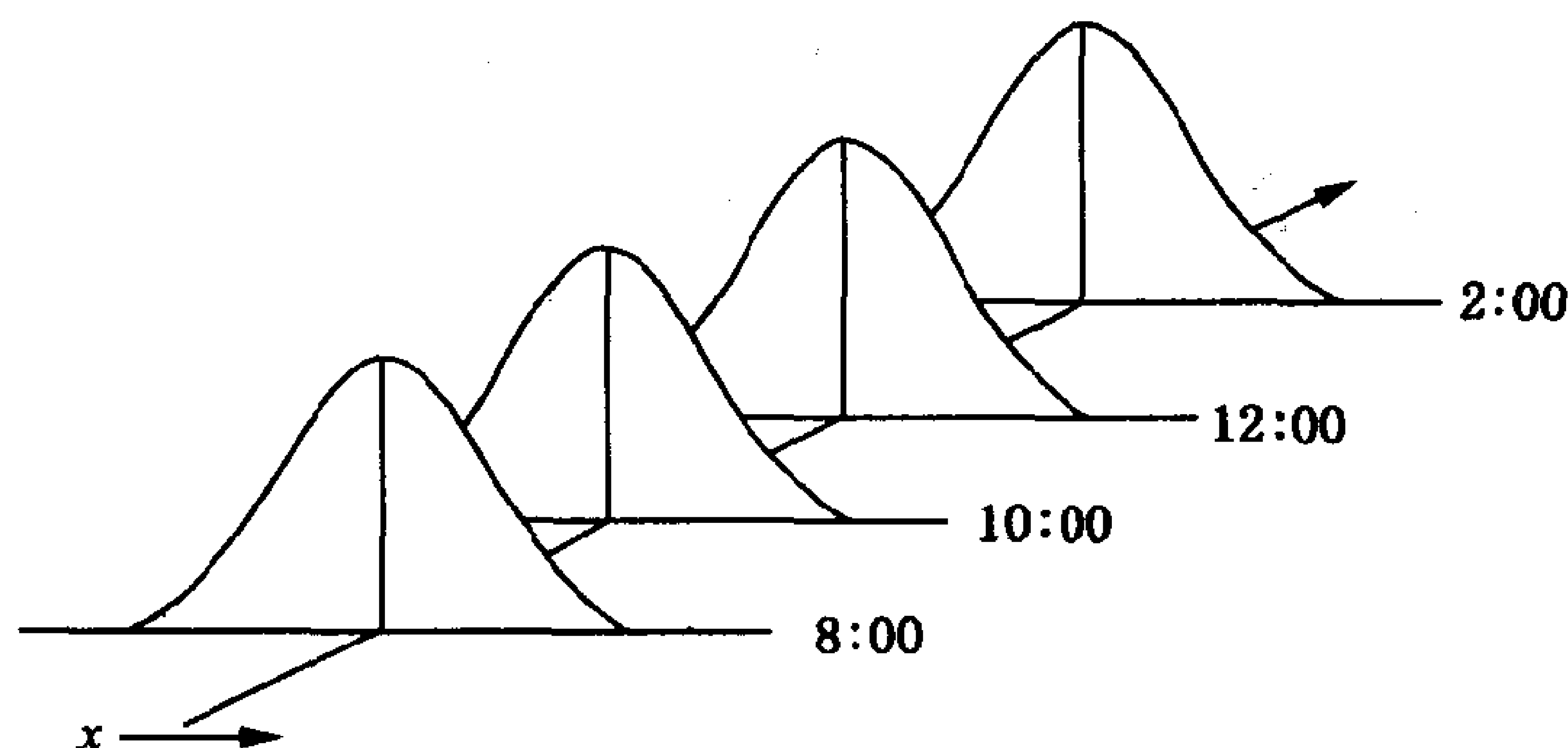


图 3.5.5 生产处于正常状态时测量值的分布

这些因素的影响最后都集中体现在测量值上。由于这些因素很多，每个对测量值的影响都是很微小的，每个因素的出现都是人们无法控制的，是随机的，有时出现，有时不出现，出现时也可能或正或负。这些因素的影响使每个加工轴直径的测量值是不同的，但一组测量值就会呈现正态分布。在生产处于正

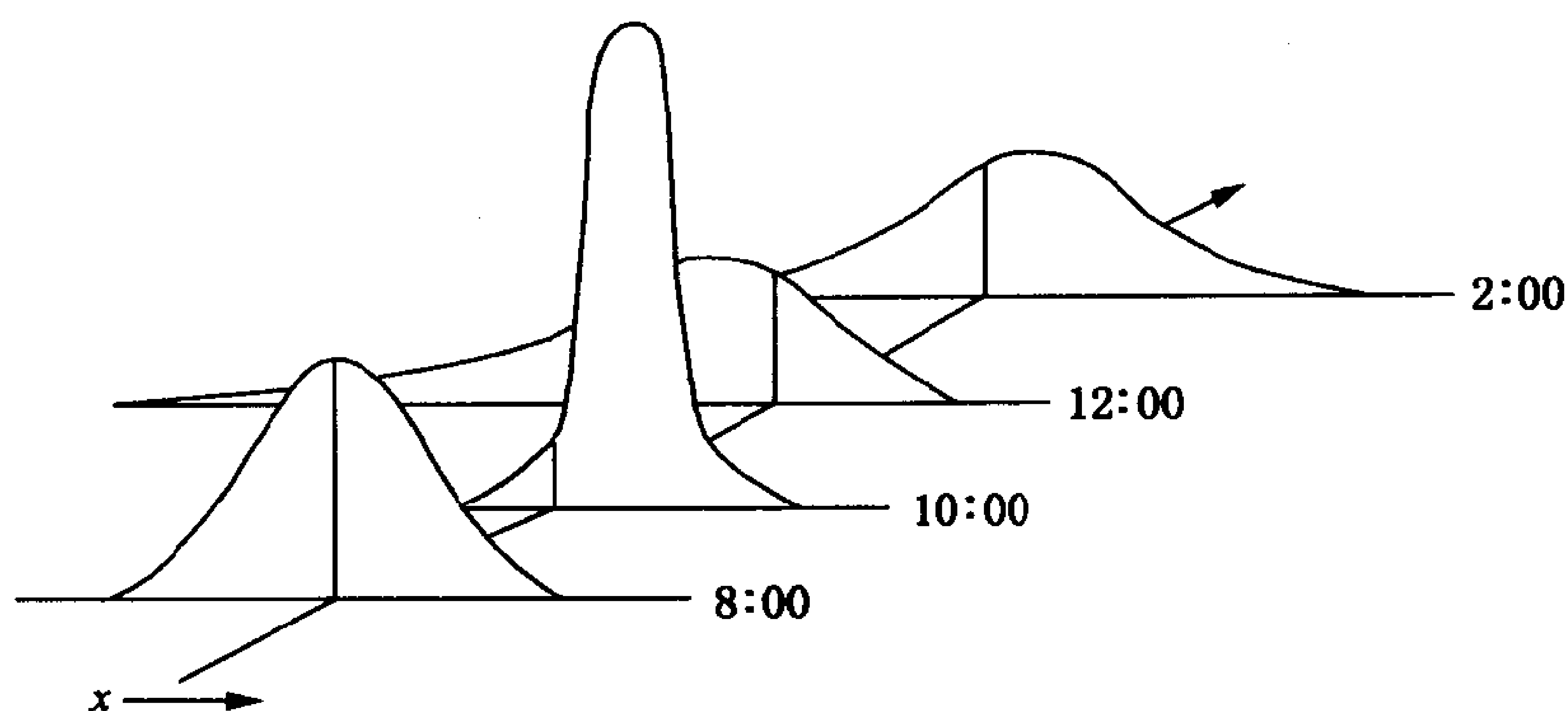


图 3.5.6　生产处于不正常状态时测量值的分布

常状态时，上午 8:00，10:00，12:00，下午 2:00 所呈现出的分布不会随时间而变，见图 3.5.5。当上述诸因素中有一个或两个对加工起突出作用，譬如刀具磨损严重、或电源电压有较大偏差以致影响车床转速，此时测量值的正态性立即受到影响（见图 3.5.6）。这时就要设法寻找出这一、两个异常因素，找出后并加以纠正，生产过程又恢复正态分布。中心极限定理把这个加工过程中所发生的现象从理论上说清楚了。

第四章 统计量及其分布

前三章的研究属于"概率论"的范畴，从这一章开始要转入数理统计的研究。数理统计与概率论一样，其研究对象也是随机现象，但研究方法不同，在数理统计中是通过对随机现象的观测或试验来获取数据，通过对数据的分析与推断去寻找隐藏在数据中的统计规律性。

例 4.0.1 人们的生活离不开衣食住行，某市市区为了建造适合居民户居住的房子，首先就需要了解该市市区居民户的人数的分布状况。我们知道居民户的人数是一个随机变量，若采用普查则工作量太大，为此可抽查部分居民户，通过这部分居民户的人数去推断全市的状况，即了解该随机变量的分布。

例 4.0.2 一个灯泡厂希望了解本厂生产的灯泡的寿命。由于测定灯泡寿命是一种破坏性试验，因而不可能对每一灯泡进行测定，而只能抽取若干个灯泡作试验，从这几个灯泡的寿命数据去推断该种灯泡的寿命特征，如平均寿命等。

例 4.0.3 根据某地环境保护法规定，倾入河流的废物中某种有毒化学物质含量不得超过 3ppm。该地区环保组织对沿河各厂进行检查，测定每日倾入河流的废物中该物质的含量。要以此数据判断这些厂是否符合环保法的规定。

类似的问题在生产活动和经济活动中是经常会遇到的，数理统计就是在解决这些实际问题中逐渐形成了一门独立的学科。从理论上讲，如果我们对某

随机现象进行大量观测或试验，那么我们可以清楚地掌握其统计规律性，然而在实际中常常是办不到的，只能得到有限的甚至少量的数据，这部分数据必然带有随机性，为此需要我们从中尽可能排除随机性的干扰以作出合理的推断。这便是数理统计所要研究的内容。可以这样讲，数理统计是研究怎样以有效的方式收集、整理、分析带随机性的数据，并在此基础上，对所研究的问题作出统计推断，直至对可能作出的决策提供依据或建议。简单地讲，数理统计就是研究处理数据的一门学问，而概率论为数据处理提供了理论基础。

本章主要介绍数理统计的一些基本概念和数据处理的一些初步的方法。

§4.1 总体与样本

4.1.1 总体与个体

在一个统计问题中，我们把研究对象的全体称为**总体**（也称为**母体**），构成总体的每个成员称为**个体**。然而在我们的研究中往往关心的是每一成员的某个数量指标，因而将个体所具有的数量指标的全体作为一个总体，而每一成员的指标就是一个个体。

随着研究问题的不同，总体也会有所不同。

例 4.1.1 在研究上海市人口的年龄构成中，可以把每个具有上海市户籍的人的年龄看成一个个体，上海市有 1200 多万人，如果每个人的年龄写在一张小条子上放在一个大口袋中，那么其中就有 1200 多万个数据，其全体便构成一个总体。如果我们要分别研究上海市男性人口与女性人口的年龄构成，那么应将男性年龄的条子与女性年龄的条子分别放在两个口袋中，从而形成了两个总体，一个供研究男性人口的年龄构成用，一个供研究女性人口的年龄构成用。总体中每一年龄的人数是不同的。图 4.1.1 是根据上海市 1990 年人口普查资料作出的人口年龄的分布图，左边是男性人口的年龄分布，右边是女性人口的年龄分布，从图中可看出上海市人口分布的一些特点，譬如：各年龄上男、女人数类似；在高年龄上女性多于男性；30～40 岁的人数较多（即在 1950～1960 年间出生的人较多，形成了一个生育高峰）等。

现实世界中的总体有许多，但是从总体中所包含的个体个数看，总可分成两类：一类是有限总体，一类是无限总体。上面的例子中，总体中的个体数尽管很多，但总是有限的。然而在不少情况下，总体中的个体个数可以认为是无限

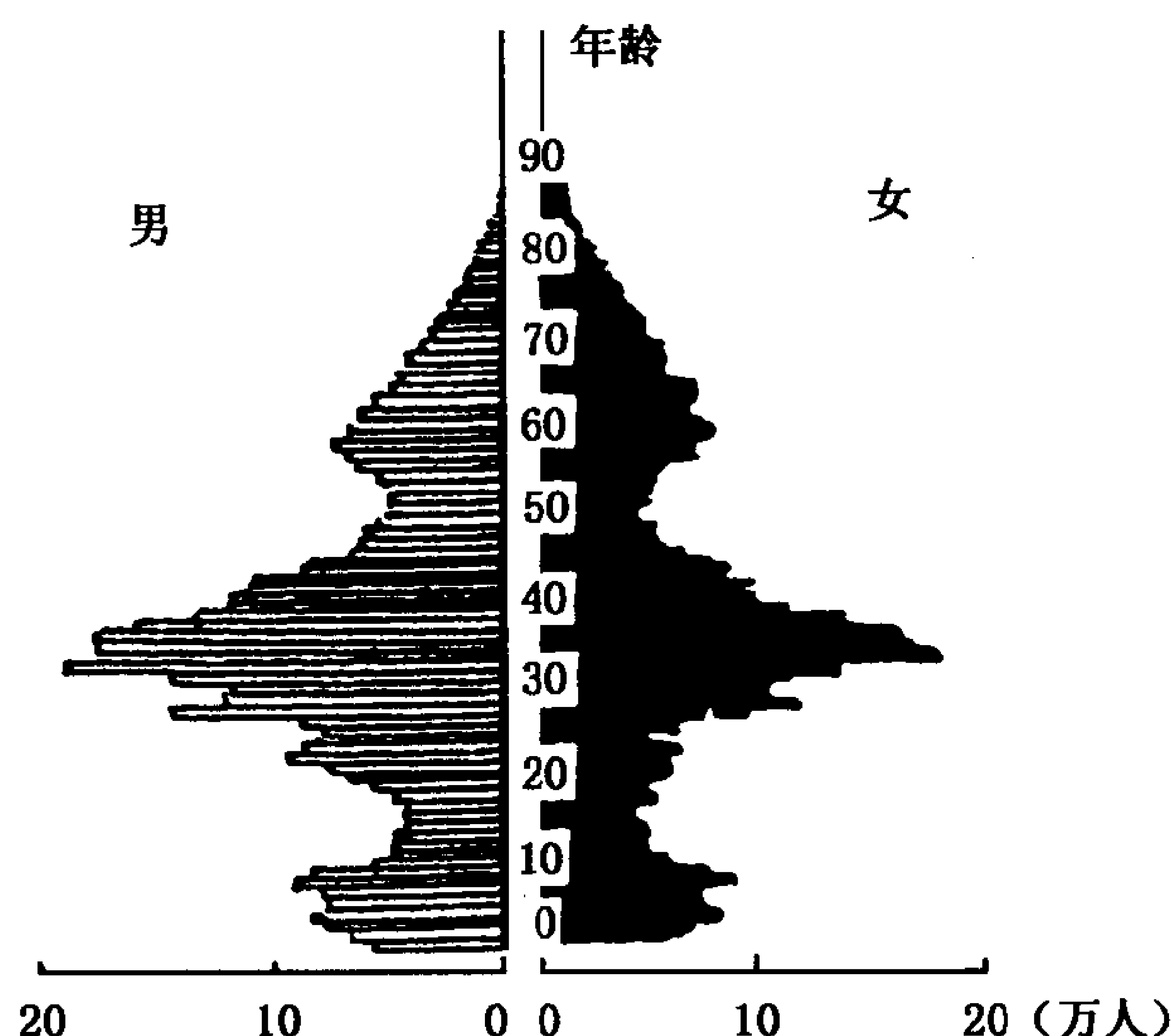


图 4.1.1 1990年上海男性与女性年龄分布图

的，譬如研究某工厂生产的同型号的电视机的寿命来讲，总体不仅包括了已经生产的每一台电视机的寿命，还包括了正在生产和将要生产的每台电视机的寿命，因此其个体数是无限的。有限总体的情况将在“抽样调查”中研究，在我们这门课程中研究的总体总认为是无限总体。

例 4.1.2 设电视机生产厂家关心的是其生产的彩色电视机是否合格，我们将一台彩电合格记为 0，不合格记为 1。那么该厂生产的彩电质量这一总体可以用装有许多 0 与 1 的袋子来表示。不同的彩电生产厂家总体的差别在于袋子中 1 所占的比率 p 的不同，这个 p 便是厂家生产的彩电的不合格品率。从而一个厂家生产的彩电的质量就可以用一个二点分布 $b(1,p)$来表示：

X	0	1
P	$1-p$	p

其中 X 是一个随机变量，表示抽查一台彩电的质量后所得到的不合格数，$X=0$ 表示该台彩电合格，$X=1$ 表示该台彩电不合格。不同厂家的总体间的差异就体现在不同的 p 上。

例 4.1.3 SONY 牌彩电有两个产地：日本与美国，两地的工厂是按同一设计方案和相同的生产线生产同一牌号 SONY 电视机，连使用说明书和检验合格的标准也都是相同的。譬如彩电的彩色浓度 Y 的目标值为 m，公差(允许

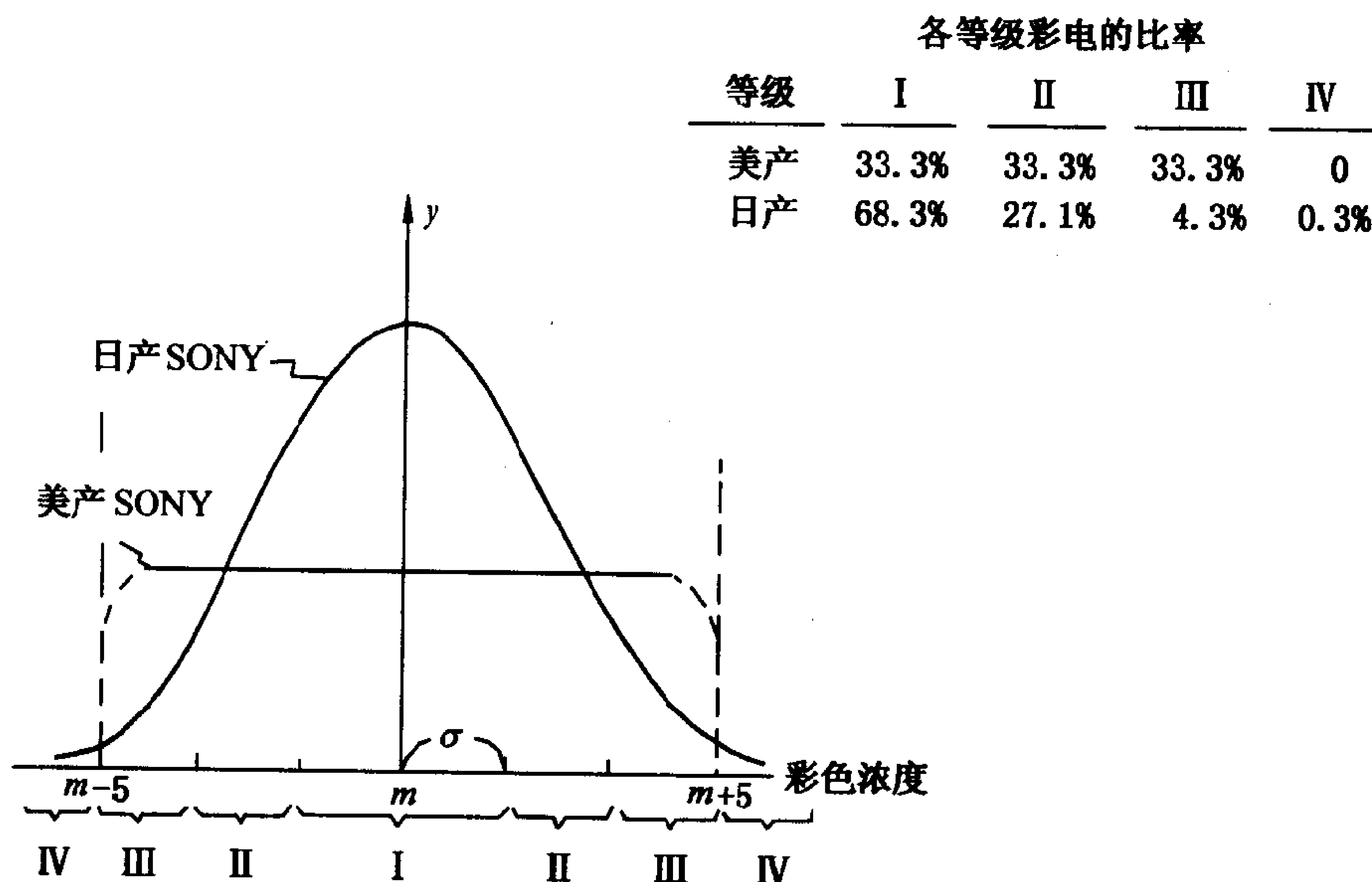
的波动)为 5，当 Y 在公差范围$[m-5,m+5]$内该彩电的彩色浓度为合格，否则判为不合格。

两地产的 SONY 牌彩电在美国市场中都能买到，到 70 年代后期，美国消费者购买日本产 SONY 彩电的热情高于购买美国产 SONY 彩电。这是什么原因呢？1979 年 4 月 17 日日本《朝日新闻》刊登了这一问题的调查报告，报告指出：日产的彩色浓度 Y_1 服从正态分布 $N(m,(5/3)^2)$，而美产的彩色浓度 Y_2 为均匀分布 $U(m-5,m+5)$(见图 4.1.2)。这两个不同分布表示着两个不同总体。这两个总体的均值相同，都为 m，但方差不同。

$$\mathrm{Var}(Y_1)=\left(\frac{5}{3}\right)^2=2.78,\quad \sigma(Y_1)=1.67$$

$$\mathrm{Var}(Y_2)=\frac{10^2}{12}=8.33,\quad \sigma(Y_2)=2.89$$

可见，日产的彩色浓度的方差小于美产的彩色浓度的方差，从而在 I 级品数量上日产 SONY 是美产 SONY 的两倍，这就是美国消费者乐于购买日产 SONY 的主要原因。



各等级彩电的比率

等级	I	II	III	IV
美产	33.3%	33.3%	33.3%	0
日产	68.3%	27.1%	4.3%	0.3%

图 4.1.2 SONY 电视机彩色浓度分布图

为什么两个工厂按同一设计方案、相同设备生产同一种电视机，其彩色浓度会有不同的分布呢？关键在于管理者，美国 SONY 生产厂的管理者按彩色

浓度合格范围$[m-5,m+5]$要求操作，在他看来，只要彩色浓度在此区间内，不管它在区间内什么位置都认为合格，因而造成彩电浓度落在这个区间内任一相同长度小区间内的机会是相同的，从而形成均匀分布。但日产 SONY 的管理者认为，彩色浓度的最佳位置在 m 点上，他要求操作者把彩色浓度尽量向 m 靠近，这样一来，彩色浓度在 m 周围的机会就多，而远离 m 的机会就少，最后的总体呈正态分布。

上述的无限总体是由一堆数组成的，其中有些数可以相同，但是各种不同值的数在总体中所占的比例不同。因此为了清楚地表示总体，可以用随机变量 X 或其概率分布来表示总体。当用随机变量 X 表示总体时，可以简称总体 X，如果 X 的分布函数为 $F(x)$，那么 $F(x)$也是总体的分布函数，所以也可以用 $F(x)$表示一个总体。譬如当描述总体的随机变量 X 服从正态分布时，也称该总体为正态总体；今后称“从某总体中抽样”也可称“从某分布中抽样”。

在统计中，用来描述总体的分布通常是未知的，因此确定总体的概率分布就是统计所要研究的一个问题。有的总体的分布类型是已知的，但是其中的参数未知，那时就要研究如何确定总体的参数。譬如在例 4.1.2 中总体服从的是二点分布，但是参数 p 是未知的，因此需要我们去确定 p。

在有些问题中，我们对每一研究对象可能要观测两个或多个指标，则可用多维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_p)$去描述总体，也可用其联合分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_p)$去描述总体，这种总体称为 **p 维总体**。例如我们对每一居民户需研究四个指标：X_1—月收入，X_2—月支出，X_3—居住面积，X_4—人数，则可用四维随机向量(X_1,X_2,X_3,X_4)去描述所要研究的总体。这是“多元分析”中研究的对象。本书主要研究一维总体，有时会涉及二维总体。

4.1.2 样本

由于总体可以用随机变量 X 来描述，因此研究总体就要研究 X 的分布或分布的某些特征量。如果我们能对总体中每一个个体进行观察，那当然可以了解总体，就象例 4.1.1 那样，为了解具有上海市户籍的人的年龄，进行一次人口“普查”，就可以得到每一个人的年龄，画出如图 4.1.1 那样的图形，就可以了解总体的分布情况。然而这在许多情况中是没有必要的(如例 4.0.1，要花费大量的人力、物力)或根本不可能(如例 4.0.2，要测定每个灯泡的寿命必须进行破坏性试验)。因此把“普查”改为“抽样”是一种可行的办法，即从总体中抽出若干个个体，对这些个体(样品)进行观察，然后对总体进行推断。

从总体中抽出的部分个体组成的集合称为**样本**(也称**子样**)，样本中所含

的个体称为**样品**，样本中样品的个数称为**样本容量**（也称**样本量**）。

例 4.1.4 样本的一些例子与观察值的表示方法：

（1）某食品厂用自动装罐机生产净重为 345 克的午餐肉罐头，由于随机性，每个罐头的净重都有差别。现在从生产线上随机抽取 10 个罐头，秤其净重，得如下结果：

344　336　345　342　340　338　344　343　344　343

这是一个容量为 10 的样本的观察值，它是来自该生产线罐头净重这一总体的一个样本的观察值。

（2）对某型号的 20 辆汽车记录每加仑汽油各自行驶的里程数（单位：公里）如下：

29.8　27.6　28.3　28.7　27.9　30.1　29.9　28.0　28.7　27.9

28.5　29.5　27.2　26.9　28.4　27.8　28.0　30.0　29.6　29.1

这是一个容量为 20 的样本的观察值，对应的总体是该型号汽车每加仑汽油行驶的里程。

（3）对 363 个零售商店调查周零售额（单位：元）的结果如下：

零售额	≤1 000	(1 000,5 000]	(5 000,10 000]	(10 000,20 000]	(20 000,30 000]
商店数	61	135	110	42	15

这是一个容量为 363 的样本的观察值，对应的总体是所有零售店的周零售额。不过这里没有给出每一个样品的具体的观察值，而是给出了样本观察值所在的区间，称为分组样本的观察值。这样一来当然会损失一些信息，但是在样本量较大时，这种经过整理的数据更能使人们对总体有一个大致的印象。这种数据整理方法将在本节后面部分来叙述。

（4）对 110 只某种电子元件进行寿命试验，其失效时间经过分组整理后如下：

组号	失效时间范围	失效个数
1	0～400	6
2	400～800	28
3	800～1 200	37
4	1 200～1 600	23
5	1 600～2 000	9
6	2 000～2 400	5
7	2 400～2 800	1
8	2 800～3 200	1

这是一个容量为 110 的样本观察值，对应的总体是某电子元件的寿命。这也是一个分组样本，在分组中习惯上包括组的右端点，而不包括左端点，譬如 400～800 为半开区间(400,800]。

在样本中常用 n 表示样本容量，从总体中抽出的容量为 n 的样本记为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，这里每个 X_i 都看成是随机变量，因为第 i 个被抽到个体具有随机性，在观察前是不知其值的。样本的观察值记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，上面例子中给出的都是样本的观察值。

我们抽取样本的目的是为了对总体进行推断。为了能从样本正确推断总体就要求所抽取的样本能很好地反映总体的信息，所以要有一个正确的抽取样本的方法。最常用的抽取样本的方法是“简单随机抽样”，它要求抽取的样本满足如下要求：

第一，要有代表性，即要求每一个体都有同等机会被选入样本，这便意味着每一样品 X_i 与总体 X 有相同的分布，这样的样本便具有代表性。

第二，要有独立性，即要求样本中每一样品取什么值不受其它样品取值的影响，这便意味着 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。

用简单随机抽样方法获得的样本称为**简单随机样本**，简称**样本**。这时 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 可以看成是相互独立的具有同一分布的随机变量，简称它们为独立同分布(简记为 iid)样本。设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布函数为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

在实际中为获得简单随机样本可设想一种原始的作法。譬如一批灯泡有 600 个，要从中抽 6 个作寿命试验，这 6 个灯泡如何选呢？为此可对这 600 个灯泡编上号 1～600，另准备 600 个大小质地完全相同的球，球上依次写上 1～600，将它们放入一个不透明的袋子中，并彻底搅乱，然后从中取出 6 个球来，这 6 个球上的号码对应的 6 个灯泡便取出进行试验，这 6 个灯泡的寿命就构成容量为 6 的样本。

然而在实际中要准备这么多球，还要彻底搅乱，这并不是一件容易的事，为此有两种方案可用。

方案一：利用“随机数表”，本书附表 7 是一大本随机数表中的一页。我们可从该表任意位置开始读数。仍假定要从 600 个灯泡中抽 6 个，设现从该表的第一行第一列开始，以三列为一个数，从上到下读出：

537,633,358,634,982,026,645,850,585,358,039,626,084,⋯

凡其值大于 600 的便跳过(数下划—),如出现的数与前面重复的也跳过(数下划=),直到选出 6 个不超过 600 的不同的数为止。现可将编号为 537,358,026,585,039,084 的六个灯泡取出测定其寿命。

方案二:可利用计算机产生 6 个 1～600 间的不同的随机整数,取出它们对应的灯泡进行试验,测定它们的寿命。

4.1.3 从样本去认识总体

样本来自总体,因此样本中必包含了总体的信息,因此我们希望通过样本的观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来获得有关总体分布类型或有关总体特征值的信息。然而样本观测值是一组数,粗看可能是杂乱无章的,因此必须对它进行整理与加工后才会显示出规律。整理加工的方法有图表法与统计量。本节介绍对数据整理的图表方法,以显示样本所来自的总体分布的信息。

4.1.3.1 频数频率分布表及其图示

如果总体 X 是离散随机变量,设其一切可能取值为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$,则对数据整理的一般方法是统计在样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中取 a_i 的个数,称为频数,常记为 $n_i(i=1,2,\cdots,k)$。为了便于比较,通常还计算其频率 $f_i=n_i/n$,并将它们列成一张表格,称为频数、频率分布表(见表 4.1.1)。

例 4.1.5 我们通常饮用的矿泉水有 19 个质量指标。某市技术监督局一次抽查了 58 批矿泉水,记录每一批矿泉水的每个指标是否合格,从中可统计出每批矿泉水不合格指标的个数 X。这里 X 是一个离散随机变量,其一切可能取值为 0,1,…,19。58 批矿泉水的指标不合格数 $x_1,x_2,\cdots,x_{58}$ 构成了一个容量为 58 的样本的观测值,每个 x_i 可取 0,1,…,19 中某个值,将它们整理后列成表 4.1.1。

表 4.1.1 58 批矿泉水不合格指标数的频数、频率分布表

指标不合格数 a_i	频数 n_i	频率 $f_i=n_i/n$
0	33	0.570
1	17	0.293
2	5	0.086
3	1	0.017
4	2	0.034
合计	$n=58$	1.000

从表 4.1.1 可以看出各项指标全部合格的矿泉水占 57%，仅一项指标不合格的占 29.3%，两者合计占 86.3%。

为直观起见，可用线条图（图 4.1.3）表示，其横坐标为 X 的取值，纵坐标为频数或频率。

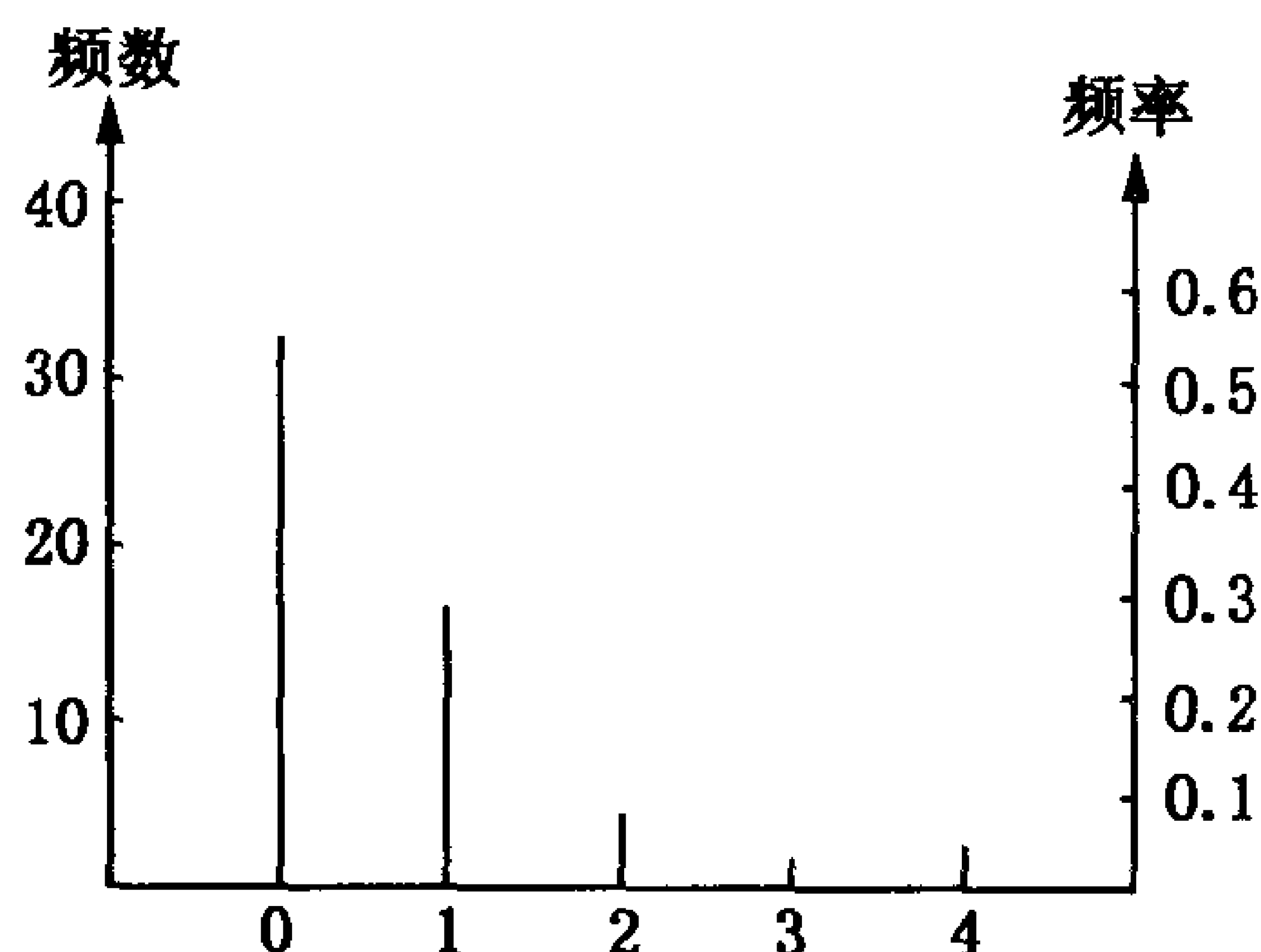


图 4.1.3　例 4.1.5 的线条图

如果总体 X 是连续随机变量，则其取值可以充满某一区间，从而无法一一列出它们的取值，这时数据整理的一般方法是进行分组统计，将其可能取值分成 k 个小区间：$(a_0,a_1]$，$(a_1,a_2]$，…，$(a_{k-1},a_k]$，统计 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 落在每一小区间中的频数，并计算其频率，通常也列成表格形式，其一般步骤见例 4.1.6。

例 4.1.6　上海证券交易所将每天各种股票的交易价格概括为一个综合指标，称为“上证指数”，如果今天的上证指数为 y，而上一个交易日的上证指数为 y'，则称 $x=y-y'$ 为上证指数的涨跌值。下面的数据便是上海证券交易所 1995 年头 50 个交易日上证指数涨跌的观测值（摘自新民晚报）：

13.93	−6.92	−6.13	−14.79	−15.70	−2.83	−11.01	−4.28	−9.03	−0.87
5.70	−21.92	−0.48	−17.80	−5.87	8.20	−2.67	−28.87	−1.23	1.26
19.61	−11.98	7.46	−0.73	−5.27	−4.47	−4.61	1.20	6.18	53.50
−5.51	−30.70	2.84	−12.01	7.70	3.89	16.37	39.08	16.66	−12.15
−15.22	−19.30	−0.06	2.01	−15.64	7.28	13.64	−8.07	6.50	21.75

由于上证指数的涨跌是一个连续随机变量，因而我们采用分组方法进行整理，具体步骤如下：

（1）找出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最小值 $x_{(1)}$ 与最大值 $x_{(n)}$，并计算极差 R_n。

在本例中 $n=50, x_{(1)}=-30.70, x_{(50)}=53.50, R_{50}=53.50-(-30.70)=84.20$。

(2)根据样本容量 n，确定分组数 k。这里有一个推荐公式：

$$k=1+3.322\lg n$$

也可按下表选择 k：

n	k
<50	5～6
50～100	6～10
100～250	7～12
>250	10～20

在本例中 $n=50$，拟分 6～10 组，现取 $k=9$。

(3)确定各组端点：$a_0<a_1<\cdots<a_k$，通常 $a_0<x_{(1)}, a_k>x_{(n)}$，分组可以等间隔亦可不等间隔，等间隔用得较多。在等间隔分组时，组距 $d\approx R_n/k$，一般总取 d 为数据的最小测量单位的整数倍。

在本例中，取 $a_0=-35, d=\frac{84.20}{9}\approx 10$，则 $a_i=a_0+10i, i=1,2,\cdots,9$。

(4)用唱票法统计落在每一区间 $(a_{i-1},a_i]$，$i=1,2,\cdots,k$ 中的频数 n_i，并计算频率 $f_i=n_i/n$，将它们列成分组统计的频数频率分布表。

本例的频数、频率分布表见表 4.1.2。

表 4.1.2 1995 年头 50 个交易日上证指数涨跌分组频数频率分布表

组号 i	分组区 $(a_{i-1},a_i]$	频率统计	频数 n_i	频率 $f_i=n_i/n$
1	(−35,−25]	丅	2	0.04
2	(−25,−15]	正一	6	0.12
3	(−15,−5]	正正丅	12	0.24
4	(−5,5]	正正正	15	0.30
5	(5,15]	正下	9	0.18
6	(15,25]	下	4	0.08
7	(25,35]		0	0.00
8	(35,45]	一	1	0.02
9	(45,55]	一	1	0.02
合　计			$n=50$	1.00

当总体是连续随机变量时，为直观起见，也常用图形来表示，常用的有两种图形：

图形一：样本直方图。

样本直方图(简称直方图)的作法如下：在横坐标上标上各个分组的端点 $a_0,a_1,\cdots,a_k$，对每一组以区间$(a_{i-1},a_i]$为底，以频数 n_i 为高画一个矩形，纵坐标的尺度标为 f_i/d，即频率/组距。图 4.1.4(a)便是例 4.1.6 的直方图。

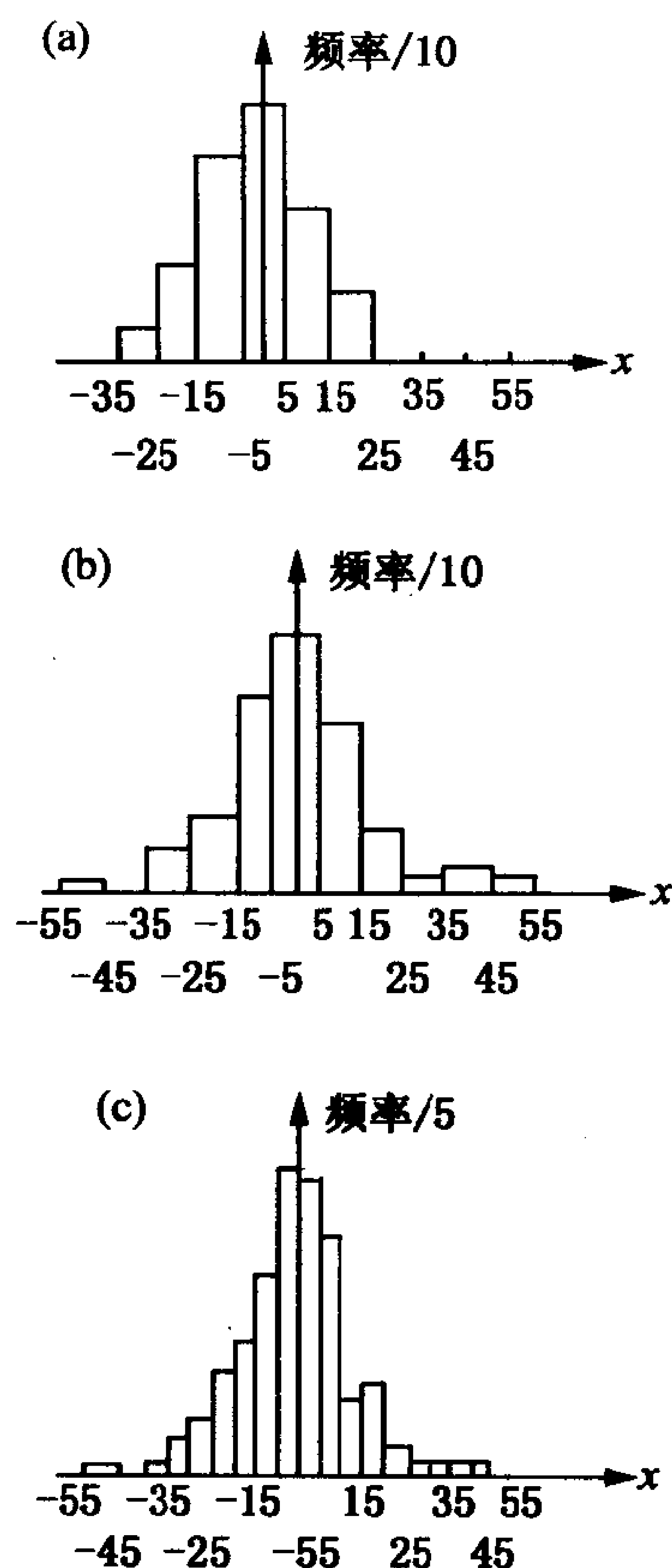


图 4.1.4 样本直方图

当纵坐标取为频率/组距时，直方图图形有一个很方便的解释。这时每一个小的矩形的面积恰为数据落在该区间的频率，所有小矩形的面积之和为 1。样本直方图的具体形状会随样本观测值的不同而有所变化，但当 n 越来越大时，分组可越来越多，此时组距将越来越小，从而样本直方图顶部折线将会逐渐趋向一条稳定的曲线，这条曲线便是总体对应的概率密度曲线。所以样本直方图可以看成总体分布的一个缩影。

对例 4.1.6，我们可以扩大样本容量，图 4.1.4(b)与(c)是对应于样本容量 $n=100$ 与 200 时的样本直方图，前者组距为 10，后者组距为 5。从图 4.1.4 的三个样本直方图可见，图形随样本观测值不同略有差异，但基本形状差不多，呈现了“中间高、两边低、左右基本对称”的特点，也可想象当 n 更大时，顶部折线会趋于正态曲线，这表明样本对应的总体很可能为正态总体。

样本直方图显示的形状除了上述的形状外还有其它的形状，譬如样本直方图有单调下降趋势时可能为指数分布(图 4.1.5)；如果中间高，两边低，但左右不对称，右尾长时可能为对数正态分布(图 4.1.6)等。总之，从样本直方图的形状可使我们对总体的分布类型有一个大致的认识。

例 4.1.7 画出例 4.1.4(4)中的样本直方图(见图 4.1.7)，可见它不对称，右尾较长，有可能该样本来自对数正态分布。

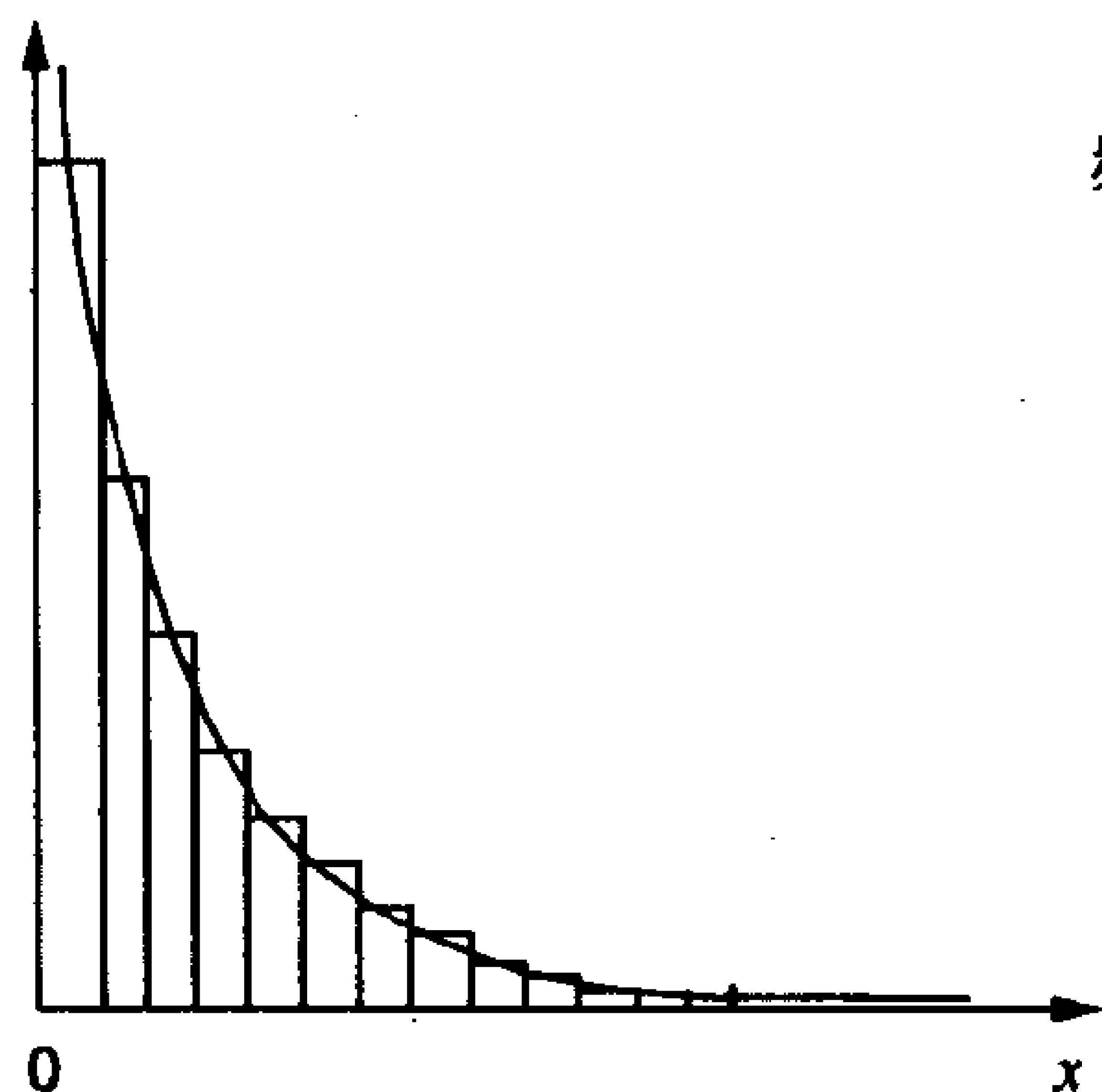


图 4.1.5　来自指数分布的直方图

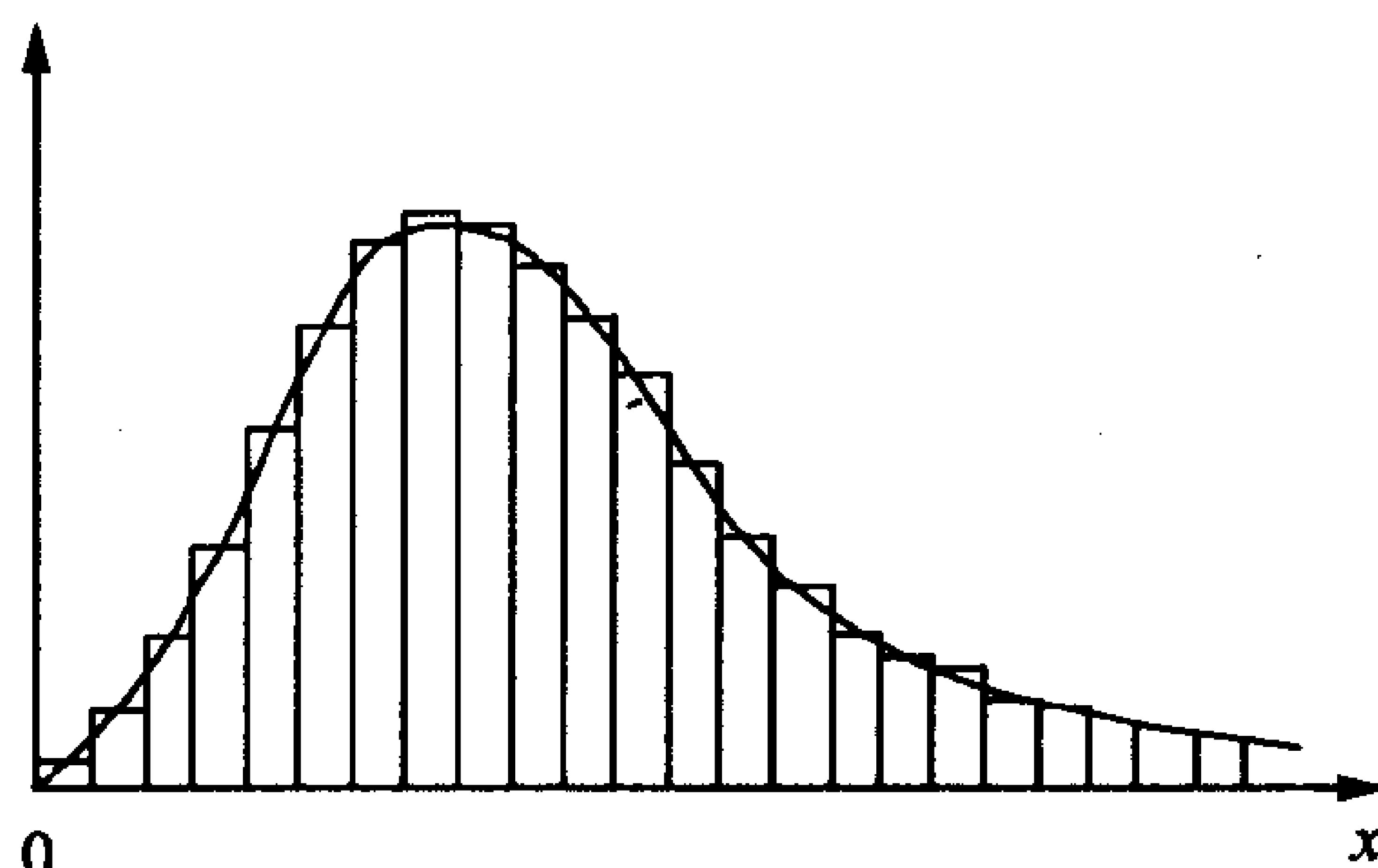


图 4.1.6　来自对数正态分布的直方图

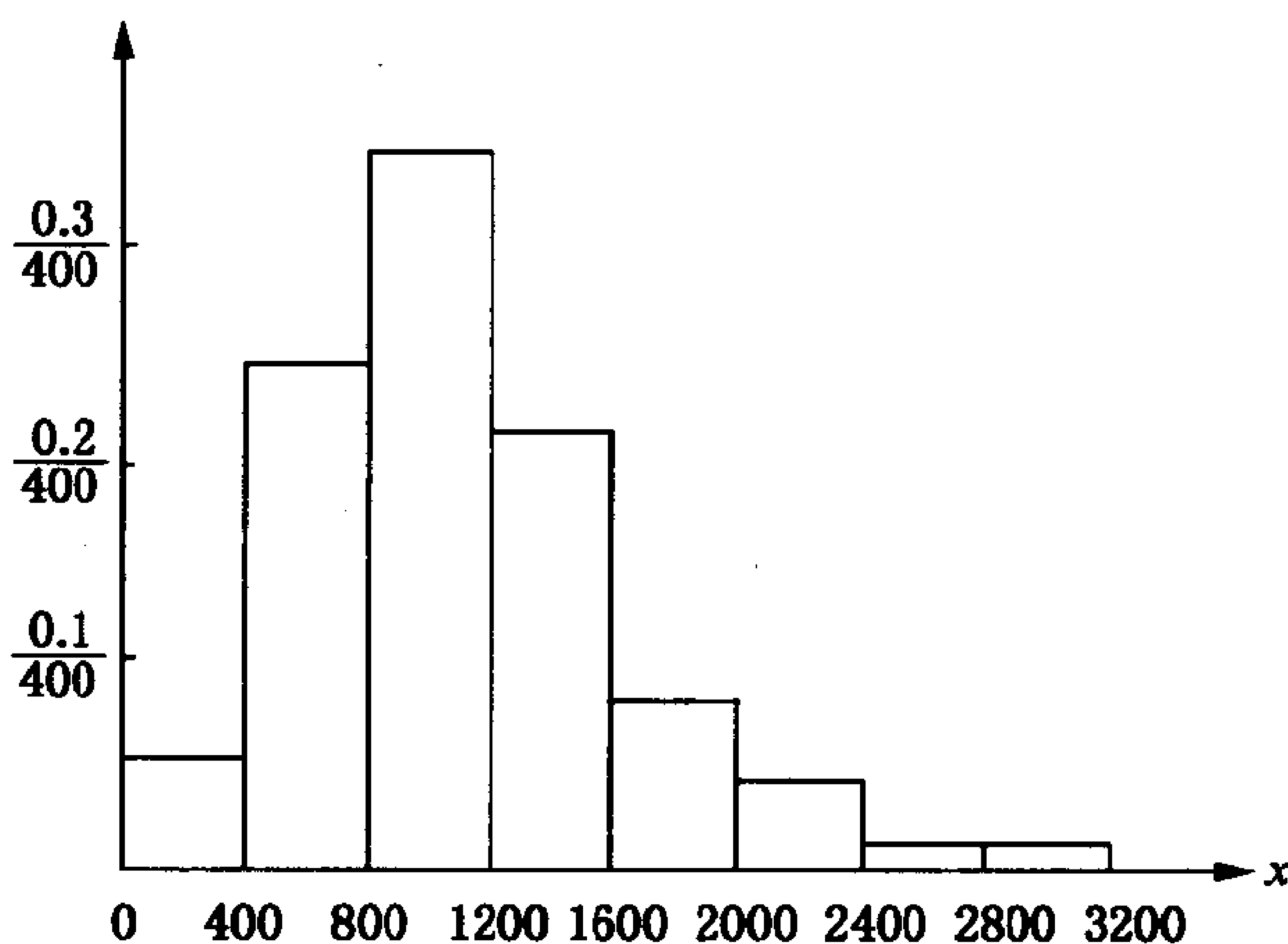


图 4.1.7　例 4.1.4(4)的样本直方图

图形二：茎叶图(又称枝叶图)。

茎叶图是另一种数据整理用的图形，在这张图上保留了原始数据的信息，从而可为我们提供有关总体的更多的信息。下面先通过一个例子来说明其作法。

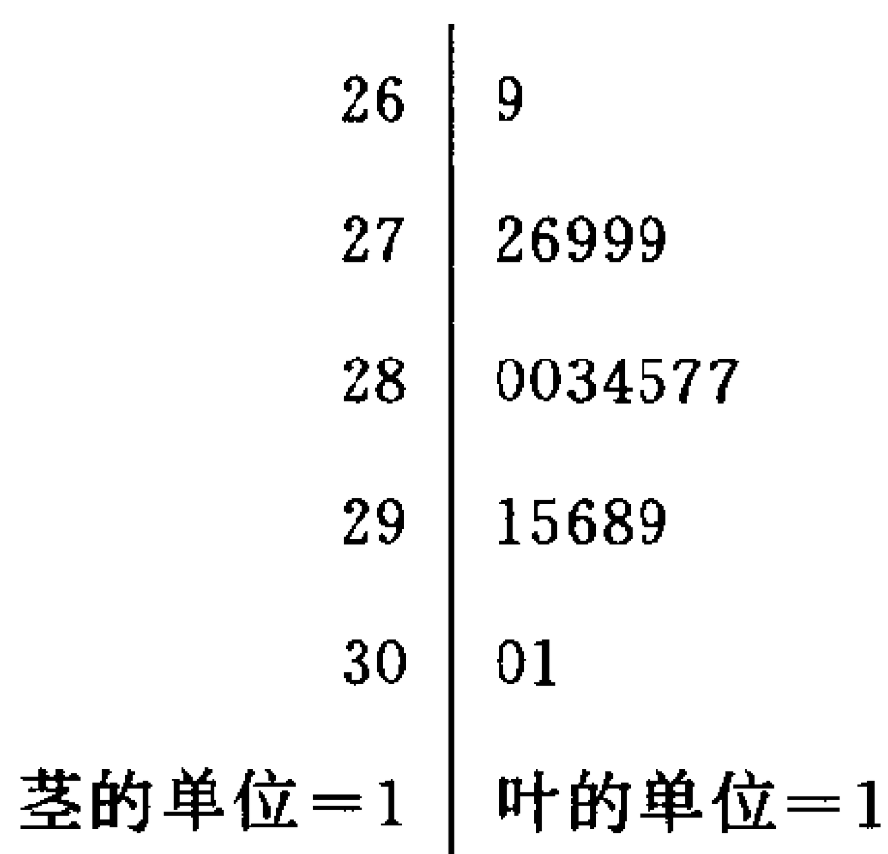
例 4.1.8　对某型号的 20 辆汽车记录了各自每加仑汽油行驶的里程数(公里)如下：

29.8	27.6	28.3	28.7	27.9	29.9	30.1	28.0	28.7	27.9
28.5	29.5	27.2	26.9	28.4	27.9	28.0	30.0	29.6	29.1

为作茎叶图，需要把每个数据分成两个部分，高位部分称为“茎”，低位部分称为“叶”。为此先考察一下数据，发现数据在 26～31 间，因此可对数据作如下划分，以第一个数据为例：

数据		分开		茎与叶
29.8	→	29|8	→	29 与 8

画茎叶图时，先将茎按从小到大的次序写在一条竖线的左边，然后将每个数据的叶写在相应的茎的竖线的右边，再将每一行的叶也按从小到大的次序排列，并添上单位，这就构成了一张茎叶图。例 4.1.8 的茎叶图见图 4.1.8。



26	9
27	26999
28	0034577
29	15689
30	01
茎的单位＝1	叶的单位＝1

图 4.1.8　例 4.1.8 的茎叶图

我们可以将茎叶图看成一张转了 90°的直方图，只是在图 4.1.8 中每组区间为[26,27)，[27,28)，[28,29)，[29,30)，[30,31)而已，但在茎叶图中不仅给出了落在各区间的频数，还给出了该区间中每一个具体的观测值。从图中可看出此分布是对称的，中间高、两边低，从而可以设想总体分布可能是正态的。

在图 4.1.8 中实际上已经将样本观察值从小到大排列了，最小值是 26.9，最大值是 30.1，它还可以提供更多的信息，这将在后面及 § 4.3 中进行讨论。

4.1.3.2　经验分布函数

样本直方图可以形象地去描述总体概率密度函数的大致形状，经验分布函数将可以用来描述总体分布函数的大致形状。

定义 4.1.1　设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，从中获得的样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，将它们从小到大排列成 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$，令

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_{(1)}\\ k/n, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)}, \quad k=1,2,\cdots,n-1\\ 1, & x\geqslant x_{(n)}\end{cases} \tag{4.1.1}$$

则称 $F_n(x)$ 为该样本的**经验分布函数**。

经验分布函数 $F_n(x)$在 x 点的函数值其实就是观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于等于 x 的频率，它是一个右连续的非降函数，且 $0\leqslant F_n(x)\leqslant 1$，因而它具有分布函数的性质，我们可以将它看成是以等概率取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的离散随机变量的分布函数。经验分布函数的图象是一个非降右连续的阶梯函数。

例 4.1.9 例 4.1.4(1)的经验分布函数为：

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<336\\ 0.1, & 336\leqslant x<338\\ 0.2, & 338\leqslant x<340\\ 0.3, & 340\leqslant x<342\\ 0.4, & 342\leqslant x<343\\ 0.6, & 343\leqslant x<344\\ 0.9, & 344\leqslant x<345\\ 1, & x\geqslant 345\end{cases} \tag{4.1.2}$$

其图象如图 4.1.9 所示。

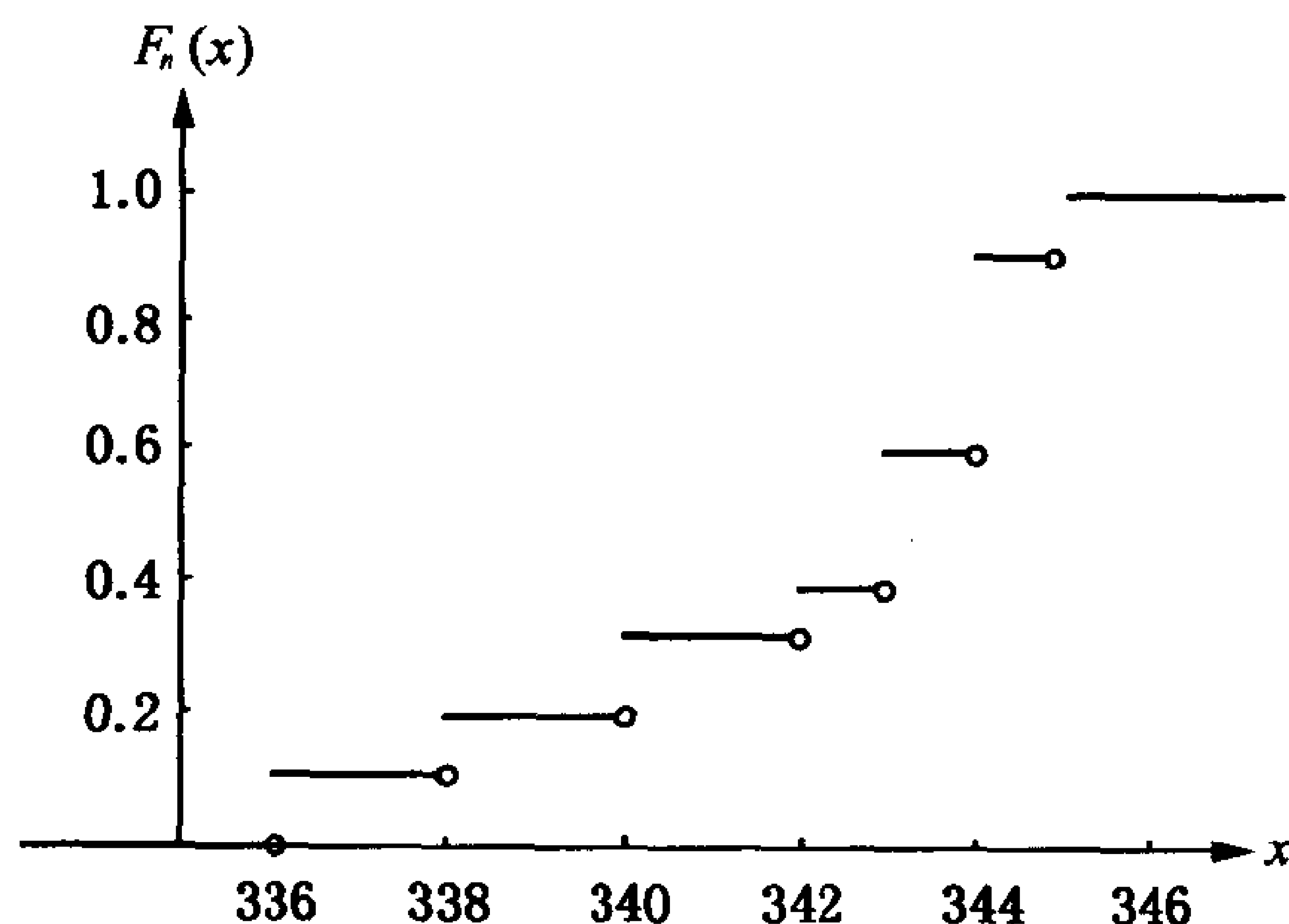


图 4.1.9 例 4.1.4(1)的经验分布函数

前面已提到对连续总体 X 而言，当样本观测值不同时，直方图形态会有所不同，但只要样本容量 n 增大，分组越来越多，每一小区间长度越来越小时，直方图顶部折线会稳定于总体密度函数，同样，随样本观测值不同，经验分布函数 $F_n(x)$也不同，但只要样本容量 n 增大，那么 $F_n(x)$也将在概率意义下越来越“靠近”总体分布函数 $F(x)$，对此不加证明地给出如下定理。

定理 4.1.1(格里汶科定理) 对任给的自然数 n，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是取自总体分布函数 $F(x)$的一个样本观测值，$F_n(x)$为其经验分布函数，又记

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \tag{4.1.3}$$

则有

$$P(\lim_{n\to\infty} D_n = 0) = 1$$

这一定理中的 D_n 可衡量 $F_n(x)$ 与 $F(x)$ 在 x 的一切值上的最大差异。定理表明 n 足够大后，对一切 x，$F_n(x)$ 与 $F(x)$ 之差的绝对值都很小这一事件发生的概率接近于 1。

4.1.4 正态概率纸

概率纸是一种特殊刻度的坐标纸，将样本观测值画到概率纸上可帮助我们直观地判断总体是否属于某种分布。概率纸有很多种，最常用的是正态概率纸，下面来介绍正态概率纸的构造及其用法。

4.1.4.1 正态概率纸的构造

我们知道，当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，其分布函数 $F(x)$ 可用标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示，即

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{4.1.4}$$

此函数在 (x, F) 坐标系中是一条上升曲线（见图 2.3.6(b)），另外，由于 $\Phi(\cdot)$ 是严增函数，故有反函数。由(4.1.4)容易写出这个反函数

$$\Phi^{-1}(F) = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{4.1.5}$$

这个反函数在 (x, Φ^{-1}) 坐标系中是一条上升直线，譬如，当 $X \sim N(3, 2^2)$ 时，其分布函数在 (x, Φ^{-1}) 坐标系中是如下一条上升直线：

$$\Phi^{-1}(F) = \frac{x-3}{2}$$

反之，在 (x, Φ^{-1}) 坐标系中的任一条上升直线，也可确定一个正态分布函数。譬如，在 (x, Φ^{-1}) 坐标系中有一条上升直线 $\Phi^{-1} = 2x - 4$。它可以改写为 $\Phi^{-1} = (x-2)/0.5$，这条直线对应的正态分布是 $N(2, 0.5^2)$。

上述性质可帮助我们识别正态分布。例如 $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$ 是来自 X 的容量为 n 样本的次序观察值，则概率 $F_i = P(X \leqslant x_{(i)})$ 可设法估计出来，实际中常用的估计是

$$\hat{F}_i = \frac{i}{n+1} \tag{4.1.6}$$

若对每个 $\hat{F}_i$ 再计算 $\hat{\Phi}_i^{-1} = \Phi^{-1}(\hat{F}_i)$（这是标准正态分布的 $\hat{F}_i$ 分位数），若在 (x, Φ^{-1}) 坐标系中描出如下 n 个点

$$(x_{(i)},\hat{\Phi}_i^{-1}),\quad i=1,2,\cdots,n$$

假如这 n 个点近似在一上升直线附近，我们可以很有把握地说，这个样本是来自某个正态总体。假如这 n 个点明显不在一条上升直线附近，那我们可以很有把握地说，这样本不是来自正态总体。

为了减少计算，我们对坐标系 (x,Φ^{-1}) 作一改进，只在纵坐标上以 $\Phi^{-1}=\Phi^{-1}(F)$ 作刻度，而标以相应的 F（见图 4.1.10）。这在作出新坐标系时增加些困难，但可使使用者省去了计算 $\Phi^{-1}(F)$ 的麻烦。具体做法如下：

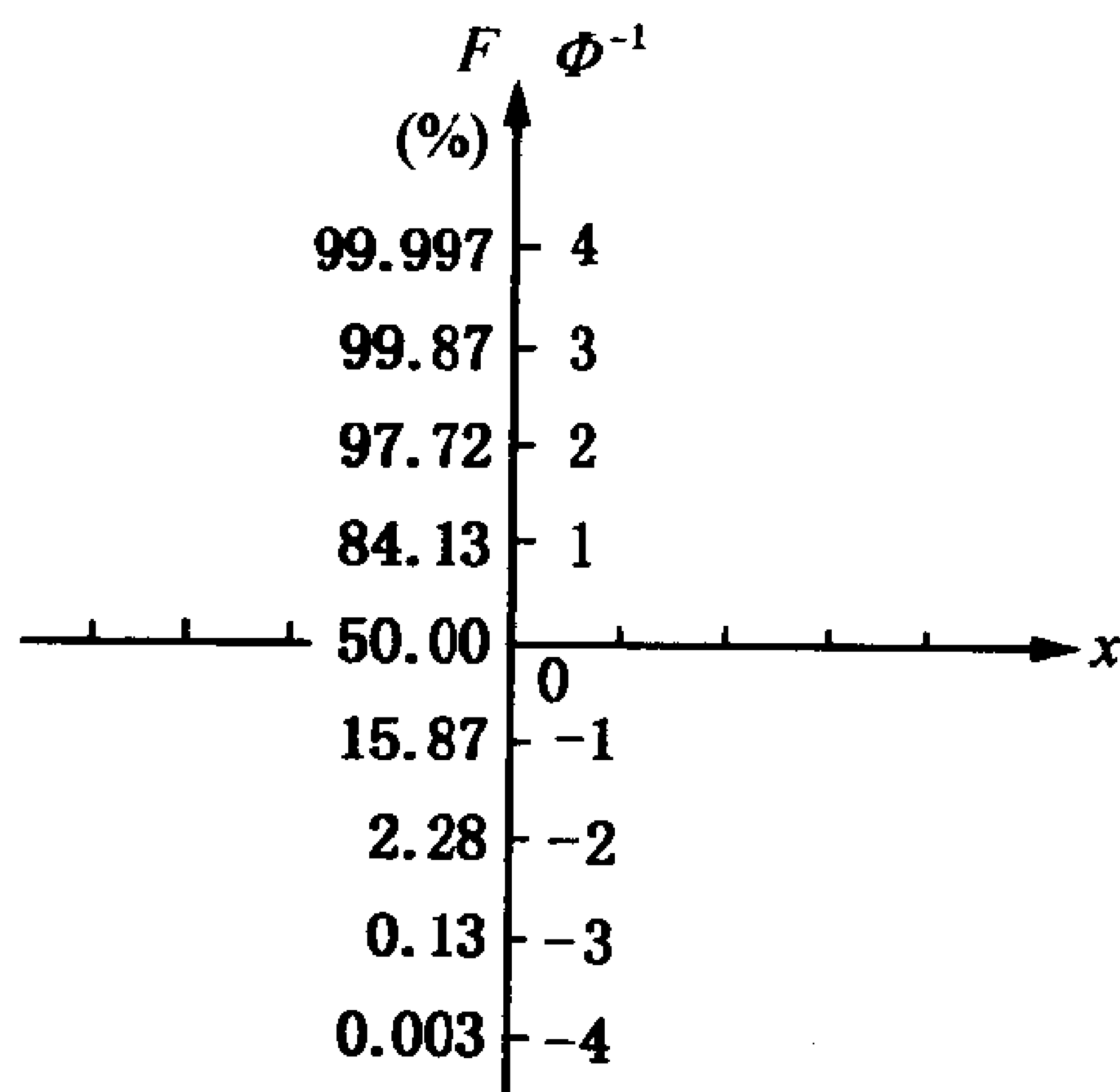


图 4.1.10 正态概率纸的构造

在 $\Phi^{-1}(F)=0$ 处，标以 $F=\Phi(0)=0.50$

在 $\Phi^{-1}(F)=1$ 处，标以 $F=\Phi(1)=0.8413$

在 $\Phi^{-1}(F)=2$ 处，标以 $F=\Phi(2)=0.9772$

在 $\Phi^{-1}(F)=-1$ 处，标以 $F=\Phi(-1)=0.1587$

在 $\Phi^{-1}(F)=-2$ 处，标以 $F=\Phi(-2)=0.0228$

这样得到的坐标纸便是正态概率纸。其横坐标是等间隔的，纵坐标是不等间隔的。还有一点要指出，由于 $\lim\limits_{u\to\infty}\Phi(u)=1$，$\lim\limits_{u\to-\infty}\Phi(u)=0$，故在纵轴上无法标出 0 与 1，通常只标出 0.01%到 99.99%。

4.1.4.2 利用正态概率纸判断总体是否为正态分布的步骤

根据正态概率纸的构造可知，用正态概率纸判断总体是否服从正态分布的步骤如下：

(1)将样本观测值排序：$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$；

(2)将点$\left(x_{(i)},\frac{i}{n+1}\right)$，$i=1,2,\cdots,n$ 点在正态概率纸上。

(3)目测这 n 个点的位置，如果这 n 个点在一直线附近，尤其是纵坐标在20～80%间的点离某直线很近时，可以认为总体服从正态分布，否则认为总体不是正态分布。

例 4.1.10 对某种高温合金钢的 9 个试样在 580℃的温度和 15.5 kg/mm² 的应力下进行试验，其断裂时间 t_i 如表 4.1.3 所列，这里 t_i 已经进行了排序，并计算了对应的$\frac{i}{n+1}$，$i=1,2,\cdots,9$。

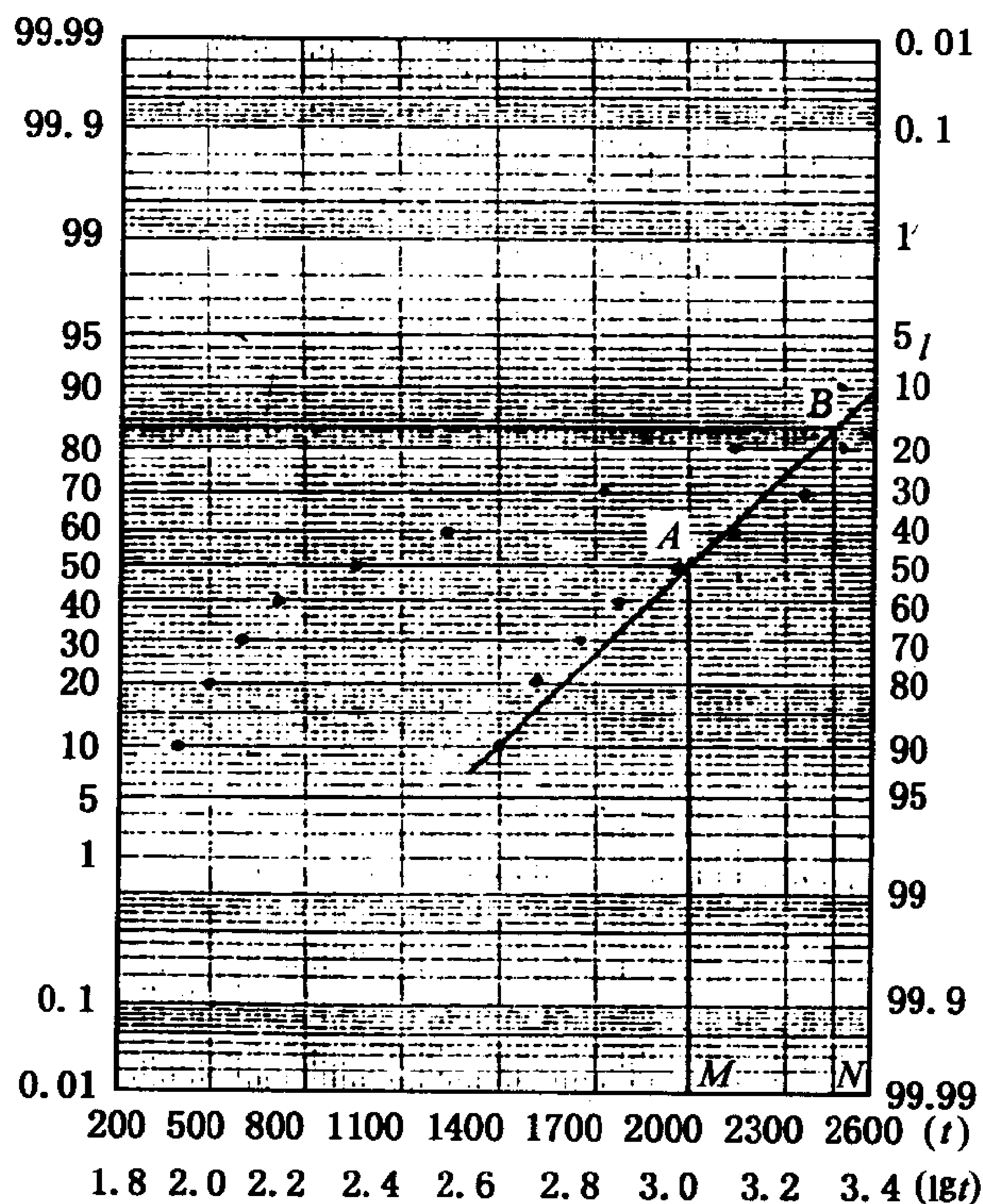


图 4.1.11 正态概率纸

将$\left(t_{(i)},\frac{i}{n+1}\right)$，$i=1,2,\cdots,9$ 点在正态概率纸上(用"×"表示)，这九个点明显不在一直线上(见图 4.1.11)，因而认为断裂时间这一总体不是正态分布。

如果对 t_i 取常用对数(其值已列在表 4.1.3 中),横坐标再重新设定,将 $\left(\lg t_{(i)}, \frac{i}{n+1}\right)$, $i=1,2,\cdots,9$ 再点在正态概率纸上(用"·"表示),这九个点近似在一直线上(见图 4.1.11)。因而我们可以认为断裂时间的对数服从正态分布。

表 4.1.3 某高温合金钢的断裂时间

i	$t_{(i)}$	$\frac{i}{n+1}$	$\lg t_{(i)}$
1	398.00	0.10	2.5999
2	480.00	0.20	2.6812
3	589.58	0.30	2.7705
4	712.16	0.40	2.8526
5	955.50	0.50	2.9802
6	1 233.16	0.60	3.0910
7	1 734.00	0.70	3.2390
8	2 122.16	0.80	3.3268
9	2 487.50	0.90	3.3958

4.1.4.3 利用正态概率纸估计正态总体的参数 μ 和 σ

正态概率纸除了可以对总体分布是否为正态作直观判断外,还可以对正态总体的参数 μ 与 σ 的值作出"估计"。当 n 个点近似在一直线附近时,我们可以用目测方法画出该直线 l(见图 4.1.11)。由于在总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$时,有

$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\begin{cases}0.5, & x=\mu\\ 0.8413, & x=\mu+\sigma\end{cases}$$

故从 F 尺上刻度为 0.5 与 0.8413 处分别画两条水平线,交直线 l 于 A、B 两点,再从 A、B 两点分别画垂线交横轴于 M、N 两点,则 M 的横坐标值可以看成是 μ 的一个估计值,N 的横坐标值可以看成是 $\mu+\sigma$ 的一个估计值,从而将 N 与 M 的横坐标之差作为 σ 的估计值,这一过程如图 4.1.12 所示。

在例 4.1.10 中,从图 4.1.11 可以认为 $\lg t$ 服从正态分布,且 μ 的估计值(记为 $\hat{\mu}$)为 3.00,σ 的估计值(记为 $\hat{\sigma}$)为 0.30。这样一来,我们对这种高温合金钢的断裂时间有了一个初步的看法:此种高温合金钢在 580℃和 15.5kg/mm^2 应力下的断裂时间近似服从对数正态分布 $LN(3.00,0.30^2)$。

这里从图上获得的关于 μ 与 σ 的信息当然是比较粗糙的,且会因人而异,但由于此方法简单,能快速给人一个初步印象,因而人们乐于使用。关于 μ 与 σ 的估计属于参数估计问题,将在下一章详细讨论。

当样本量较大时,可用分组方法先给出分组的频数分布表,并求出各组的

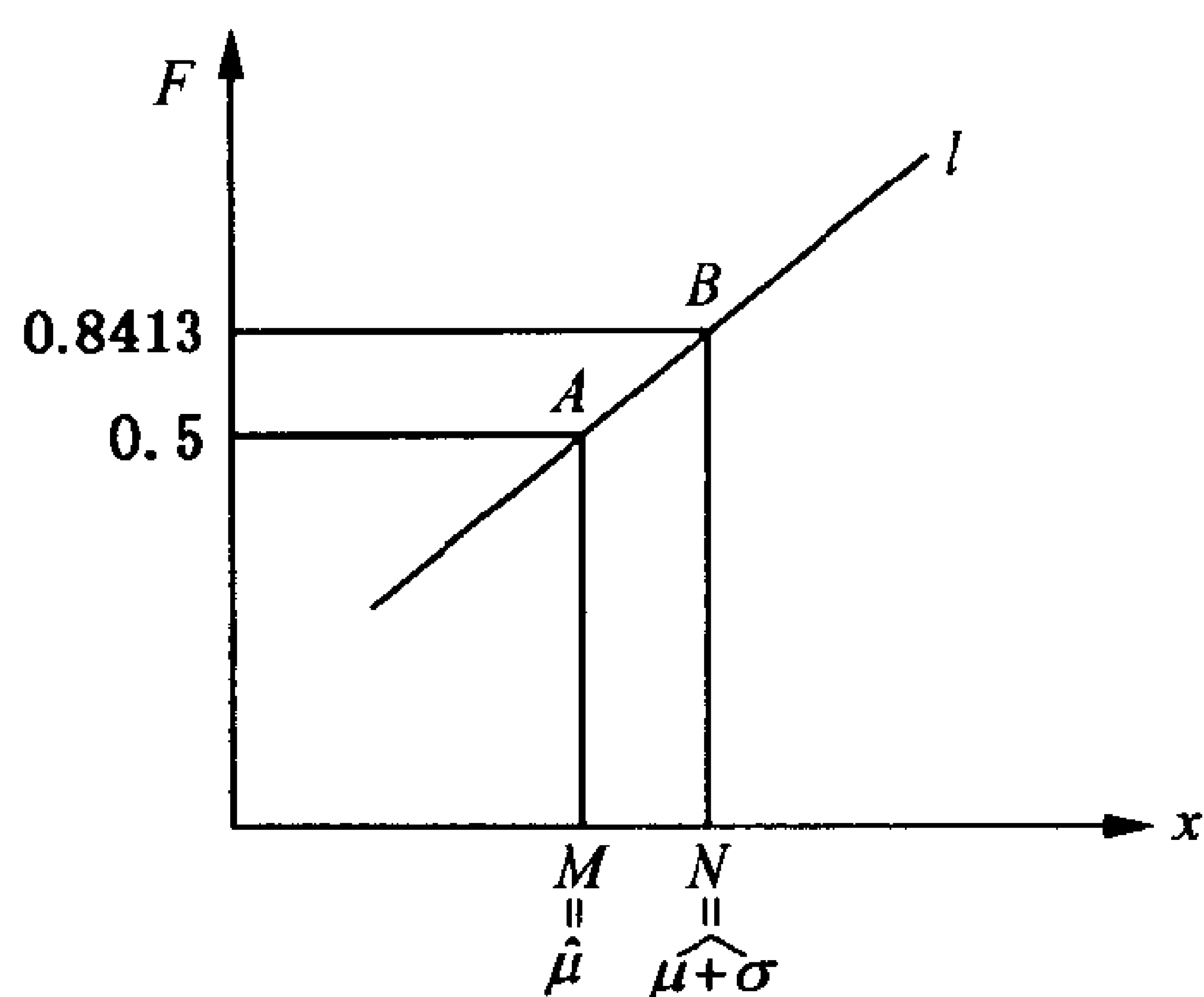


图 4.1.12 估计 μ 与 σ 的示意图

累计频数。设样本容量为 n,分为 k 个组,第 i 组区间为 $(a_{i-1},a_i]$,记这组的频数为 n_i,那么到该组为止,前 i 组的累计频数 $N_i=n_1+n_2+\cdots+n_i$,将 $\left(a_i,\dfrac{N_i}{n+1}\right)$,$i=1,2,\cdots,k$ 点在正态概率纸上以判断该样本是否来自正态分布。当认为是正态分布时,可如上那样对分布的参数 μ 与 σ 作出估计。

例 4.1.11 为了解某种货物的价格一年内在各地的变化,随机选取了 60 个地点,调查各地年初值 100 元的该种货物到年底时的所值,分组统计如下表 4.1.4,试用正态概率纸判断其是否为正态分布。

表 4.1.4 年底价值

分组(单位:元)	频数 n_i	N_i	$\dfrac{N_i}{n+1}$(%)
(80,85]	1	1	1.6
(85,90]	4	5	8.2
(90,95]	3	8	13.1
(95,100]	6	14	23.0
(100,105]	7	21	34.4
(105,110]	10	31	50.8
(110,115]	14	45	73.8
(115,120]	7	52	85.2
(120,125]	4	56	91.8
(125,130]	2	58	95.1
(130,135]	1	59	96.7
(135,140]	1	60	98.4
合计	$n=60$		

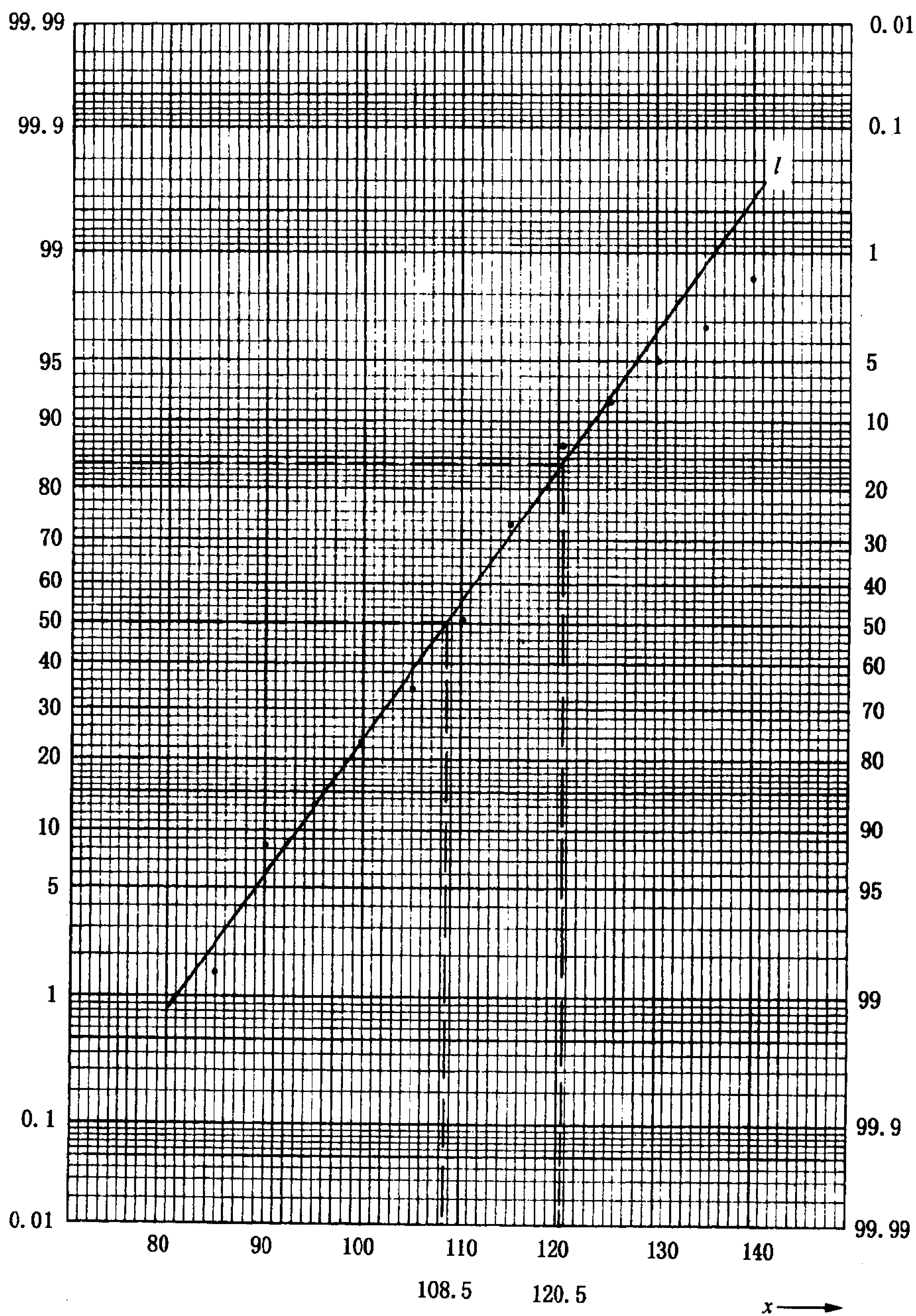

99.99
99.9
99
95
90
80
70
60
50
40
30
20
10
5
1
0.1
0.01
0.01
0.1
1
5
10
20
30
40
50
60
70
80
90
95
99
99.9
99.99
l
80
90
100
110
120
130
140
108.5
120.5
x

图 4.1.13 正态概率纸

为在正态概率纸上描点，将各组的累计频数 N_i 及 $\frac{N_i}{n+1}$ 均列在表 4.1.4 中。现将(85,1.6%)，(90,8.2%)，…，(140,98.4%)点在正态概率纸上(见图 4.1.13)。由图上可见，这些点基本在一直线附近。用目测方法在图上画出直线 l，可得 μ 的估计值为 108.5，$\mu+\sigma$ 的估计值为 120.5，从而 σ 的估计为 12。因此可认为该种货物年底价值服从正态分布 $N(108.5,12^2)$。

§4.2 统计量与抽样分布

4.2.1 统计量及其分布

样本来自总体，样本的观察值就含有总体各方面的信息，但这些信息较为分散，为使这些分散在样本中有关总体的信息集中起来反映总体的各种特征，需要对样本进行加工，一种有效的方法是构造样本的函数，不同的样本函数反映总体的不同特征。这种样本的函数便是统计量。

定义 4.2.1 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$ 是取自某总体的一个容量为 n 的样本，假如样本函数

$$T=T(\boldsymbol{X})=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

中不含任何未知参数，则称 T 为**统计量**。统计量的分布称为**抽样分布**。

上述定义中规定“不含任何未知参数”是强调在获得了样本的观察值 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 后，代入统计量立即可以算得统计量的观察值

$$t=T(\boldsymbol{x})=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

例 4.2.1 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 与 σ^2 为未知参数，从该总体获得的一个样本为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

便是一个统计量，但是

$$\overline{X}-\mu,\quad \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$$

都不是统计量，因为它们含有未知参数。

由正态分布的性质可知 $\overline{X}$ 的分布为 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，这就是统计量 $\overline{X}$ 的抽样分布。

今后我们将看到统计推断的好坏与所选择的统计量的分布有密切的关系，因此寻求抽样分布是统计学的一项重要内容。本节将讨论一些常用统计量及其分布，下一节还将讨论一类与次序统计量有关的常用统计量，并介绍用随机模拟方法寻求近似抽样分布的方法。

4.2.2 样本均值及其分布

定义 4.2.2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自某总体的一个样本，它的算术平均数

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{4.2.1}$$

称为**样本均值**。当获得了样本观察值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$后代入上式，可求得样本均值的观察值，亦简称样本均值：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

大家知道，样本中的数据有大有小，而样本均值 $\bar{x}$ 总处于样本的中间位置，小于 $\bar{x}$ 的数据的偏差 $x_i-\bar{x}$ 是负的，大于 $\bar{x}$ 的数据的偏差 $x_i-\bar{x}$ 是正的，此种偏差之和恒为零，这是因为

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}=0 \tag{4.2.2}$$

而总体分布的数学期望 $E(X)$ 也是位于取值范围的中心位置，且 $E[X-E(X)]=0$，因此只要样本是简单随机样本，那么样本均值是反映总体分布数学期望所在位置信息的一个统计量，如果总体数学期望是 μ，那么样本均值 $\overline{X}$ 将是 μ 的一个很好的估计量。

例 4.2.2 某厂实行计件工资制，为及时了解情况，随机抽取 30 名工人，调查各自在一周内加工的零件数，然后按规定算出每名工人的周工资如下：(单位：元)

156	134	160	141	159	141	161	157	171	155
149	144	169	138	168	147	153	156	125	156
135	156	151	155	146	155	157	198	161	151

这便是一个容量为 30 的样本观察值，其样本均值为：

$$\bar{x}=\frac{1}{30}(156+134+\cdots+161+151)=153.5$$

它反映了该厂工人周工资的一般水平。

例 4.2.3(分组样本均值的近似计算) 如果在例 4.2.2 中收集得到的样

本观察值用分组样本形式给出(见表 4.2.1),此时样本均值可用下面方法近似计算:以 x_i 表示第 i 个组的组中值(即区间的中点),n_i 为第 i 组的频数,$i=1,2,\cdots,k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$,则

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \tag{4.2.3}$$

表 4.2.1　某厂 30 名工人周平均工资额

周工资额区间	工人数 n_i	组中值 x_i	$n_i x_i$
(120,130]	1	125	125
(130,140]	3	135	405
(140,150]	6	145	870
(150,160]	14	155	2 170
(160,170]	4	165	660
(170,180]	1	175	175
(180,190]	0	185	0
(190,200]	1	195	195
合计	30		4 600

则本例中

$$\bar{x} \approx \frac{4600}{30} = 153.33$$

这与例 4.2.2 的完全样本结果差不多。

在样本容量较大时,给出分组样本是常用的一种方法,虽然会损失一些信息,但对总体数学期望给出的信息还是十分接近的。

(4.2.3)式的另一种表示方法为

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x_i$$

称为加权平均,x_i 的权为 $\frac{n_i}{n}$,$i=1,2,\cdots,k$。

例 4.2.4　一颗钻石的重量 μ 是未知的,度量它的单位常用克拉(Carat),1 克拉等于 200 毫克,即 0.2 克。由于钻石极为稀少,硬度极高,又可作装饰品,故其价格昂贵。在精密天平上秤其重量,每次都会不同。若重复 5 次秤其重量就得到 5 个秤量值:

$$2.15,\quad 2.14,\quad 2.17,\quad 2.14,\quad 2.15$$

这是一个容量为 5 的样本,人们常用样本均值

$$\bar{x} = (2.15 + 2.14 + 2.17 + 2.14 + 2.15)/5 = 2.15$$

作为该颗钻石真实重量 μ 的估计值。若人们问：这颗钻石的重量确为 2.15 克拉吗？为此我们还需作进一步研究。

首先要回答的是，这个样本来自哪一个总体，若把钻石在精密天平上秤出的重量记为 X，它与 μ 的差 $X-\mu=\varepsilon$ 就是秤量误差，它是由精度天平与测量员引起的，它可大可小，可正可负，呈随机状，所以误差 ε 是随机变量，许多实际经验表明，秤量误差 ε 服从期望为 0、方差为 σ^2 的正态分布，即 $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$，从而秤量值 $X=\mu+\varepsilon\sim N(\mu,\sigma^2)$，上述容量为 5 的样本就是来自这个正态分布的一个样本。

我们现在是用样本均值 $\overline{X}$ 对 μ 作估计的，如今要评价这一估计的好坏当然要用 $\overline{X}$ 的分布。由正态分布性质知样本均值 $\overline{X}$ 的分布为：

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{4.2.4}$$

由此可见，$\overline{X}$ 与 μ 的绝对偏差 $|\overline{X}-\mu|$ 不超过 1.96 倍标准差的概率为 0.95，即

$$P(|\overline{X}-\mu|\leqslant 1.96\sigma/\sqrt{n})=0.95$$

或者讲

$$P(\overline{X}-1.96\sigma/\sqrt{n}\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+1.96\sigma/\sqrt{n})=0.95$$

如今 $n=5$，$\bar{x}=2.15$，若秤量的标准差 $\sigma=0.01$（克拉），那么代入后可得：

$$P(2.1412\leqslant\mu\leqslant 2.1588)=0.95$$

从而可以有 95％的把握说这颗钻石的真实重量介于 2.1412 克拉与 2.1588 克拉之间。这便是我们所给出的统计结论。

上面这一例子告诉我们，获得统计量的分布对评价统计量的好坏是至关重要的。

在样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 场合，其样本均值 $\overline{X}$ 的分布为 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。现在我们来讨论当样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自非正态总体时，其样本均值 $\overline{X}$ 的分布。

定理 4.2.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从某总体随机抽取的一个样本，该总体的分布未知（可能是离散的，也可能是连续的，可能是均匀分布，也可能是偏态分布等），但知其均值为 μ，方差为 σ^2（有限且不为 0），则当样本量 n 充分大时，样本均值 $\overline{X}$ 近似服从正态分布，其均值仍为 μ，方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$，记为

$$\overline{X}\ \dot{\sim}\ N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{4.2.5}$$

证：由中心极限定理（定理 3.5.1）知：

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\dot{\sim}N(0,1)$$

由此可知

$$X_1+X_2+\cdots+X_n\dot{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)$$

$$\overline{X}\dot{\sim}N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

这一定理表明，无论总体分布是什么，只要样本容量 n 充分大（譬如大于30），则样本均值 $\overline{X}$ 总可近似看作正态分布，图 4.2.1 示意了这一近似过程。

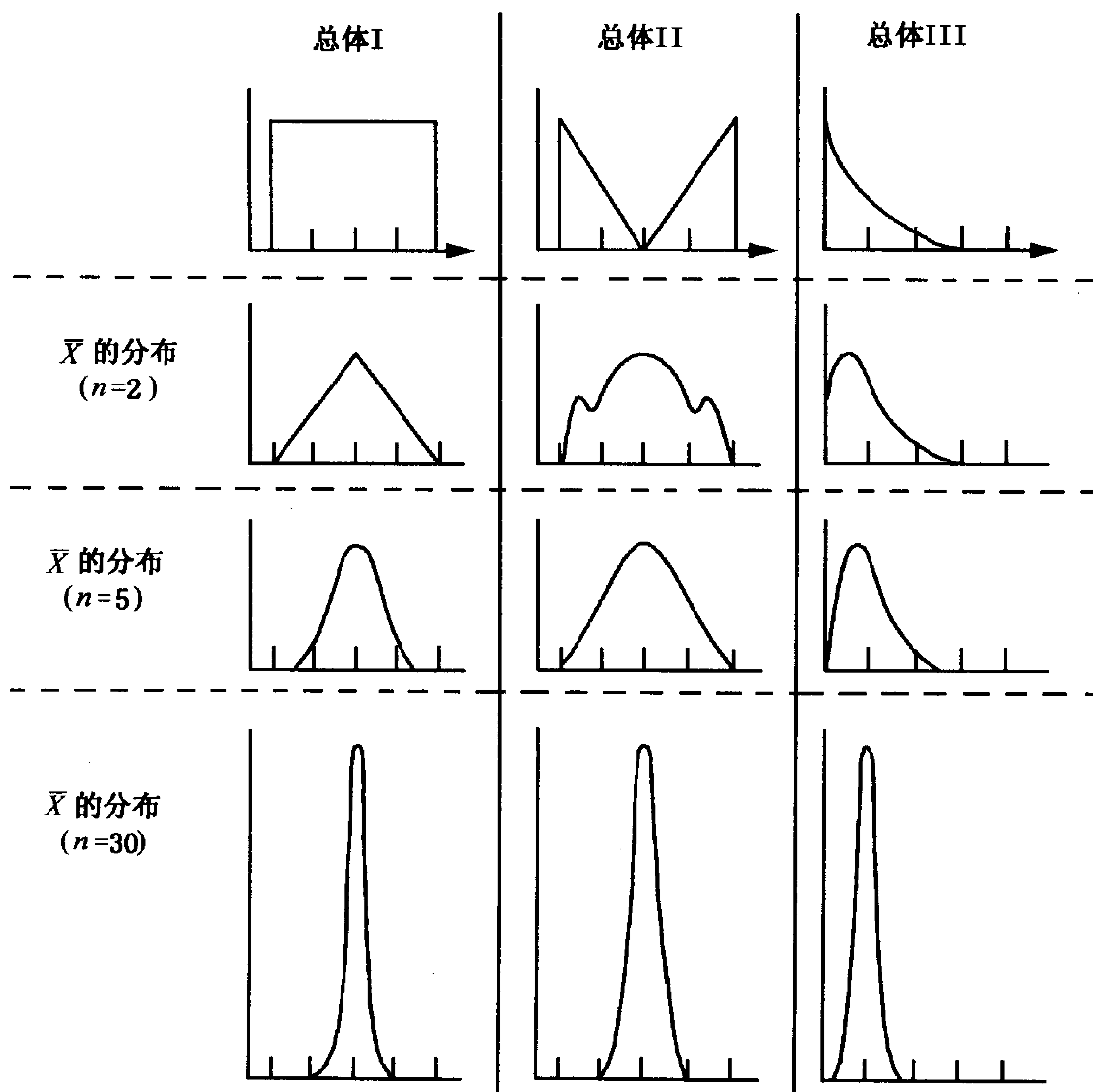


图 4.2.1　样本均值的分布

譬如，样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$，$\lambda>0$，则总体期望为 $\frac{1}{\lambda}$，方差为 $\frac{1}{\lambda^2}$，那么当 n 充分大时，样本均值 $\overline{X}\sim N(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{n\lambda^2})$。

又譬如，样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自 $b(1,p)$，$0<p<1$，则总体期望为 p，方差为 $p(1-p)$，那么当 n 充分大时，样本均值 $\overline{X}\sim N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right)$。

4.2.3 样本方差与样本标准差

定义 4.2.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自某一总体的样本，它关于样本均值 $\overline{X}$ 的平均偏差平方和

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{4.2.6}$$

称为**样本方差**，其算术根 $S_n=\sqrt{S_n^2}$ 称为**样本标准差**。

在 n 不大时，常用

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{4.2.7}$$

作为样本方差（也称无偏方差，其含义在下一章叙述），其算术根 $S=\sqrt{S^2}$ 称为样本标准差。

当把观察值代入后可得样本方差与样本标准差的观察值：

$$s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,\quad s_n=\sqrt{s_n^2}$$

或

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,\quad s=\sqrt{s^2}$$

在实际应用中也简称它们为样本方差和样本标准差。

在本书后面几章中我们主要用的是 S^2 与 S，但在涉及到具体数值计算时一般用小写的 s^2 与 s。

当总体方差较大时，样本的观察值就较为分散，从而使偏差平方和 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 较大，那么 s^2 与 s 也较大，反之也如此。因此，样本方差与样本标准差反映了数据取值分散与集中的程度，即反映了总体方差与标准差的信息。下面一个例子给出了直观的说明。

例 4.2.5 设我们获得了如下三个样本：

样本 A：3，4，5，6，7

样本 B：1，3，5，7，9

样本 C：1，5，9

如果将它们画在数轴上（图 4.2.2），明显可见它们的"分散"程度是不同的：样本 A 在这三个样本中比较密集，而样本 C 比较分散。

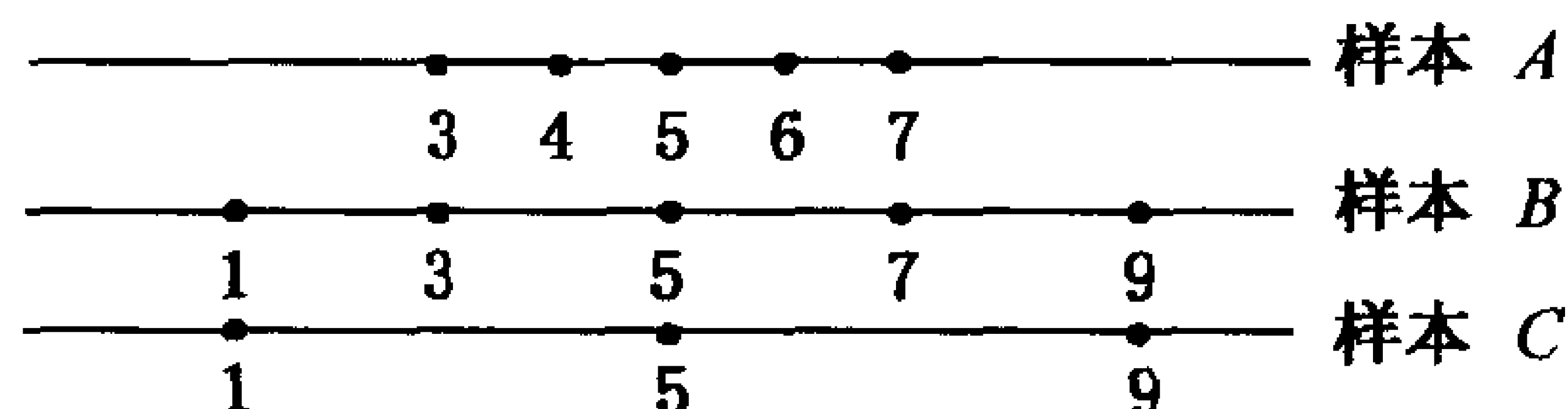


图 4.2.2 三个样本的观察值

这一直觉可以用样本方差来表示。这三个样本的均值都是 5，即 $\bar{x}_A=\bar{x}_B=\bar{x}_C=5$，而样本容量 $n_A=5, n_B=5, n_C=3$，从而它们的样本方差分别为：

$$s_A^2=\frac{1}{5-1}[(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2]=\frac{10}{4}=2.5$$

$$s_B^2=\frac{1}{5-1}[(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2]=\frac{40}{4}=10$$

$$s_C^2=\frac{1}{3-1}[(1-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2]=\frac{32}{2}=16$$

由此可见 $s_C^2>s_B^2>s_A^2$，这与直觉是一致的，它们反映了取值的分散程度。由于样本方差的量纲与样品的量纲不一致，故常用样本标准差表示分散程度，这里有 $s_A=1.58, s_B=3.16, s_C=4$，同样有 $s_C>s_B>s_A$。

由于样本方差（或样本标准差）很好地反映了总体方差（或标准差）的信息，因此若当总体方差 σ^2 未知时，常用 S^2 去估计，而总体标准差 σ 常用样本标准差 S 去估计。

不管是计算 s_n^2 还是计算 s^2，首先应该计算偏差平方和 $Q=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，下面是计算 Q 的一个常用的公式：

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\bar{x}+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2 \tag{4.2.8}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2 \tag{4.2.9}$$

例 4.2.6 计算例 4.2.2 中的样本方差与样本标准差。

解:在例 4.2.2 中已求得 $\bar{x}=153.5$,先用(4.2.8)求 Q,由于

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=156^2+134^2+\cdots+151^2=712155$$

代入(4.2.8)有

$$Q=712155-30\times153.5^2=5287.5$$

所以样本方差为

$$s^2=\frac{1}{30-1}\times5287.5=182.3278$$

样本标准差为

$$s=\sqrt{182.3278}=13.50$$

对给出分组样本的场合,也可求样本方差与样本标准差的近似值,此时偏差平方和 Q 有如下近似式

$$Q\approx\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2 \tag{4.2.10}$$

$$\approx\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2-n\bar{x}^2 \tag{4.2.11}$$

这里符号同前,而 $\bar{x}$ 是用(4.2.3)近似得出的。

例 4.2.7 计算例 4.2.3 中给出的分组样本的方差与标准差。

解:在例 4.2.3 中已求得 $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i=4600$,$n=30$,由于

$$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2=1\times125^2+3\times135^2+\cdots+1\times195^2=710350$$

代入(4.2.10)后有

$$Q\approx710350-\frac{4600^2}{30}=5016.6667$$

从而样本方差为

$$s^2\approx\frac{5016.6667}{30-1}=172.9985$$

样本标准差为

$$s\approx\sqrt{172.9985}=13.15$$

结果与例 4.2.6 相差不大。

例 4.2.8 从某一总体获得了 k 个样本,第 i 个样本的样本容量为 n_i,样本均值为 $\bar{x}_i$,样本方差为 s_i^2,记 $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$,将这 k 个样本合并成一个容量为 n

的样本，求此样本的均值与方差。

解：记第 i 个样本的观察值为 $x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in_i}$，则已知的是

$$\bar{x}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij},\quad s_i^2=\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$$

则

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{x}_i$$

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i+\bar{x}_i-\bar{x})^2\\&=\frac{1}{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_i-\bar{x})^2\Big]\\&=\frac{1}{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)s_i^2+\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2\Big]\end{aligned}$$

这里用到了 $\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)=0$ 这一性质。

下面我们将研究样本方差的抽样分布。由于一般情况下样本方差的抽样分布不易精确得出，而当总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 时样本方差的抽样分布可以精确求出。

定理 4.2.2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{nS_n^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且与 $\overline{X}$ 独立。

证：考虑对样本 $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$ 作线性变换，令

$$\begin{cases}Z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}X_1-\frac{1}{\sqrt{2}}X_2\\ Z_2=\frac{1}{\sqrt{2\times3}}(X_1+X_2)-\frac{2}{\sqrt{2\times3}}X_3\\ Z_3=\frac{1}{\sqrt{3\times4}}(X_1+X_2+X_3)-\frac{3}{\sqrt{3\times4}}X_4\\ \cdots\cdots\\ Z_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}(X_1+X_2+\cdots+X_{n-1})-\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}}X_n\\ Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\sqrt{n}\,\overline{X}\end{cases}$$

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，均服从 $N(\mu,\sigma^2)$，则可以证明

$Z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}X_1-\frac{1}{\sqrt{2}}X_2\sim N(0,\sigma^2)$

$Z_2=\frac{1}{\sqrt{2\times3}}(X_1+X_2)-\frac{2}{\sqrt{2\times3}}X_3\sim N(0,\sigma^2)$

……

$Z_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(X_1+X_2+\cdots+X_{n-1})-\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}X_n\sim N(0,\sigma^2)$

$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\sim N(\sqrt{n}\,\mu,\sigma^2)$

且通过计算可知：

$$\mathrm{Cov}(Z_i,Z_j)=0\quad,\quad i\neq j$$

这说明 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 相互独立。

由于

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{\sigma^2}\Big[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\Big]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}Z_i^2-Z_n^2)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{Z_i}{\sigma}\right)^2$$

且 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{n-1}$相互独立，且均服从 $N(0,\sigma^2)$，从而$\frac{Z_1}{\sigma},\frac{Z_2}{\sigma},\cdots,\frac{Z_{n-1}}{\sigma}$仍相互独立，均服从 $N(0,1)$。由第三章例 3.2.8 知

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$$

又由 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{n-1},Z_n$ 相互独立，及$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{Z_i}{\sigma}\right)^2,\overline{X}=\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$，

故$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 与 $\overline{X}$ 独立。

*4.2.4 样本的高阶矩

定义 4.2.4 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某总体的一个样本，则称

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\quad,\qquad k=1,2,\cdots\tag{4.2.12}$$

为样本的 **k 阶原点矩**，称

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k \qquad k = 1,2,\cdots \tag{4.2.13}$$

为样本的 **k 阶中心距**。

它们分别反映了总体 k 阶原点矩 μ_k 与 k 阶中心矩 υ_k 的信息。特别 $A_1=\overline{X}$，$B_1=0$，$B_2=S_n^2$。

定义 4.2.5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某总体的一个样本，则称

$$SK=B_3/B_2^{3/2} \tag{4.2.14}$$

为**样本偏度**。

SK 反映了总体分布密度曲线的对称性信息。当 $SK>0$ 时，分布的形状是右尾长，称为正偏的；当 $SK<0$ 时，分布的形状是左尾长，称为负偏的。

定义 4.2.6 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某总体的一个样本，则称

$$KU=B_4/B_2^2-3 \tag{4.2.15}$$

为**样本峰度**。

KU 反映了总体分布密度曲线在其峰值附近的陡峭程度的信息。当 $KU>0$ 时，分布密度曲线在其峰附近比正态分布来得陡；当 $KU<0$ 时，比正态分布来得平坦。

例 4.2.9 求例 4.2.2 中样本的偏度与峰度。

解：由于

$$SK=B_3/B_2^{3/2}, \quad KU=B_4/B_2^2-3$$

为此需先求出 B_2,B_3,B_4，而它们可利用下列展开式来求：

$$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2=A_2-\overline{x}^2$$

$$\begin{aligned}B_3 &=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^3-3\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\overline{x}+2\overline{x}^3 \\ &=A_3-3A_2\overline{x}+2\overline{x}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_4 &=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^4-4\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^3\cdot\overline{x}+6.\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}x_1^2\cdot\overline{x}^2-3\overline{x}^4 \\ &=A_4-4A_3\overline{x}+6A_2\overline{x}^2-3\overline{x}^4\end{aligned}$$

为此需先求出 $\overline{x},A_2,A_3,A_4$，在例 4.2.2 与例 4.2.5 中已算得：

$$\overline{x}=153.5, \quad \sum_{i=1}^{n}x_i^2=712155$$

从数据还可算得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 110994549$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 17442142657$$

则　　$A_2=23738.5$，　$A_3=3699818.3$，　$A_4=581404755.3$

由此得　　$B_2=176.25$，　$B_3=1849.80$，　$B_4=172273.88$

从而求得

$$SK=0.79 \quad , \quad KU=2.55$$

该组样本稍呈正偏，右尾较长，在峰处较陡。

偏度与峰度的抽样分布难于精确求出，其近似分布可用随机模拟方法获得，这将在下一节介绍。

§4.3 次序统计量及其分布

次序统计量是另一类常用的统计量，由它还可派生出一些有用的统计量。

4.3.1 次序统计量的概念

定义 4.3.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$X_{(i)}$被称为该样本的**第 i 个次序统计量**，它是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的满足如下条件的函数：每当样本得到一组观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时，将它们从小到大排列为

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$$

第 i 个值 $x_{(i)}$便是 $X_{(i)}$的观测值，称 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$为该样本的次序统计量，$X_{(1)}$又称为该样本的最小次序统计量，$X_{(n)}$又称为该样本的最大次序统计量。

下面的例子可以帮助我们理解次序统计量的含义。

例 4.3.1 设袋中有三种球，球上编号为 0，1，2。它们的外形、重量、个数都相同。若规定从袋中摸到编号为 i 的球得 i 分，那么这一得分总体可以用如下分布表示：

X	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

这里 X 表示一次摸球得到的分数。如今进行返回抽样，连抽三次，获得一个容量为 3 的样本 X_1,X_2,X_3。这里每个 X_i 都与总体 X 具有相同的分布，且相互

独立。这种样本的一切可能取值有 $3^3=27$ 种，将它们列在表 4.3.1 的左侧，而它们的相应的次序统计量的取值列在表 4.3.1 的右侧。

表 4.3.1　样本 (X_1,X_2,X_3) 及次序统计量 $X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}$ 的取值

X_1	X_2	X_3	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	$X_{(3)}$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	0	2	0	0	2
0	2	0	0	0	2
2	0	0	0	0	2
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
0	1	2	0	1	2
0	2	1	0	1	2
1	0	2	0	1	2
2	0	1	0	1	2
1	2	0	0	1	2
2	1	0	0	1	2
0	2	2	0	2	2
2	0	2	0	2	2
2	2	0	0	2	2
1	1	2	1	1	2
1	2	1	1	1	2
2	1	1	1	1	2
1	2	2	1	2	2
2	1	2	1	2	2
2	2	1	1	2	2
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2

由表 4.3.1 可见：次序统计量 $(X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)})$ 与样本 (X_1,X_2,X_3) 完全不相同，具体表现在以下几个方面：

(1) $X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}$ 的分布是不同的。

$X_{(1)}$	0	1	2
P	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

$X_{(2)}$	0	1	2
P	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{7}{27}$

$X_{(3)}$	0	1	2
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$

(2)任意两个次序统计量的联合分布也是不同的。

$X_{(2)}$ \ $X_{(1)}$	0	1	2
0	$\frac{7}{27}$	0	0
1	$\frac{9}{27}$	$\frac{4}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$

$X_{(3)}$ \ $X_{(1)}$	0	1	2
0	$\frac{1}{27}$	0	0
1	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	0
2	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$X_{(3)}$ \ $X_{(2)}$	0	1	2
0	$\frac{1}{27}$	0	0
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{9}{27}$	$\frac{7}{27}$

(3)任意两个次序统计量是不独立的，例如：

$$P(X_{(1)}=0,X_{(2)}=1)=\frac{9}{27}\neq\frac{19}{27}\times\frac{13}{27}=P(X_{(1)}=0)P(X_{(2)}=1)$$

4.3.2 次序统计量的抽样分布

只要总体的分布已知，那么若干个次序统计量的联合分布都是可以求出的。下面仅就总体 X 的分布为连续的情况进行讨论。现设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度函数为 $p(x)$，从中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。

(1)第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$的概率密度函数为：

$$p_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}p(x) \qquad (4.3.1)$$

证：考虑第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$落在无穷小区间$(x,x+\Delta x]$内这一事件，它等介于“容量为 n 的样本中有 $k-1$ 个分量小于或等于 x，1 个分量落在$(x,x+\Delta x]$内，余下的 $n-k$ 个分量均大于 $x+\Delta x$”，其示意图见图 4.3.1。

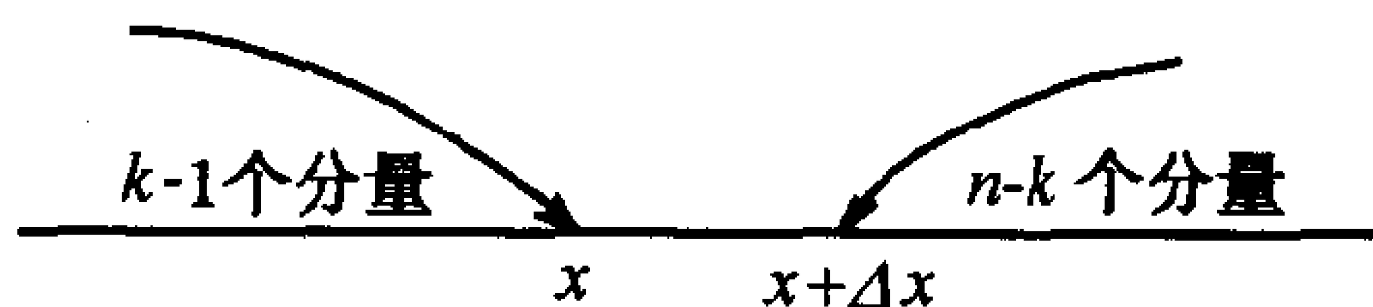


图 4.3.1 样本分量的分布

每一样本的分量小于或等于 x 的概率为 $F(x)$，大于 $x+\Delta x$ 的概率为 $1-F(x+\Delta x)$，落在$(x+\Delta x]$内的概率为 $F(x+\Delta x)-F(x)$，而将 n 个分量分成这样的三组，总的分法有$\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}$种，若以 $F_k(x)$记 $X_{(k)}$的分布函数，那么 $X_{(k)}$落在$(x,x+\Delta x]$内的概率为

$$F_k(x+\Delta x)-F_k(x)$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}[F(x)]^{k-1}[F(x+\Delta x)-F(x)][1-F(x+\Delta x)]^{n-k}$$

两边除以 Δx,并令 $\Delta x \to 0$,则有

$$p_k(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{F_k(x+\Delta x)-F_k(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}[F(x)]^{k-1}p(x)[1-F(x)]^{n-k}$$

第 k 个次序统计量的两个特例是样本最大次序统计量 $X_{(n)}$ 与最小次序统计量 $X_{(1)}$,由(4.3.1)可给出它们的概率密度函数。

样本最大次序统计量 $X_{(n)}$ 的概率密度函数,只要在(4.3.1)式中取 $k=n$ 即得:

$$p_n(x)=np(x)[F(x)]^{n-1} \tag{4.3.2}$$

其分布函数为

$$F_n(x)=[F(x)]^n \tag{4.3.3}$$

样本最小次序统计量 $X_{(1)}$ 的概率密度函数,只要在(4.3.1)式中取 $k=1$ 即得:

$$p_1(x)=np(x)[1-F(x)]^{n-1} \tag{4.3.4}$$

其分布函数为

$$F_1(x)=1-[1-F(x)]^n \tag{4.3.5}$$

这些结果与§3.2.3的结果完全一样。

例 4.3.2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自如下指数分布的样本:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}, \qquad x>0$$

求 $P(X_{(1)}>a)$ 与 $P(X_{(n)}<b)$,其中 a,b 为给定的正数。

解:为求概率 $p(X_{(1)}>a)$ 与 $P(X_{(n)}<b)$,则先求 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的分布。由(4.3.5)知,$X_{(1)}$ 的分布函数为

$$F_1(x)=1-[1-F(x)]^n=1-e^{-n\lambda x}, \qquad x>0$$

从而

$$P(X_{(1)}>a)=1-F_1(a)=e^{-n\lambda a}$$

由(4.3.3)知,X_n 的分布函数为

$$F_n(x)=[F(x)]^n=[1-e^{-\lambda x}]^n, \qquad x>0$$

故

$$P(X_{(n)}<b)=F_n(b)=(1-e^{-\lambda b})^n$$

例 4.3.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是取自[0,1]上均匀分布的样本,求第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$ 的期望。

解:先求 $X_{(k)}$ 的概率密度函数。由于总体 $X\sim U(0,1)$,因此总体的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & , \quad 其余\end{cases}$$

其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ x & , \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & , \quad x>1\end{cases}$$

由(4.3.1)可知 $X_{(k)}$ 的密度函数为：

$$p_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \qquad 0<x<1$$

从而

$$\begin{aligned}E(X_{(k)}) &= \int_0^1 xp_k(x)dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}\\ &= \frac{k}{n+1}\end{aligned}$$

下面讨论两个次序统计量的联合密度函数，这里仅给出一个特例。

(2) $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的联合密度函数。

$$p(y_1,y_n)=n(n-1)p(y_1)[F(y_n)-F(y_1)]^{n-2}p(y_n)$$
$$a\leqslant y_1\leqslant y_n\leqslant b \qquad (4.3.6)$$

其中 a 可为 $-\infty$，b 可为 $+\infty$。

证：我们知道 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的联合密度函数可定义为

$$p(y_1,y_n)=\lim_{\Delta y_1\to 0,\Delta y_n\to 0}\frac{P(y_1<X_{(1)}\leqslant y_1+\Delta y_1,y_n<X_{(n)}\leqslant y_n+\Delta y_n)}{\Delta y_1\cdot\Delta y_n}$$
$$a\leqslant y_1\leqslant y_n\leqslant b$$

而事件"$y_1<X_{(1)}\leqslant y_1+\Delta y_1,y_n<X_{(n)}\leqslant y_n+\Delta y_n$"等价于下列 n 个互不相容事件的交"X_i 落在区间 $(y_1,y_1+\Delta y_1]$ 中，X_j 落在 $(y_n,y_n+\Delta y_n]$ 中，其余 $n-2$ 个落在 $(y_1+\Delta y_1,y_n]$ 内"，$i\neq j$，后一事件的概率为：

$$[F(y_1+\Delta y_1)-F(y_1)]\cdot[F(y_n)-F(y_1+\Delta y_1)]^{n-2}[F(y_n+\Delta y_n)-F(y_n)]$$

由 $F(x)$ 的可微性，可知当 $\Delta y_1\to 0$ 时，$\frac{F(y_1+\Delta y_1)-F(y_1)}{\Delta y_1}\to p(y_1)$，当 $\Delta y_n\to 0$ 时，$\frac{F(y_n+\Delta y_n)-F(y_n)}{\Delta y_n}\to p(y_n)$，将其代入 $p(y_1,y_n)$ 的表达式中便得

$$p(y_1, y_n) = n(n-1)p(y_1)[F(y_n) - F(y_1)]^{n-2}p(y_n)$$

由 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的联合密度函数，可求出称为“极差”的一种统计量的分布，这将在下一小段讨论。

下面我们转入讨论与次序统计量有关的常用统计量。

4.3.3 样本极差

定义 4.3.2 样本最大次序统计量与样本最小次序统计量之差称为**样本极差**，简称**极差**，常用 R 表示。

如果样本容量为 n，则样本极差

$$R = X_{(n)} - X_{(1)} \tag{4.3.7}$$

在有些书上也称极差为全距，它表示样本取值范围的大小，也反映了总体取值分散与集中的程度。一般说来，若总体的标准差 σ 较大，从中取出的样本的极差也会大一些；若总体的标准差 σ 较小，那么从中取出的样本的极差也会小一些。反过来也如此，若样本极差较大，表明总体取值较分散，那么相应总体的标准差也较大；若样本极差较小，则总体取值相对集中一些，从而该总体的标准差较小，图 4.3.2 显示了这一现象。

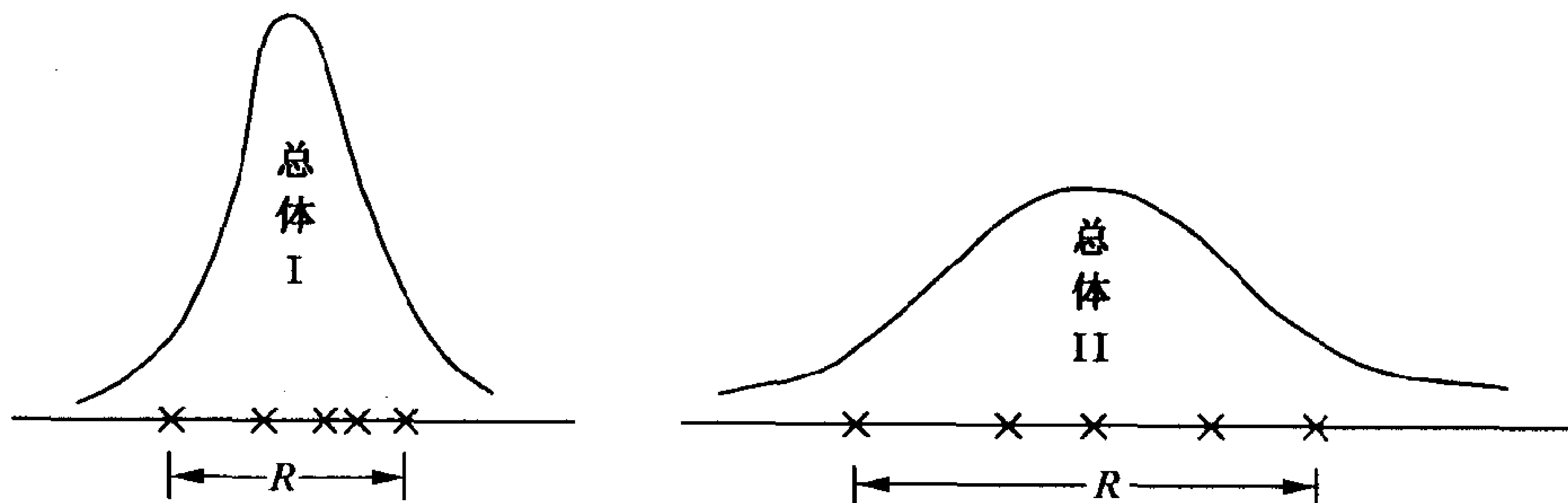


图 4.3.2 样本（用×表示）极差反映总体分散程度

极差常在小样本（$n \leqslant 30$）的场合使用，而在大样本场合很少在实际中使用。这是因为极差仅使用了样本中两个极端点的信息，而把中间的信息都丢弃了，当样本容量越大时，丢弃的信息也就越多，从而留下的信息过少，其使用价值就不大了。

当总体分布为 $N(\mu, \sigma^2)$ 时，由(4.3.6)可求出容量为 n 时的样本极差 $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ 的密度函数为：

$$g(x) = \frac{n(n-1)}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi\left(\frac{y+x-\mu}{\sigma}\right) - \sum\Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{n-2} e^{-\frac{(y+x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$x > 0 \quad (4.3.8)$$

其中$\Phi(\cdot)$为标准正态分布的分布函数。此时R_n的数学期望为

$$ER_n = d_n\sigma \quad (4.3.9)$$

其中

$$d_n = \frac{n(n-1)}{2\pi}\int_0^{\infty} u\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi(u+v)-\Phi(v)]^{n-2}e^{-\frac{(u+v)^2+v^2}{2}}dvdu$$

是一个仅与n有关的常数，通过数值积分可求得在不同n下的值（见表 4.3.2）。

表 4.3.2　参数 d_n 的数值表

n	d_n	n	d_n
2	1.128	14	3.407
3	1.693	15	3.472
4	2.059	16	3.532
5	2.326	17	3.588
6	2.534	18	3.640
7	2.704	19	3.689
8	2.847	20	3.735
9	2.970	21	3.778
10	3.078	22	3.879
11	3.173	23	3.858
12	3.258	24	3.895
13	3.336	25	3.931

由于极差含有总体标准差的信息，在正态总体场合，又有(4.3.9)式，因此统计学家建议在小样本时，用下式去估计正态总体的σ,记为

$$\hat{\sigma}_R = R/d_n \quad (4.3.10)$$

此估计在$n \leqslant 10$时效果较好。

例 4.3.4　甲、乙、丙三厂生产同一零件，订货方为了了解各厂生产的零件强度的差异，以便从中选择订货的工厂。现从市场上各购买 4 个零件，测其强度，测得的数据如表 4.3.3 所示。强度服从正态分布已为过去的试验数据所证实。

表 4.3.3　三个厂的零件强度数据及基本统计量

工厂	零件强度				平均强度 $\bar{x}$	极差 R	标准差 $\hat{\sigma}_R$
甲	115	116	98	83	103	33	16.0
乙	103	107	118	116	111	15	7.3
丙	73	89	85	97	86	24	11.7

根据表 4.3.3 的数据，可求得甲厂的平均强度与极差分别为：

$$\bar{x}=\frac{1}{4}(115+116+98+83)=103$$

$$R=116-83=33$$

利用公式(4.3.10)可求得 σ 的估计值，由表 4.3.2 查得 $n=4$ 时 $d_n=2.059$，故

$$\hat{\sigma}_R=33/2.059=16.0$$

对乙厂和丙厂的强度数据亦可类似计算，所有计算结果都列在表 4.3.3 右侧三列。

从计算结果看，乙厂的平均强度最高($\bar{x}=111$)，而标准差最小($\hat{\sigma}_R=7.3$)。另两个厂的零件强度都不理想，甲厂的零件强度的标准差过大，表明该厂生产不稳定，这从它的 4 个强度数据很分散即可看出，丙厂的零件强度的平均值过小。相比之下：甲厂与丙厂的零件质量差，不宜订货。

从表 4.3.3 右侧所列的三个基本统计量(平均强度 $\bar{x}$，极差 R，标准差 $\hat{\sigma}_R$)可以清楚地看出三个厂生产的零件的优劣，这便是统计量的作用。

从上面的例子可见，用(4.3.10)式从极差去估算标准差很方便，但极差也有缺点，这便是它极易受个别异常值(又称离群值)的干扰。

例 4.3.5 砖的抗压强度(单位：MPa)服从正态分布已被证实，对一批将交付客户的砖，从中随机抽取 10 个样品，测得砖的抗压强度为(已排序)：

4.7　5.4　6.0　6.5　7.3　7.7　8.2　9.0　10.1　17.2

可求得这个样本的极差

$$R=17.2-4.7=12.5$$

从而标准差的估计为

$$\hat{\sigma}_R=12.5/3.078=4.06$$

后经检查发现，样本中的异常值 17.2 属抄录之误，原始记录为 11.2，把 17.2 改正为 11.2 后，新数据对应的极差与标准差的估计分别为：

$$R=11.2-4.7=6.5$$

$$\hat{\sigma}_R=6.5/3.078=2.11$$

这时极差与标准差都缩小了将近一半，可见个别异常值对极差的影响是很大的。这便是样本极差这一统计量的缺点——易受异常值的干扰，因此在使用中要加以注意。

4.3.4 样本中位数与 p 分位数

定义 4.3.3 样本按大小次序排列后处于中间位置上的统计量称为**样本**

中位数,常用 m_d 表示。

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自某总体的一个样本,其次序统计量记为 $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$,则

$$m_d=\begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2}\left[X_{\left(\frac{n}{2}\right)}+X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right], & n \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{4.3.11}$$

例 4.3.6 设容量为 5 的样本观察值为 3,5,7,9,11,则样本中位数 $m_d=7$。如果增加一个样本观察值 15,那么样本中位数 $m_d=\frac{1}{2}(7+9)=8$。

样本中位数的一个优点是受异常值的影响较小。譬如在例 4.3.5 中,无论最大值是 17.2 还是 11.2,其中位数都是 $m_d=\frac{1}{\alpha}(7.3+7.7)=7.5$。

样本中位数 m_d 表示在样本中有一半数据小于 m_d,另一半数据大于 m_d。譬如,某班级有 50 位同学,如果告诉我们该班学生身高的中位数是 1.69 米,那么可知该班级中一半学生的身高高于 1.69 米,另一半学生的身高低于 1.69 米。样本中位数反映了总体中位数的信息。

我们知道总体的数学期望 μ 与中位数 $x_{0.5}$ 都反映了总体的位置特征。当分布对称时,譬如正态分布,则 $\mu=x_{0.5}$,但对偏态分布来讲,正偏的有 $\mu>x_{0.5}$,负偏的有 $\mu<x_{0.5}$。有了样本均值与样本中位数后,也可大致了解分布的形态。如果 $\bar{x}\approx m_d$,总体分布可能比较对称;如果 $\bar{x}>m_d$,那么总体分布可能为正偏的;而 $\bar{x}<m_d$ 时,总体分布可能为负偏的。

例 4.3.7 有位顾客要买房子,当地房地产经销商向他介绍房子时还煞费苦心地告知:"这一带居民的平均年收入约为 15000 美元。"可能就是这一点使该顾客下了决心买下房子,住到这里,并记住了这个迷人的数字。一段时间后,周围居民向当局申请公共汽车费不要涨价,理由是:这一带居民的平均年收入只有 3500 美元,提高以后支付不起。他听到这个数字后,大吃一惊:"啊呀!哪个数字是真实的呢?"为此,该顾客作了些调查,惊讶地发现,这两个数字都是合法地计算出来的,两个数字所代表的都是同样的人同样的收入。那么误解是怎么产生的呢?问题就在于有些生意人在不同时机采用不同的平均数。"平均数"这个词的词义很广,它可以是均值,也可以是中位数。当你想要高数字时,就用 15000 美元,这是当地居民收入的算术平均数,而当你要小数字时,就用 3500 美元,这是当地居民收入的中位数。当地有一半居民年收入低于 3500 美元,另一半居民年收入高于 3500 美元,特别是该地有三户是回来度周末的百万富翁,就是这几户使算术平均数大幅度上升。正因为居民年收入的分

布不是对称的，而是正偏的，高收入部分的尾巴较长造成的（此例摘自 R. Huff《怎能利用统计撒谎》，中国统计出版社，1989）。

上面例子告诉我们，在人们告知“平均数”时应该搞清楚它指的究竟是什么。如果总体分布对称时，算术平均数与中位数差不多，而当分布不对称时，必须搞清它指的是算术平均数还是中位数。

定义 4.3.4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自某总体的一个样本，其次序统计量为 $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$，样本的 **$p$ 分位数** m_p 是指由下式求得的统计量：

$$m_p = \begin{cases} X_{(k)}, & \dfrac{k}{n+1} = p \\ X_{(k)} + [X_{(k+1)} - X_{(k)}][(n+1)p - k], & \dfrac{k}{n+1} < p < \dfrac{k+1}{n+1} \end{cases} \tag{4.3.12}$$

不难看出，(4.3.12)式中的 k 是不超过 $(n+1)p$ 的最大整数。

样本的 p 分位数 m_p 表示容量为 n 的样本中约有 np 个数小于 m_p，它也是一种表示位置信息的统计量。

例 4.3.8 设从总体 X 中抽取了容量为 $n=99$ 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{99}$，则 $p=0.1$ 的分位数 $m_{0.1} = X_{(10)}$，这是因为 $\dfrac{10}{n+1} = \dfrac{10}{100} = 0.1$，故 $k=10$。如果样本容量为 100，则由于 $\dfrac{10}{101} < 0.1 < \dfrac{11}{101}$，故 $m_{0.1} = X_{(10)} + (X_{(11)} - X_{(10)})[101 \times 0.1 - 10] = 0.9X_{(10)} + 0.1X_{(11)}$，它是两个相邻次序统计量的加权平均。

$p=0.5$ 时，m_p 即为样本中位数 m_d。另外，在描述数据位置时常用到四分位数，即 $p=0.25$ 与 $p=0.75$ 的分位数 $m_{0.25}$ 与 $m_{0.75}$，并常将它们记为 Q_1 与 Q_3，分别称它们为**第一四分位数**与**第三四分位数**，它反映了有 $\dfrac{1}{4}$ 的数据小于 Q_1，有 $\dfrac{1}{4}$ 的数据大于 Q_3，而有一半数据介于 Q_1 与 Q_3 之间。在统计推断中常要用到 $p=0.01, 0.05, 0.1$ 与 $0.9, 0.95, 0.99$ 等对应的分位数。

为求样本 p 分位数，首先要对数据进行排序，然后才能利用(4.3.12)式来求 m_p。如果容量为 n 的样本能给出 §4.1 中所述的茎叶图，那么用来求 m_p 就十分方便。

例 4.3.9 对例 4.1.8 中给出的样本求 $x_{(1)}, x_{(n)}, m_d, Q_1$ 与 Q_3。

解：由于在例 4.1.8 中已对数据作了茎叶图，实际上便是对数据已进行了排序，由图 4.1.8 可知数据从小到大排序后为：

26.9	27.2	27.6	27.9	27.9	27.9	28.0	28.0	28.3	28.4
28.5	28.7	28.7	29.1	29.5	29.6	29.8	29.9	30.0	30.1

因而

$$x_{(1)}=26.9 \quad , \quad x_{(n)}=x_{(20)}=30.1$$

$$m_d=\frac{1}{2}[x_{(10)}+x_{(11)}]=\frac{1}{2}[28.4+28.5]=28.45$$

又由于$\frac{5}{21}<0.25<\frac{6}{21}$， $\frac{15}{21}<0.75<\frac{16}{21}$，故

$$\begin{aligned}Q_1&=x_{(5)}+(x_{(6)}-x_{(5)})(21\times0.25-5)\\&=27.9+(27.9-27.9)\times0.25=27.9\\Q_3&=x_{(15)}+(x_{(16)}-x_{(15)})(21\times0.75-15)\\&=29.5+(29.6-29.5)\times0.75=29.575\end{aligned}$$

4.3.5 箱线图(又称盒子图)

有了次序统计量后，常用箱线图来反映样本提供的有关总体的信息。

画箱线图要用到五个次序统计量：$x_{(1)}$，Q_1，m_d，Q_3，$x_{(n)}$，其示意图见图4.3.3。在数轴上方，Q_1 与 Q_3 间画上一个矩形，矩形中间的竖线表示中位数，矩形外画两条线段分别终于 $x_{(1)}$与 $x_{(n)}$处。

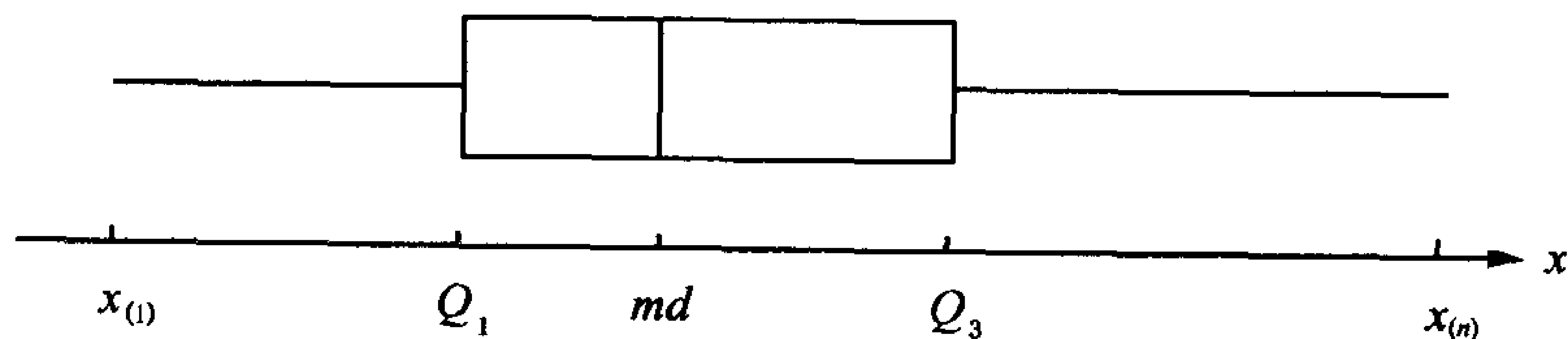


图 4.3.3 箱线图的示意图

例 4.3.10 对例 4.1.6 的样本数据作箱线图。

解：由例 4.3.4 求得的数据，可以方便地画出箱线图，见图 4.3.4。

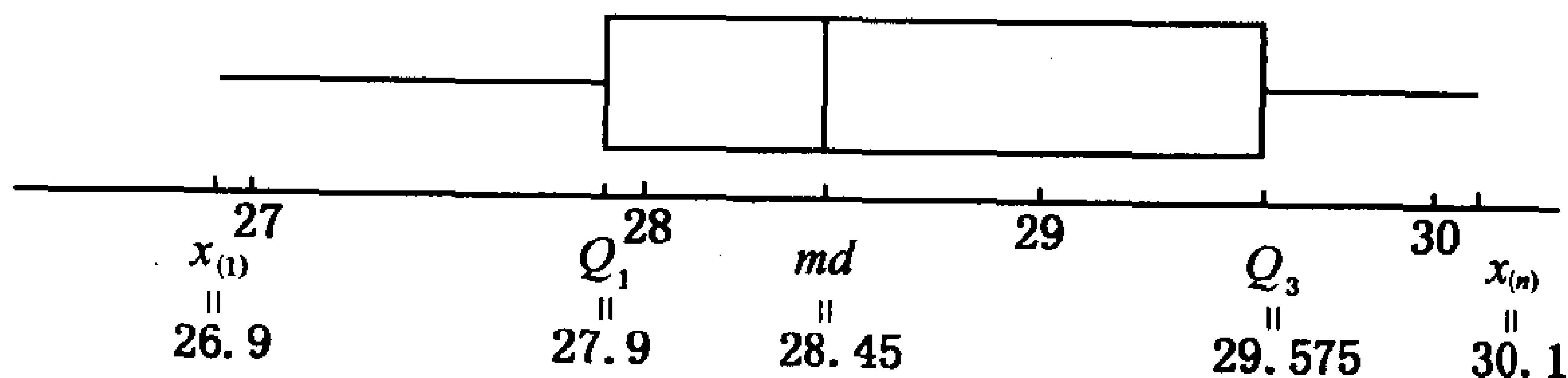


图 4.3.4 例 4.1.6 的箱线图

从箱线图可以形象地看出样本的如下特性：

(1)中心位置：中位数 m_d 所在位置即为样本中心，从 $x_{(1)}$到 m_d 和从 m_d 到 $x_{(n)}$各占样本量的一半；

(2)散布情况：全部样本位于$[x_{(1)},x_{(n)}]$内，若将样本等分成四份的话，那么在$[x_{(1)},Q_1]$，$[Q_1,m_d]$，$[m_d,Q_3]$，$[Q_3,x_{(n)}]$各占 1/4。各区间较短时，特别是

$[x_{(1)},x_{(n)}]$与$[Q_1,Q_3]$较短时，表示样本较集中，反之就较为分散。

(3)偏度：如果矩形位于中间位置，中位数又位于矩形的中间位置，则分布较为对称，否则是偏态分布。如果矩形偏于左端(或右端)，中位数偏于矩形左端(或右端)，可知分布是正偏(或负偏)，此时右尾(或左尾)较长。

(4)离群值：当矩形两侧线段长度相差过大时，表明长的一侧有特大(或特小)值，此时常将这种值用"×"表示，而线段终于 $x_{(n-1)}$(或 $x_{(2)}$)，甚至终于 $x_{(n-2)}$(或 $x_{(3)}$)(见图 4.3.5)。

由于从箱线图上可看出样本分布的一些特性，因此常将几个同类的样本数据画在同一坐标轴上以便进行比较。

例 4.3.11 设有两个教学班，各有 50 名学生，A 班用新方法组织教学，B 班用传统方法组织教学，现得期末考试成绩的如下次序统计量：

	$x_{(1)}$	Q_1	m_d	Q_3	$x_{(n)}$
A 班	44	66.5	75	81	96
B 班	35	56	65	83	100

将这两组数据在同一坐标轴上画上相应的箱线图，见图 4.3.5。从图上直观地看出：使用新教学方法的 A 班成绩明显高于 B 班，且学生成绩间的差距缩小了；但对于成绩优秀的学生来讲还是 B 班略多一些，可能新老教学方法对成绩好的学生来讲差不多。

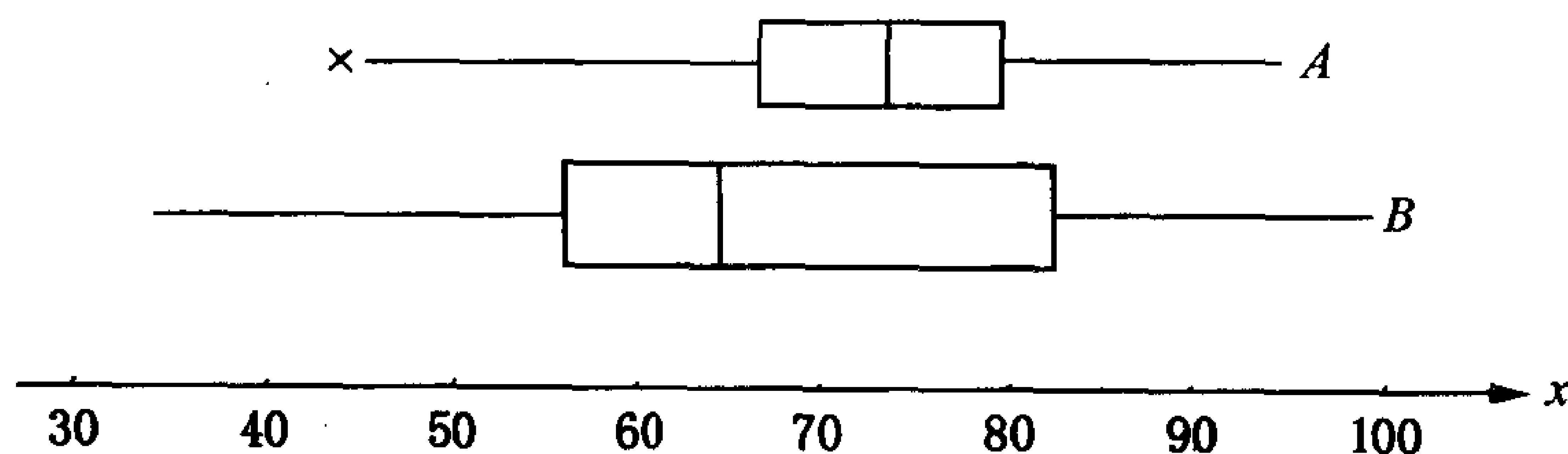


图 4.3.5 例 4.3.11 的箱线图

*4.3.6 用随机模拟方法寻找统计量的近似分布

有些统计量的抽样分布难以用精确方法获得，在一些情况中可以用随机模拟的方法来寻找统计量的分布，此时所得的分布都是用分位数来表示的。

随机模拟的基本想法如下：设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，从中抽取一个容量为 n 的样本，其观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，从而可得统计量 $T=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的一个观测值 t。将上述过程重复 N 次，则可得 T 的 N 个观测值 $t_1,t_2,$

$\cdots, t_N$，只要 N 充分大，那么样本分位数的观测值便是 T 的分布的分位数的一个近似值，并且 N 越大，近似程度越好，因而可将它作为 T 的分位数。当改变样本容量 n 时，则可得到不同容量 n 下，T 的分布的分位数。

利用随机模拟方法研究统计量的分布的关键在于如何产生分布 $F(x)$ 的容量为 n 的样本。这一点并不是在任何分布场合都能做到的，即使有可能，也将随 $F(x)$ 的具体形式而定，下面的例子会给我们启发。

例 4.3.12 用随机模拟方法求来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 总体的样本峰度 KU 的分布。

理论上已经证明 KU 的渐近分布是 $N(0,24)$，由于其收敛速度很慢，要对很大的 n 才能应用，因而这一渐近分布的应用价值不大。下面用随机模拟方法来求不同 n 下 KU 分布的分位数。为此需要作两项准备工作。

进行随机模拟的首要问题是要产生 KU 的 N 个观测值。由于总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中含未知参数 μ 与 σ^2，因而无法产生 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机数，这时需要借用分布的性质，首先把问题转化为可以大量产生随机数的分布。幸好这里可以转化为标准正态分布。

当 $X^* \sim N(0,1)$ 时，记其样本峰度为 KU^*，可以证明 $KU^* = KU$。这是因为若令 $X_i^* = \dfrac{X_i-\mu}{\sigma}, i=1,2,\cdots,n$，则有

$$\overline{X}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$$

故 $X_i^* - \overline{X}^* = \dfrac{X_i-\mu}{\sigma} - \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma} = \dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}$，从而

$$\begin{aligned} KU^* &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^*-\overline{X}^*)^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^*-\overline{X}^*)^2\right]^2} - 3 \\ &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\right]^2} - 3 \\ &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}^2)^2\right]^2} - 3 = KU \end{aligned}$$

因而求 KU 的观察值时可利用标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机数。

此外，为产生 $N(0,1)$ 的观测值（称为随机数），可利用 $(0,1)$ 上均匀分布

的随机数 u。设 $U_1,U_2,\cdots,U_{12}$ 是取自 $(0,1)$ 上均匀分布的容量为 12 的样本，则

$$E\left(\sum_{i=1}^{12}U_i-6\right)=0,\quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}U_i-6\right)=1$$

由中心极限定理知，$\sum_{i=1}^{12}U_i-6$ 近似服从 $N(0,1)$ 分布，故设 $u_1,u_2,\cdots,u_{12}$ 是 $(0,1)$ 上均匀分布的随机数时，将 $\sum_{i=1}^{12}u_i-6$ 作为 $N(0,1)$ 的一个观察值。其实产生 $N(0,1)$ 随机数还有许多方法，有兴趣的读者可参看徐钟济编著的《蒙特卡罗方法》一书。

有了上述两项准备，用随机模拟方法求 KU 的分位数的步骤如下：

(1) 产生12个 $(0,1)$ 上均匀分布的随机数 $u_1,u_2,\cdots,u_{12}$，令 $x=\sum_{i=1}^{12}u_i-6$。

(2) 将上述过程(1) 重复 n 次，则产生了 n 个 $N(0,1)$ 的随机数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。

(3) 计算

$$KU=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^2}-3$$

则得到 KU 的一个观测值，记为 $KU^{(1)}$。

(4)重复(1)～(3)N 次，可得 KU 的 N 个观察值

$$KU^{(1)},KU^{(2)},\cdots,KU^{(N)}$$

这里 N 是一个相当大的值，最好在 10000 以上。

(5)将 KU 的 N 个值排序，找出 $p=0.01,0.05,0.10,\cdots$ 的分位数。

(6)改变样本容量 n，重复上述过程(1)～(5)，可得不同 n 下 KU 的各种分位数。

表 4.3.4 列出了 $N=10000$，样本容量 n 为 15,20,25 时 KU 的分位数。

表 4.3.4　正态总体样本峰度 kU 的分位数($N=10000$ 的模拟结果)

概率 p ＼ 样本容量 n	15	20	25
0.01	−1.468	−1.360	−1.272
0.05	−1.278	−1.164	−1.081
0.10	−1.158	−1.045	−0.962
0.90	0.629	0.668	0.651
0.95	1.124	1.131	1.106
0.99	2.247	2.306	2.318

表 4.3.4 中的随机模拟结果表现出很强的规律性，是可信的。

第五章

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

参数估计

本章所讨论的参数不仅仅指总体分布 $F(x;\theta)$ 中所含的参数 θ(可以是向量)，而且还指分布的各种特征数，如均值、方差、标准差、相关矩，也包括各种事件的概率等。对这些参数要精确确定它是困难的，因而我们只能通过样本所提供的信息对它作出某种估计。例如每加仑汽油行驶的里程数是服从正态分布的，但其均值 μ 与方差 σ^2 未知，为此我们从中抽取了一个样本，用样本对 μ 与 σ^2 作出估计。这便是本章所要讨论的参数估计问题，它是实际中最常见的一类统计推断问题。

在本章中，设 θ 是总体的一个待估参数，θ 的一切可能取值构成的参数空间记为 Θ。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体中抽取了一个容量为 n 的样本，其观测值记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。

参数估计的形式有两种：点估计与区间估计。

在参数的点估计中，是要构造一个统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，然后用 $\hat{\theta}$ 去估计 θ，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**点估计**或**估计量**，或简称**估计**，将样本观测值代入后便得到了 θ 的一个点估计值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在不致混淆的情况下均用 $\hat{\theta}$ 表示。

在参数的**区间估计**中，是要构造两个统计量 $\hat{\theta}_L$ 与 $\hat{\theta}_U$，且 $\hat{\theta}_L<\hat{\theta}_U$，然后以区

间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$的形式给出未知参数$\theta$的估计，事件“区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$含有$\theta$”的概率称为置信水平。

本章将先讨论获得点估计的两种常用方法，它们是矩法估计与极大似然估计，并讨论评价估计量好坏的标准，然后再讨论区间估计问题，最后对贝叶斯点估计与区间估计作一简单介绍。

§5.1 矩法估计

1900年英国统计学家K. Pearson提出了一个替换原则：用样本矩去替换总体矩，后来人们就称此为**矩法估计**。

5.1.1 矩法估计的基本点

矩法估计的基本点是：用样本矩估计总体矩，用样本矩的相应函数估计总体矩的函数。

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自某总体X的一个样本，则样本的k阶原点矩为：

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \quad , \quad k=1,2,\cdots$$

如果总体X的k阶原点矩$\mu_k=E(X^k)$存在，则用A_k去估计μ_k，记为

$$\hat{\mu}_k=A_k$$

例5.1.1 设总体$X\sim b(1,p)$，从中获得样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，由于$E(X)=p$，故p的矩法估计为

$$\hat{p}=A_1=\overline{X}$$

设样本的观察值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，那么每一个x_i不是0便是1，从而$\hat{p}$的观察值便是

$$\hat{p}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{x_1,\cdots,x_n\text{中1的个数}}{n}$$

这便是频率。

例5.1.2 设总体X具有方差σ^2，从总体中获得样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，由于

$$\sigma^2=\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(EX)^2=\mu_2-\mu_1^2$$

那么分别用A_2估计μ_2，A_1估计μ_1，从而其函数σ^2的矩法估计为

$$\hat{\sigma}^2=A_2-A_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

这便是样本的二阶中心矩 B_2，而 $\mathrm{Var}(X)$ 是总体的二阶中心矩 ν_2，故

$$\hat{\nu}_2 = B_2$$

一般当总体的 k 阶中心矩 ν_k 存在时，其矩法估计为样本的 k 阶中心矩 B_k，即：

$$\hat{\nu}_k = B_k$$

矩法估计的优点是不要求知道总体的分布，因而矩法估计获得了广泛的应用。

5.1.2 分布中未知参数的矩法估计

当总体分布类型已知时，但含有未知参数，有时也可用矩法获得未知参数的估计。

设总体 X 的分布函数中含有 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$，且分布的前 k 阶矩存在，它们都是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数，此时求 $\theta_j(j=1,2,\cdots,k)$ 的矩法估计的具体步骤如下：

(1) 求出 $E(X^j)=\mu_j, j=1,2,\cdots,k$，并假设

$$\mu_j = g_j(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),\quad j=1,2,\cdots,k \tag{5.1.1}$$

(2) 解方程组(5.1.1)得：

$$\theta_i = h_i(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k),\quad i=1,2,\cdots,k \tag{5.1.2}$$

(如果可能求解的话)

(3) 在(5.1.2)中，用 A_j 代 $\mu_j, j=1,2,\cdots,k$，则得 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的矩法估计为：

$$\hat{\theta}_i = h_i(A_1,A_2,\cdots,A_k),\quad i=1,2,\cdots,k \tag{5.1.3}$$

(4) 如果有样本观察值，则将它们代入(5.1.3)得 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的估计值。

有时为方便起见，在(5.1.1)或(5.1.2)中会出现总体的中心矩 ν_j 等，这时可用 B_j 代替 ν_j。

例5.1.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自均匀分布 $U(a,b)$ 的一个样本，试求 a，b 的矩法估计。

解：(1) 由于总体 $X\sim U(a,b)$，则

$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2},\quad \nu_2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(2) 从上面两个方程可解得 a 与 b，由

$$\begin{cases} a + b = 2 \cdot \mu_1 \\ b - a = \sqrt{12\nu_2} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a = \mu_1 - \sqrt{3\nu_2} \\ b = \mu_1 + \sqrt{3\nu_2} \end{cases}$$

(3) 用 $A_1 = \overline{X}$ 与 $B_2 = S_n^2$ 分别替换 μ_1 与 ν_2，则得 a 与 b 的矩法估计为

$$\begin{cases} \hat{a} = \overline{X} - \sqrt{3S_n^2} = \overline{X} - \sqrt{3}\, S_n \\ \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{3S_n^2} = \overline{X} + \sqrt{3}\, S_n \end{cases}$$

例 5.1.4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 Γ 分布 $\Gamma(\alpha,\lambda)$ 的一个样本，试求 α,λ 的矩法估计。

解：(1) 由于总体 $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$，有

$$\mu_1 = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad \nu_2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

(2) 从上述方程组可解得

$$\alpha = \frac{\mu_1^2}{\nu_2}, \qquad \lambda = \frac{\mu_1}{\nu_2}$$

(3) 用 $\overline{X}$ 与 S_n^2 分别替换 μ_1 与 ν_2，则得 α 与 λ 的矩法估计为：

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{S_n^2}, \qquad \hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{S_n^2}$$

矩法估计的优点是计算简单，且在总体分布未知场合也可使用。它的缺点是不唯一，譬如泊松分布 $P(\lambda)$，由于其均值和方差都是 λ，因而可以用 $\overline{X}$ 去估计 λ，也可以用 S_n^2 去估计 λ；此外样本各阶矩的观测值受异常值影响较大，从而不够稳健。

§5.2 点估计优劣的评价标准

参数的点估计实质上是构造一个估计量去估计未知参数，上节讲的矩法估 计是用各种矩去构造估计量的一种方法。对一个未知参数 θ，人们可以构造多个估计量去估计它，譬如，在上一节中提到，当总体 X 服从参数为 λ 的泊松

分布时，由于 $E(X)=\lambda, \mathrm{Var}(X)=\lambda$，因此 λ 的矩法估计可以有两个：

$$\hat{\lambda}_1=\overline{X}$$

$$\hat{\lambda}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

其实我们还可以用其它方法构造 λ 的多个估计，譬如用样本中位数 m_d，用 $\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$ 等等。从而产生了一个问题：究竟用哪一个估计量去估计为好呢？为此需要有评价估计好坏的标准，标准不同，答案也会有所不同。本节介绍几个常用准则。

5.2.1 无偏性

设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个估计量，其概率密度函数如图 5.2.1 所示。从图中可见，$\hat{\theta}_1$ 的取值分布在待估参数 θ 的两侧，由样本求得的估计量的观察值与 θ 会有偏离，这种偏离有时大些，有时小些，有时为正，有时为负，但从平均意义上来讲，$E\hat{\theta}_1$ 与 θ 一致。而 $\hat{\theta}_2$ 的取值虽也分布在待估参数 θ 的两侧，但由样本求得的估计量的观察值与 θ 相比，小的为多，大的为少，从平均意义上讲，$E\hat{\theta}_2<\theta$。

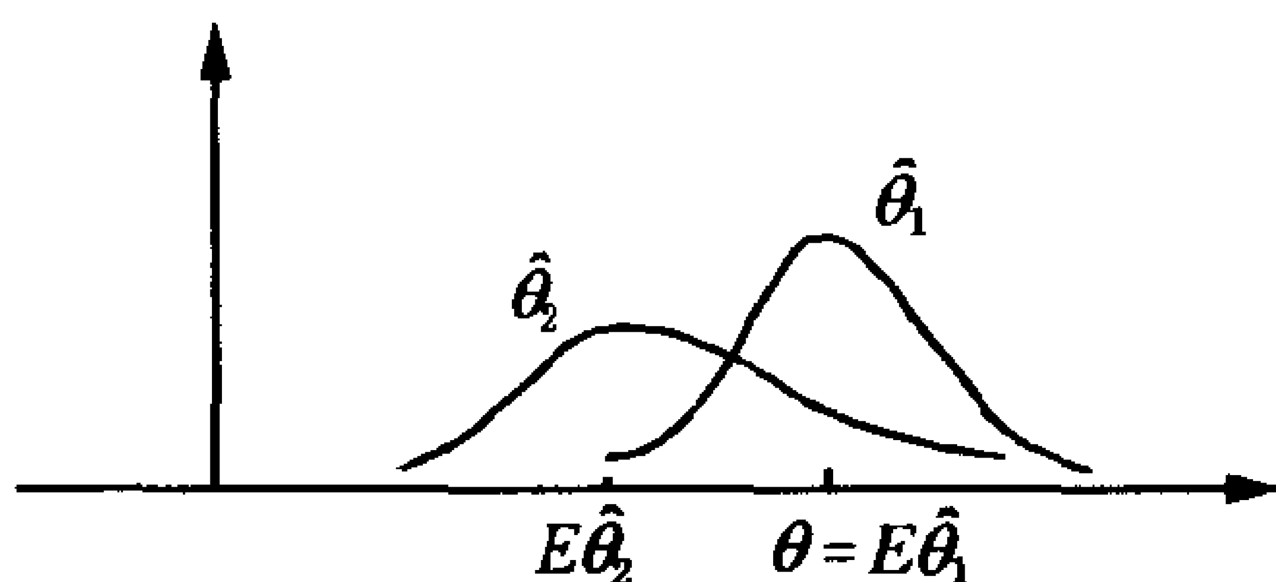


图 5.2.1 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的概率密度曲线的示意图

（$\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计）

我们希望所得的估计 $\hat{\theta}$ 从平均意义上来讲与 θ 越接近越好，当其差值为 0 时便产生了无偏估计的概念。

定义 5.2.1 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是参数 θ 的估计量，如果

$$E\hat{\theta}=\theta \qquad \theta\in\Theta \tag{5.2.1}$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计**，否则称为**有偏估计**。这里 Θ 是 θ 的参数空间。

例 5.2.1 设总体 X 具有 k 阶矩，$EX^k=\mu_k$，则样本的 k 阶原点矩 A_k 是 μ_k 的无偏估计。

证：从总体 X 中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则由 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布可知 $EX_i^k=\mu_k, i=1,2,\cdots,n$，从而

$$E(A_k)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_k=\mu_k$$

所以 A_k 是 μ_k 的无偏估计。

例 5.2.2 设总体 X 具有二阶矩，$E(X)=\mu$，$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$，从中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计，但 S_n^2 不是 σ^2 的无偏估计，而 S^2 是 σ^2 的无偏估计。

证：由例 5.2.1 可知当 $k=1$ 时，$A_1=\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计，求 $E(S_n^2)$。

由于

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$$

为求 $E(S_n^2)$，先求 EX_i^2 与 $E\overline{X}^2$：

$$EX_i^2=\mathrm{Var}(X_i)+(EX_i)^2=\sigma^2+\mu^2\quad,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$E\overline{X}^2=\mathrm{Var}(\overline{X})+(E\overline{X})^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$$

代入得：

$$E(S_n^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

因而 S_n^2 不是 σ^2 的无偏估计。

又

$$E(S^2)=E\left(\frac{nS_n^2}{n-1}\right)=\frac{n}{n-1}\cdot E(S_n^2)=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

所以 S^2 是 σ^2 的无偏估计，所以在不少场合，特别在小样本场合，人们常用 S^2 去估计 σ^2。所以 S^2 称为无偏方差。

对 S_n^2 而言，尽管它不是 σ^2 的无偏估计，然而当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}ES_n^2=\sigma^2$$

我们称 S_n^2 是 σ^2 的**渐近无偏估计**。

当 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计时，若用 $g(\hat{\theta})$ 去估计参数 $g(\theta)$，那么 $g(\hat{\theta})$ 通常不再是 $g(\theta)$ 的无偏估计。在例 5.2.2 中，我们证明了 S^2 是 σ^2 的无偏估计，但是 S 不是 σ 的无偏估计。下面的例子说明了这一点。

例 5.2.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ 未知，试证明

$$\hat{\sigma}_s=C_nS$$

是 σ 的无偏估计，其中

$$C_n=\sqrt{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},\quad S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

证：由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，若令 $Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，则 Y 的密度函数为

$$p(y)=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}y^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}},\quad y>0$$

从而

$$E(Y^{\frac{1}{2}})=\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}}p(y)dy$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\infty}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\sqrt{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

另一方面 $E(Y^{\frac{1}{2}})=\frac{\sqrt{n-1}E(S)}{\sigma}$，故有

$$E(S)=\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}E(Y^{\frac{1}{2}})=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma=\frac{\sigma}{C_n}$$

表 5.2.1　正态标准差的无偏系数表

n	C_n	n	C_n
2	1.2533	14	1.0194
3	1.1284	15	1.0180
4	1.0854	16	1.0168
5	1.0638	17	1.0157
6	1.0510	18	1.0148
7	1.0423	19	1.0140
8	1.0363	20	1.0133
9	1.0317	21	1.0126
10	1.0281	22	1.0129
11	1.0252	23	1.0114
12	1.0229	24	1.0109
13	1.0210	25	1.0105

从而

$$\hat{\sigma}_s = C_n S$$

是 σ 的无偏估计。表 5.2.1 给出了 $n = 2(1)25$ 的无偏系数表，供实际使用，从表中可见，当 n 越来越大时，C_n 就越来越接近于 1。

5.2.2 有效性

在实际问题中，人们常常首先关心的是估计的无偏性，但是一个参数的无偏估计可以有许多，那么在这些估计中取哪个为好呢？直观的想法是希望所找到的估计围绕其真值的波动越小越好，即要求估计量的方差小，从而 $\hat{\theta}$ 与 θ 有较大偏差的可能性小。如图 5.2.2 中给出了 θ 的两个无偏估计 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 及其密度函数的图形，从图上可见 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$。因而我们可以用估计量的方差去衡量两个无偏估计的好坏，从而引入无偏估计有效性的标准。

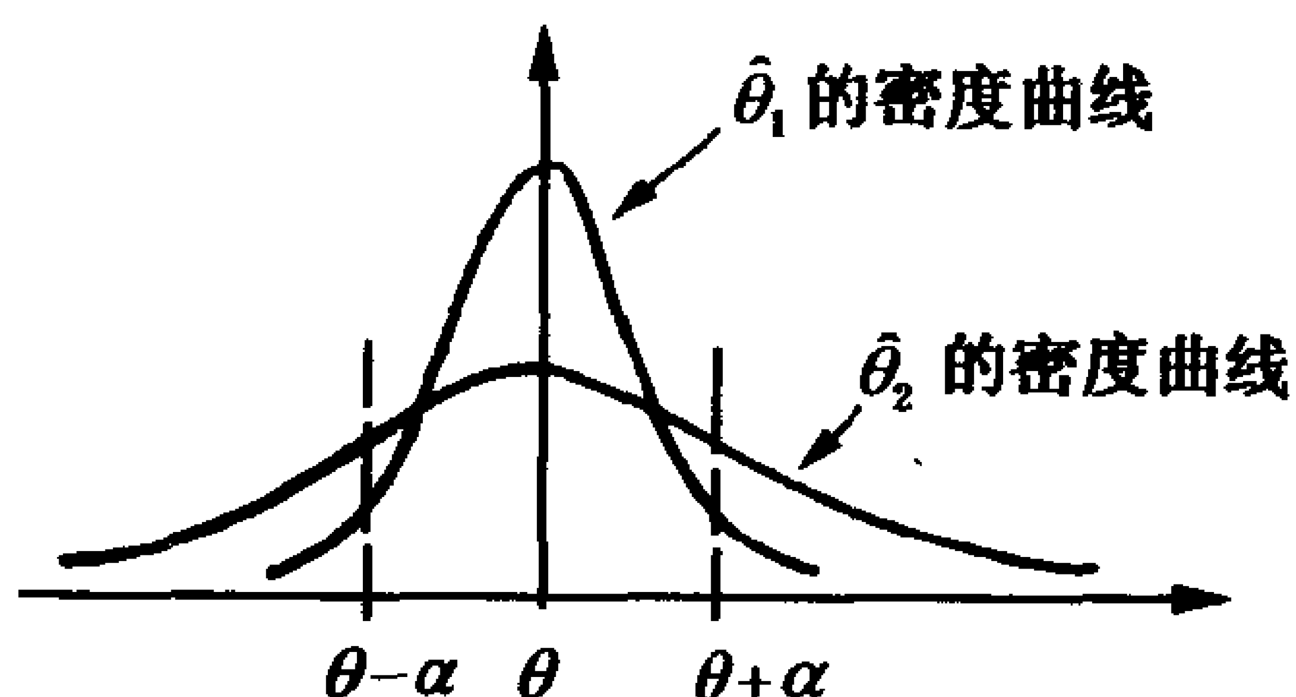


图 5.2.2 θ 的两个无偏估计的密度函数示意图

定义 5.2.2 设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是参数 θ 的无偏估计，如果

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) \leqslant \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) \quad , \quad \theta \in \Theta \tag{5.2.2}$$

且至少对一个 $\theta_0 \in \Theta$，有严格不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

例 5.2.4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的样本，且 $EX = \mu$，则

$$\hat{\mu}_1 = \overline{X}, \quad \hat{\mu}_2 = X_1$$

都是 μ 的无偏估计，但

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) = \sigma^2$$

故当 $n \geqslant 2$ 时，$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\mu}_2)$，因而 $\hat{\mu}_1$ 比 $\hat{\mu}_2$ 有效。

5.2.3 均方误差准则

对 θ 的两个无偏估计，我们可以通过比较它们的方差来判断哪个更好，但

对有偏估计来讲，比较方差意义不大，我们关心的是估计值围绕其真值波动的大小，因而引入均方误差准则。

定义 5.2.3 设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是参数 θ 的两个估计量，如果

$$E(\hat{\theta}_1-\theta)^2 \leqslant E(\hat{\theta}_2-\theta)^2 \quad , \quad \theta \in \Theta \tag{5.2.3}$$

且至少对一个 $\theta_0 \in \Theta$，有严格不等式成立，则称在均方误差意义下，$\hat{\theta}_1$ 优于 $\hat{\theta}_2$。其中 $E(\hat{\theta}_i-\theta)^2$ 称为 $\hat{\theta}_i$ 的**均方误差**，常记为 $MSE(\hat{\theta}_i)$。

例 5.2.5 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，试在均方误差意义下比较下面两个估计的优劣：

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=S^2$$

$$\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$$

解：由例 5.2.2 知 S^2 是 σ^2 的无偏估计，因而其均方误差即为其方差。在正态分布场合，$\dfrac{(n-1)\hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$，从而

$$\mathrm{Var}\left[\frac{(n-1)\hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$$

于是，$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_1^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$，即

$$E(\hat{\sigma}_1^2-\sigma^2)^2=\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_1^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

然而 $\hat{\sigma}_2$ 是 σ^2 的有偏估计，其均方误差

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}_2^2-\sigma^2)^2&=E\left[\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2-\sigma^2\right]^2\\
&=E\left[\frac{(n-1)S^2}{n+1}-\sigma^2\right]^2\\
&=E\left[\frac{n-1}{n+1}(S^2-\sigma^2)-\frac{2}{n+1}\sigma^2\right]^2\\
&=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\mathrm{Var}(S^2)+\left(\frac{2\sigma^2}{n+1}\right)^2\\
&=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\cdot\frac{2\sigma^4}{n-1}+\frac{4\sigma^4}{(n+1)^2}=\frac{2\sigma^4}{n+1}
\end{aligned}$$

由于$\dfrac{2\sigma^4}{n+1}<\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$，故在均方误差意义下，有偏估计 $\hat{\sigma}_2^2$ 比无偏估计 S^2 要好。

由本例可知，从无偏性角度考察，用 S^2 估计 σ^2 是好的，但从均方误差意义上讲用 $\hat{\sigma}_2^2$ 估计 σ^2 为好。它们从不同侧面去考察估计量的好坏，至于具体采用

什么估计则需根据实际问题来定。

5.2.4 相合性

随着样本容量的增大，一个好的估计 $\hat{\theta}$ 应该越来越靠近其真值 θ，使偏差 $|\hat{\theta}-\theta|$ 大的概率越来越小。这一性质称为相合性。

定义 5.2.4 设对每个自然数 n，$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个估计量，如果对任意 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$P(|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon)\to 0 \tag{5.2.4}$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的**相合估计**。

为说明样本 k 阶矩 A_k 是总体 k 阶矩 μ_k 的相合估计，先不加证明给出一个辛钦大数定律。

定理 5.2.1（辛钦大数定律） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布随机变量序列，若其具有有限的数学期望 μ，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right)=0 \tag{5.2.5}$$

当总体 k 阶矩 μ_k 存在时，由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 的独立同分布，可知 $X_1^k,X_2^k,\cdots,X_n^k,\cdots$ 也独立同分布，由于 $EX_i^k=\mu_k$ 存在，从而由辛钦大数定律便有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k-\mu_k\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$$

这就表明 A_k 是 μ_k 的相合估计。

当 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$ 分别是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的相合估计时，若 $g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 为连续函数，则 $g(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k)$ 是 $g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 的相合估计。由此可知，样本方差 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=A_2-A_1^2$ 是总体方差 $\mu_2-\mu_1^2=\sigma^2$ 的相合估计。

§5.3 极大似然估计

5.3.1 极大似然估计的思想与概念

当总体分布类型已知时，极大似然估计是一种常用的估计方法。极大似然

估计常用 MLE 表示。

为了了解这一方法的思想，先看一个例子。

例 5.3.1 设有甲、乙两个口袋，袋中各装有 4 个同样大小的球，球上分别涂有白色或黑色，已知在甲袋中黑球数为 1，乙袋中黑球数为 3。

(1) 现任取一袋，再从该袋中任取一球，发现是黑球，试问该球最象取自哪一袋？

(2) 现任取一袋，再从该袋中有返回地任取三个球，其中有一个黑球，试问此时最象取自哪一袋？

解：(1) 设 p 为抽到黑球的概率，从甲袋中抽一球是黑球的概率为 $p_{甲}=\frac{1}{4}$，从乙袋中抽一球是黑球的概率为 $p_{乙}=\frac{3}{4}$。由于 $p_{乙}>p_{甲}$，这便意味着此黑球来自乙袋的可能性比来自甲袋的可能性大。因而我们会判断该球象是来自乙袋。

(2) 设 X 是抽取三个球中黑球的个数，又设 p 为袋中黑球所占的比例，则 $X\sim b(3,p)$，即

$$P(X=k)=\binom{3}{k}p^k(1-p)^{3-k},\quad k=0,1,2,3$$

在 $X=1$ 时，不同 p 值对应的概率分别为：

$$P_{甲}(X=1)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

$$P_{乙}(X=1)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}$$

由于 $P_{甲}(X=1)>P_{乙}(X=1)$，因而我们判断：此三球最象是取自甲袋。

在上面的例子中，p 是分布中的参数，它只能取两个值：$p_{甲}$ 与 $p_{乙}$，需要通过抽取样本来决定分布中参数究竟是 $p_{甲}$ 还是 $p_{乙}$。在给定了样本观测值后去计算该样本出现的概率，这一概率依赖于 p 的值，为此需要用 $p_{甲}$、$p_{乙}$ 分别去计算此概率，在相对比较之下，哪个概率大，则 p 就最象那个。

极大似然估计的基本思想就是根据上述想法引伸出来的。设总体含有待估参数 θ，它可以取很多值，我们要在 θ 的一切可能取值之中选出一个使样本观测值出现的概率为最大的 θ 值(记为 $\hat{\theta}$) 作为 θ 的估计，并称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计。

下面分 X 的分布是离散的与连续的两种情况加以讨论。

第一种，离散分布场合的极大似然估计。

设 X 的分布是离散的，分布中含有未知参数 θ，记为

$$P(X = a_i) = p(a_i;\theta) \qquad i = 1,2,\cdots \qquad \theta \in \Theta$$

现从总体中抽取容量为 n 的样本，其观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，这里每个 x_i 为 a_1，$a_2, \cdots$ 中的某个值，该样本的联合分布为 $\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$。由于这一概率依赖于未知参数 θ，因而可将它看成是 θ 的函数，称为**似然函数**，记为 $L(\theta)$：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta) \tag{5.3.1}$$

对不同的 θ，同一组样本观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 出现的概率 $L(\theta)$ 也不一样。我们知道，当 $P(A) > P(B)$ 时，事件 A 出现的可能性比事件 B 出现的可能性大，如果样本观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 出现了，当然就要求对应的似然函数 $L(\theta)$ 的值达到最大，所以我们选取这样的 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计，使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

假如 $\hat{\theta}$ 存在的话，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**极大似然估计**。

第二种，连续分布场合的极大似然估计。

当 X 的分布是连续时，其概率密度函数为 $p(x;\theta)$，其中 θ 为未知参数，$\theta \in \Theta$。现从该总体中获得容量为 n 的样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则在 $X_1 = x_1$，$X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$ 时联合密度函数值为 $\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$，它也是 θ 的函数，也称为**似然函数**，记为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta) \tag{5.3.2}$$

对不同的 θ，同一组样本观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的联合密度函数值也是不同的，因而我们选择 θ 的**极大似然估计** $\hat{\theta}$ 应满足

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

5.3.2 求极大似然估计的方法

寻求分布中未知参数 θ 的极大似然估计，首先要写出似然函数 $L(\theta)$，即样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布；其次，要建立一个新的观点，让 θ 变化，这时同一组样本的观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 出现的概率 $L(\theta)$ 将随着 θ 的改变而改变。由于当 $P(A) > P(B)$ 时，事件 A 出现的可能性比事件 B 出现的可能性大，如今样本观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 出现了，那么它对应的似然函数值应达到最大。因而求 θ 的极大似然估计就是求使 $L(\theta)$ 达到最大的点 $\hat{\theta}$。

下面分两种情况加以讨论。

5.3.2.1 可通过求导获得极大似然估计的情况

当函数关于参数可导时，常常可以通过求导方法来获得似然函数极大值对应的参数值。

在求极大似然估计时，为求导方便，常对似然函数 $L(\theta)$ 取对数，称 $l(\theta)=\ln L(\theta)$ 为**对数似然函数**，它与 $L(\theta)$ 在同一点上达到最大。当 $l(\theta)$ 对 θ 的每一分量可微时，可通过 $l(\theta)$ 对 θ 的每一分量求偏导并令其为 0 求得，称

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_j}=0,\qquad j=1,2,\cdots,k \tag{5.3.3}$$

为**似然方程**，其中 k 是 θ 的维数。

具体步骤用例 5.3.2 来说明。

例 5.3.2 设某工序生产的产品的不合格品率为 p，抽 n 个产品作检验，发现有 T 个不合格，试求 p 的极大似然估计。

解：设 X 是抽查一个产品时的不合格品个数，则 X 服从参数为 p 的二点分布 $b(1,p)$。抽查 n 个产品，则得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，其观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，假如样本中有 T 个不合格，即表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 T 个取值为 1，$n-T$ 个取值为 0。为求 p 的极大似然估计，可按如下步骤进行：

(1) 写出似然函数

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

(2) 对 $L(p)$ 取对数，得对数似然函数

$$l(p)=\sum_{i=1}^{n}[x_i\ln p+(1-x_i)\ln(1-p)]$$

$$=n\ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}x_i[\ln p-\ln(1-p)]$$

(3) 由于 $l(p)$ 对 p 的导数存在，故将 $l(p)$ 对 p 求导，令其为 0，得似然方程：

$$\frac{dl(p)}{dp}=-\frac{n}{1-p}+\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}\right)$$

$$=-\frac{n}{1-p}+\frac{1}{p(1-p)}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

(4) 解似然方程得

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

(5) 经验证，在 $\hat{p}=\bar{x}$ 时，$\frac{d^2l(p)}{dp^2}<0$，这表明 $\hat{p}=\bar{x}$ 可使似然函数达到最

大。

(6) 上述叙述对任一样本观察值都成立，故用样本代替观察值便得 p 的极大似然估计为

$$\hat{p} = \overline{X}$$

将观察值代入，可得 p 的极大似然估计值为

$$\hat{p} = \bar{x} = T/n$$

其中 $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$。这里 $\hat{p}$ 就是频率，可见频率也是不合格品率的极大似然估计。

例 5.3.3 设某机床加工的轴的直径与图纸规定的中心尺寸的偏差服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 未知。为估计 μ 与 σ^2，从中随机抽取 $n = 100$ 根轴，测得其偏差为 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$。试求 μ,σ^2 的极大似然估计。

解：(1) 写出似然函数

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(2) 写出对数似然函数

$$l(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

(3) 将 $l(\mu,\sigma^2)$ 分别对 μ 与 σ^2 求偏导，并令它们都为 0，得似然方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ \dfrac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

(4) 解似然方程得

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

(5) 经验证 $\hat{\mu},\hat{\sigma}^2$ 使 $l(\mu,\sigma^2)$ 达到极大。

(6) 上述叙述也对一切样本观察值成立，故用样本代替观察法，便得 μ 与 σ^2 的极大似然估计分别为：

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = S_n^2$$

如果由 100 个样本观察值求得 $\sum_{i=1}^{100} x_i = 26$(单位:mm)，$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 7.04$，则可求得 μ 与 σ^2 的极大似然估计值：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.26$$

$$s_n^2 = \frac{1}{100}\left[\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{1}{100}\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)^2\right] = \frac{7.04 - 26^2/100}{100} = 0.0028$$

从前一节的讨论可知 $\hat{\mu} = \overline{X}$ 是 μ 的无偏估计，但 $\hat{\sigma}^2 = S_n^2$ 不是 σ^2 的无偏估计。所以未知参数的极大似然估计不一定具有无偏性。

5.3.2.2　**不能通过求导方法获得极大似然估计的情况**

当似然函数的非零区域与未知参数有关时，通常无法通过解似然方程来获得参数的极大似然估计，这时可从定义出发直接求 $L(\theta)$ 的极大值点。

例 5.3.4　设总体 X 服从均匀分布 $U(0,\theta)$，从中获得容量为 n 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，试求 θ 的 MLE。

解：首先写出似然函数：

$$L(\theta) = \begin{cases} \theta^{-n}, & 0 \leqslant x_{(1)} \leqslant x_{(n)} \leqslant \theta \\ 0\ , & \text{其它场合} \end{cases}$$

在这里由于 $L(\theta)$ 非零区域与 θ 有关，因而无法用求导方法来获得 θ 的 MLE，从而转向由定义直接求 $L(\theta)$ 的极大值。

为使 $L(\theta)$ 达到极大，就必须使 θ 尽可能小，但是 θ 不能小于 $x_{(n)}$，因而 θ 取 $x_{(n)}$ 时便使 $L(\theta)$ 达到了极大，故 θ 的 MLE 为

$$\hat{\theta} = X_{(n)} \tag{5.3.4}$$

下面来讨论一下估计(5.3.4)是否具有无偏性。

由于总体 $X \sim U(0,\theta)$，其密度函数与分布函数分别为：

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 1, & x \geqslant \theta \end{cases}$$

从而 $\hat{\theta} = X_{(n)}$ 的概率密度函数为

$$p_{\hat{\theta}}(y) = n \cdot [F(y)]^{n-1} p(y) = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\quad,\quad 0 < y < \theta$$

$$E(\hat{\theta}) = E(X_{(n)}) = \int_0^{\theta} y p_{\hat{\theta}}(y) dy = \int_0^{\theta} \frac{ny^n}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta$$

这说明 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta} = X_{(n)}$ 不是 θ 的无偏估计，但对 $\hat{\theta}$ 作一修正可得 θ 的无偏估计为：

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

通过修正获得未知参数的无偏估计，这是一种常用的方法。在二次世界大战中，从战场上缴获的纳粹德国的枪支上都有一个编号，对最大编号作一修正便获得了德国生产能力的无偏估计。

5.3.3 极大似然估计的不变原则

求未知参数 θ 的某种函数 $g(\theta)$ 的极大似然估计可用下面所述的极大似然估计的不变原则，它的证明这里省略了。

定理 5.2.1（不变原则） 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计，$g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，则 $g(\theta)$ 的极大似然估计为 $g(\hat{\theta})$。

例 5.3.5 设某元件失效时间服从参数为 λ 的指数分布，其密度函数为

$$p(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geqslant 0$$

λ 未知。现从中抽取了 n 个元件测得其失效时间为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，试求 λ 及平均寿命的 MLE。

解：先求 λ 的 MLE。

（1）写出似然函数

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

（2）取对数得对数似然函数

$$l(\lambda) = n\ln\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

（3）将 $l(\lambda)$ 对 λ 求导得似然方程为：

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

（4）解似然方程得

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

经验证它使 $l(\lambda)$ 达到最大，由于上述过程对一切样本观察值成立，故 λ 的 MLE 是

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

元件的平均寿命即为 X 的期望值，在指数分布场合，有 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$，它是 λ 的函数，其极大似然估计可用不变原则求得，即用 λ 的 $MLE\hat{\lambda}$ 代入便得 $E(X)$ 的 MLE 为 $E(X) = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \overline{X}$。由于 $\overline{X}$ 也是 $E(X)$ 的矩法估计，故 $\overline{X}$ 是 $E(X)$ 的无偏相合估计。

5.3.4 极大似然估计的渐近正态性

在分布类型已知的场合，极大似然估计受人们重视的原因除了上面例 5.3.1 所提到的符合人们的经验外，还由于极大似然估计具有渐近正态性。下面仅就单参数连续分布的场合不加证明地给出这一定理。

定理 5.3.2 设总体 X 具有密度函数 $p(x;\theta)$，未知参数 $\theta \in \Theta$，Θ 是一个非退化区间。并假定

(1) 对一切 $\theta \in \Theta$，偏导数 $\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \ln p}{\partial \theta^3}$ 存在。

(2) 对一切 $\theta \in \Theta$，有

$$\left|\frac{\partial p}{\partial \theta}\right| < F_1(x), \quad \left|\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}\right| < F_2(x), \quad \left|\frac{\partial^3 p}{\partial \theta^3}\right| < F_3(x)$$

其中函数 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上可积，而函数 $F_3(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_3(x) p(x;\theta) dx < M$$

其中 M 与 θ 无关。

(3) 对一切 $\theta \in \Theta$，有

$$0 < E\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}\right)^2 p(x;\theta) dx < \infty$$

则在分布参数 θ 的真值 θ_0 为 Θ 的一个内点的情况下，其似然方程 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ 有一个解 $\hat{\theta}$ 存在，并对任给 $\varepsilon > 0$，随着 $n \to \infty$，有 $P(|\hat{\theta} - \theta_0| > \varepsilon) \to 0$，且 $\hat{\theta}$ 渐近服从正态分布

$$N\left(\theta_0, \left[nE\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}\right)^2\right]_{\theta=\theta_0}^{-1}\right)$$

该定理对单参数离散分布场合也成立，只要把定理中的密度函数 $p(x;\theta)$ 看成是概率函数，将积分改为求和即可。

例 5.3.6 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本。可以验证对

$$p(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2n}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

在 σ^2 已知时或在 μ 已知时均满足定理 5.2.1 中三个条件。

(1) 在 σ^2 已知时，μ 的 MLE 为 $\hat{\mu}=\overline{X}$，则由定理 5.2.1 知 $\hat{\mu}$ 渐近服从正态分布 $N\left(\mu,\left[nE\left(\frac{\partial\ln p}{\partial\mu}\right)^2\right]^{-1}\right)$。由于

$$\ln p(x)=-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial\ln p}{\partial\mu}=\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial\ln p}{\partial\mu}\right)^2=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}$$

从而 $\hat{\mu}$ 渐近服从 $N(\mu,\sigma^2/n)$，这与 $\overline{X}$ 的精确分布相同。

(2) 在 μ 已知时，σ^2 的 MLE 为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，则由定理 5.3.2 知，$\hat{\sigma}^2$ 渐近服从 $N\left(\sigma^2,\left[nE\left(\frac{\partial\ln p}{\partial\sigma^2}\right)^2\right]^{-1}\right)$。由于

$$\frac{\partial\ln p}{\partial\sigma^2}=-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}(x-\mu)^2=\frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{2\sigma^4}$$

$$E\left(\frac{\partial\ln p}{\partial\sigma^2}\right)^2=E\left[\frac{(X-\mu)^2-\sigma^2}{2\sigma^4}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4\sigma^8}[E(X-\mu)^4-2\sigma^2E(X-\mu)^2+\sigma^4]$$

$$=\frac{1}{2\sigma^4}$$

从而 $\hat{\sigma}^2$ 的渐近分布为 $N(\sigma^2,2\sigma^4/n)$。

极大似然估计的渐近正态性，为今后在大样本情况下讨论参数的区间估计及假设检验提供了依据。

§5.4 区间估计

参数估计有两种形式。点估计值能给人们一个明确的数量，未知参数 θ 是多少，但不能给出精度。为了弥补这种不足，统计学家又提出区间估计概念。点估计与区间估计是互为补充、各有各的用途，下面先给出有关概念。

5.4.1 区间估计的概念

定义 5.4.1 设 θ 是总体的一个参数，其参数空间为 Θ，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的一个样本，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，确定两个统计量 $\theta_L=\theta_L(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\theta_U=\theta_U(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，若对任意 $\theta\in\Theta$，有

$$P(\theta_L\leqslant\theta\leqslant\theta_U)\geqslant 1-\alpha \quad , \quad \forall\theta\in\Theta \tag{5.4.1}$$

则称随机区间 $[\theta_L,\theta_U]$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**置信区间**，或简称 $[\theta_L,\theta_U]$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间，θ_L 与 θ_U 分别称为 $1-\alpha$ 的**置信下限与置信上限**。

$1-\alpha$ 置信区间的本意是：设法构造一个随机区间 $[\theta_L,\theta_U]$，它能盖住未知常数 θ 的概率为 $1-\alpha$。这个区间会随着样本观察值的不同而不同，但 100 次运用这个区间估计，约有 $100(1-\alpha)$ 个区间能盖住 θ，或者说约有 $100(1-\alpha)$ 个区间含有 θ，言下之意，大约还有 100α 个区间不含有 θ。如图 5.4.1 上一条竖线表示由容量为 4 的一个样本按给定的 $\theta_L(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\theta_U(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 算得的一个区间，重复使用 100 次，得 100 个这种区间。在(a)中，100 个区间有 51 个包含真正参数 $\theta=50\ 000$，这对 50% 置信区间($\alpha=0.5$)来说是一个合理的偏离。在(b)中，100 个区间有 90 个包含真实参数 $\theta=50\ 000$，这与 90% 置信区间一致。

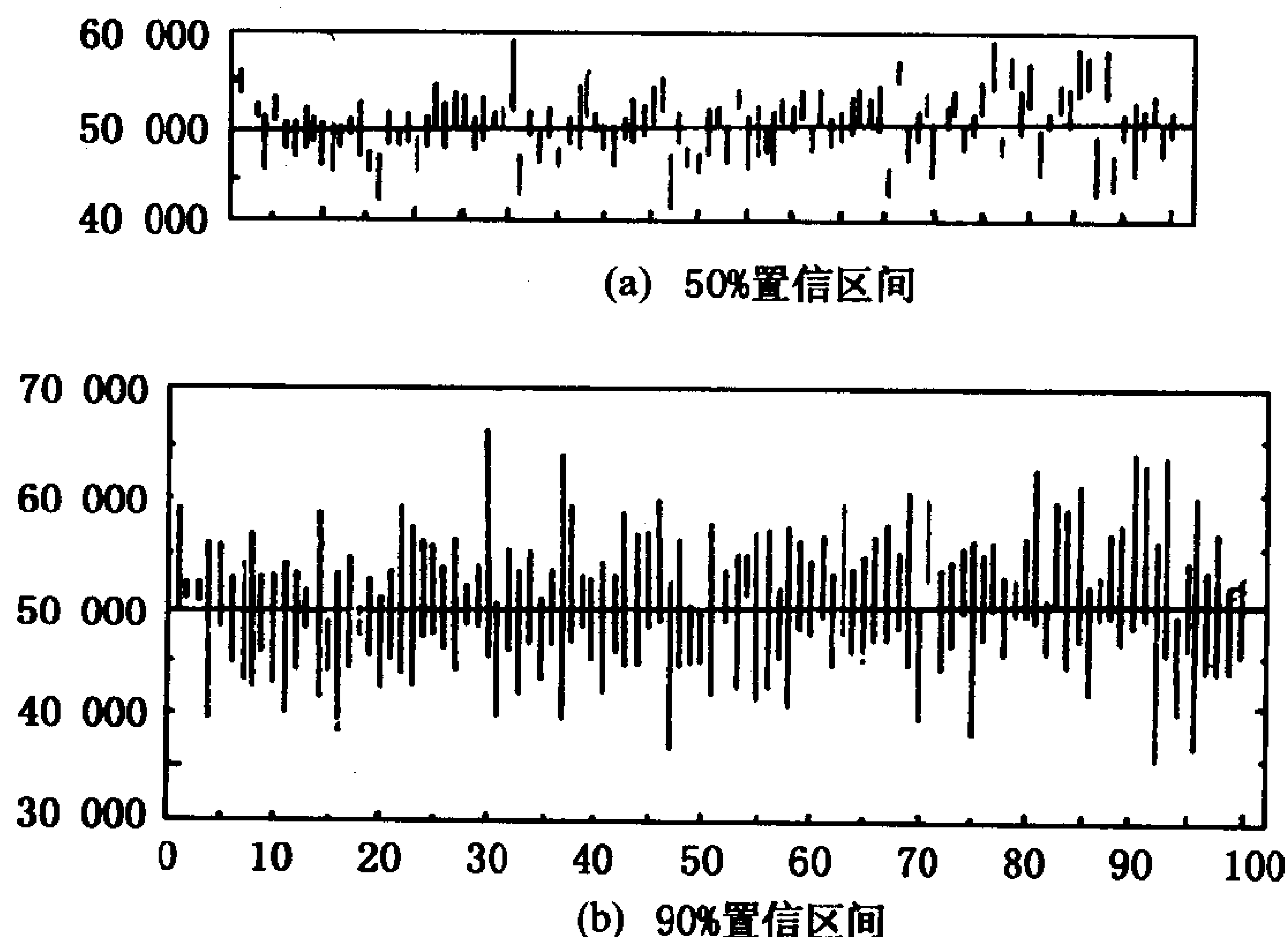


图 5.4.1 对从 $\mu=50\ 000$，$\sigma=5\ 000$ 的正态总体中随机取出 100 个容量为 4 的样本计算得到的置信区间

5.4.2 枢轴量法

构造未知参数 θ 的置信区间的一个常用方法是枢轴量法，它的具体步骤是：

(1) 从 θ 的一个点估计 $\hat{\theta}$ 出发，构造 $\hat{\theta}$ 与 θ 的一个函数 $G(\hat{\theta},\theta)$，使得 G 的分布（在大样本场合，可以是 G 的渐近分布）是已知的，而且与 θ 无关。通常称这种函数 $G(\hat{\theta},\theta)$ 为**枢轴量**。

(2) 适当选取两个常数 c 与 d，使对给定的 α 有

$$P(c \leqslant G(\hat{\theta},\theta) \leqslant d) \geqslant 1-\alpha \tag{5.4.2}$$

这里的概率大于等于号是专门为离散分布而设置的，当 $G(\hat{\theta},\theta)$ 的分布是连续分布时，应选 c 与 d 使(5.4.2)式中的等号成立，这样就能充足地使用置信水平 $1-\alpha$。

(3) 利用不等式运算，将不等式 $c \leqslant G(\hat{\theta},\theta) \leqslant d$ 进行等价变形，使得最后能得到形如 $\theta_L \leqslant \theta \leqslant \theta_U$ 的不等式。若这一切可能，则 $[\theta_L,\theta_U]$ 就是 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间。因为这时有

$$P(\theta_L \leqslant \theta \leqslant \theta_U) = P(c \leqslant G(\hat{\theta},\theta) \leqslant d) \geqslant 1-\alpha$$

上述三步中，关键是第一步，构造枢轴量 $G(\hat{\theta},\theta)$。为了使后面两步可行，G 的分布不能含有未知参数。譬如标准正态分布 $N(0,1)$、χ^2 分布等都不含未知参数。因此在构造枢轴量时，首先要尽量使其分布为上述一些分布。第二步是如何确定 c 与 d。在 G 的分布为单峰时常用如下两种方法确定：

第一种，当 G 的分布为对称时（如标准正态分布），可取 d，使得

$$P(-d \leqslant G \leqslant d) = P(|G| \leqslant d) = 1-\alpha \tag{5.4.3}$$

这时 $c=-d$，d 为 G 的分布的 $1-\alpha/2$ 分位数（见图 5.4.2(a)）。

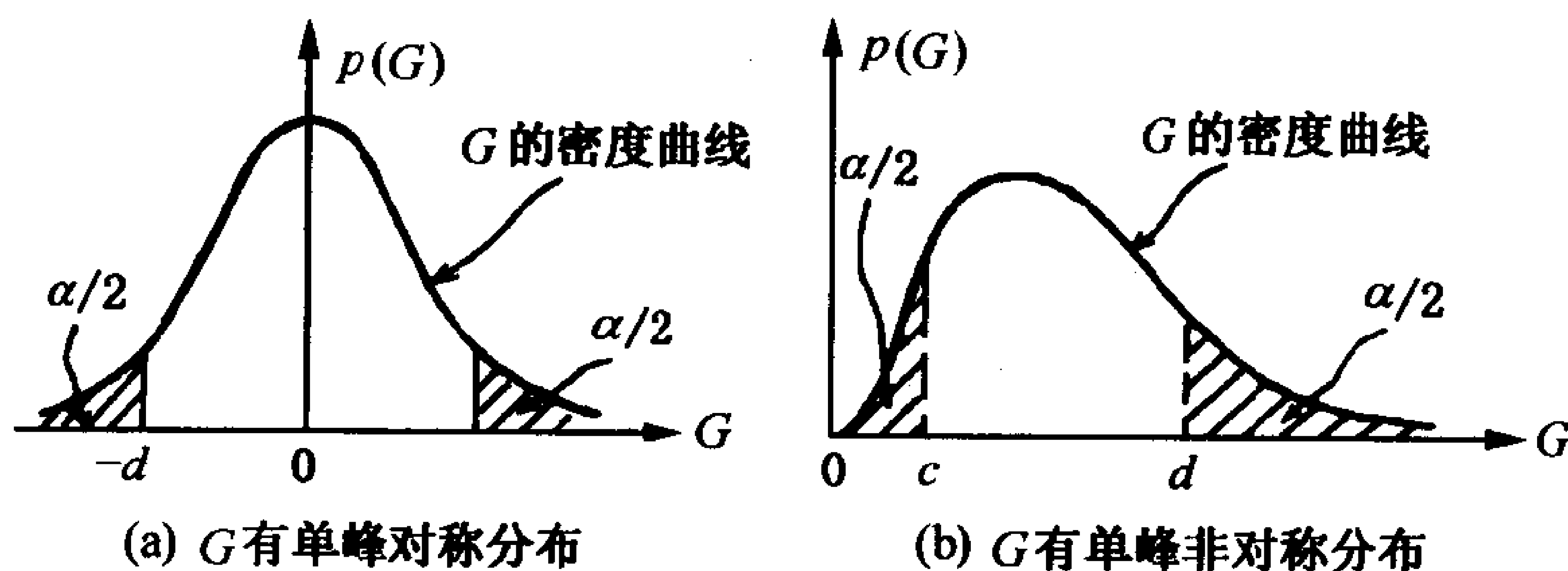


图 5.4.2 枢轴量 G 的区间 $[c,d]$ 的确定

第二种，当 G 的分布为非对称时（如 χ^2 分布），可这样选取 c 与 d，使得

$$P(G<c)=\alpha/2,\quad P(G\leqslant d)=1-\alpha/2 \tag{5.4.4}$$

即取 c 为 G 的分布的 $\alpha/2$ 分位数，d 为 G 的分布的 $1-\alpha/2$ 分位数（见图 5.4.2(b)）。

这样得到的置信区间称为**等尾置信区间**。

例 5.4.1 设一个物体的重量 μ 未知，为估计其重量可用天平去称量。由于称量是有误差的，因而所得称量结果是一个随机变量，通常服从正态分布，当天平称量的误差标准差为 0.1 克时，可认为称量结果服从 $N(\mu,0.1^2)$。现对该物体称了五次，结果如下（单位：克）：

5.52　5.48　5.64　5.51　5.45

可将其看成来自该总体的一个容量为 5 的样本的观测值。试对 μ 作置信水平为 0.95 的区间估计。

解：(1) 由于 μ 是总体的均值，通常用 $\overline{X}$ 去估计它。在正态总体场合，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，这里 $n=5,\sigma=0.1$ 均为已知。从而

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \tag{5.4.5}$$

由于 U 是 $\overline{X}$ 与未知参数 μ 的函数，其分布为 $N(0,1)$，它不含任何未知参数，故可将 U 作为枢轴量。

(2) 由于 $N(0,1)$ 是对称的连续分布，故可取 $c=-d$，对给定的 α，要求

$$P(-d\leqslant U\leqslant d)=P(|U|\leqslant d)=1-\alpha$$

由标准正态分布知可取其 $1-\dfrac{\alpha}{2}$ 分位数 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 作为 d。

(3) 从 $|U|\leqslant d$，即 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 可解得

$$P\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

从而 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \tag{5.4.6}$$

(4) 在本例中 $n=5,\sigma=0.1$，在 $\alpha=0.05$ 时，$u_{0.975}=1.96$，由样本求得 $\bar{x}=5.52$，将它们代入(5.4.6)式可得 μ 的置信水平为 0.95 的一个具体的区间：[5.432,5.608]。

5.4.3 正态均值 μ 的置信区间（σ 已知）

正态均值 μ 的置信区间要分两种情况来讨论：σ 已知与未知。σ 未知的情况在下一小段讨论。

σ 已知的场合已在例 5.4.1 中作了讨论，在那里我们用枢轴量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

给出 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

此种关于 $\overline{X}$ 对称的置信区间也可记作

$$\overline{X} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.4.7}$$

其中 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma(\overline{X})$ 是 $\overline{X}$ 的标准差，也称其为标准误。这样一来，在 σ 已知场合，正态均值 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间是以样本均值 $\overline{X}$ 为中心，标准误 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 的 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 倍为半径的区间，这里 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 是标准正态分布的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数。

关于总体均值 μ 的置信区间还有两个问题值得讨论。

第一，当总体不是正态分布而总体标准差已知，那么在大样本场合（$n \geqslant 30$），总体均值 μ 的置信区间仍可用（5.4.7）求得，这是因为在大样本场合，样本均值 $\overline{X}$ 的渐近分布为 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$，从而 $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 近似服从标准正态分布。

例 5.4.2 对 50 名大学生的午餐费进行调查，得样本均值为 3.10 元，假如总体的标准差为 1.75 元，试求总体均值（即该校大学生的平均午餐费）μ 的 0.95 的置信区间。

解：由于样本容量较大，因而可用（5.4.7）式求 μ 的置信区间。这里 $n=50$，$\sigma = 1.75$，$\bar{x} = 3.10$，在 $\alpha = 0.05$ 时，$u_{0.975} = 1.96$，故 μ 的 0.95 的置信区间为

$$\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.10 \pm 1.96 \times \frac{1.75}{\sqrt{50}} = 3.10 \pm 0.49 = [2.61, 3.59]$$

第二，样本量 n 的确定。

对给定的置信水平，置信区间的长度越短，则估计的精度就越高。

在上面两个例子中，对给定的置信水平 $1-\alpha$，μ 的置信区间（5.4.7）的长

度为

$$L = 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.4.8}$$

它不随样本观察值而变化。在 $\alpha = 0.05$ 时，$L = 3.92\sigma/\sqrt{n}$。在对称分布场合，用这种方法求得的置信区间是最短的。其实 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间可以有许多。譬如从 $P(u_{0.04} \leqslant U \leqslant u_{0.99}) = 0.95$ 可得置信水平为0.95的置信区间为$[\overline{X} - u_{0.99}\sigma/\sqrt{n}, \overline{X} - u_{0.04}\sigma/\sqrt{n}]$，此时置信区间的长度为：

$$L' = (u_{0.99} - u_{0.04})\sigma/\sqrt{n} = (2.33 + 1.75)\sigma/\sqrt{n} = 4.08\sigma/\sqrt{n} > L$$

图5.4.3给出了对称分布下 c、d 的两种不同取法对应的区间长度，从图中可见，当 $c = -d$ 时区间长度最短。

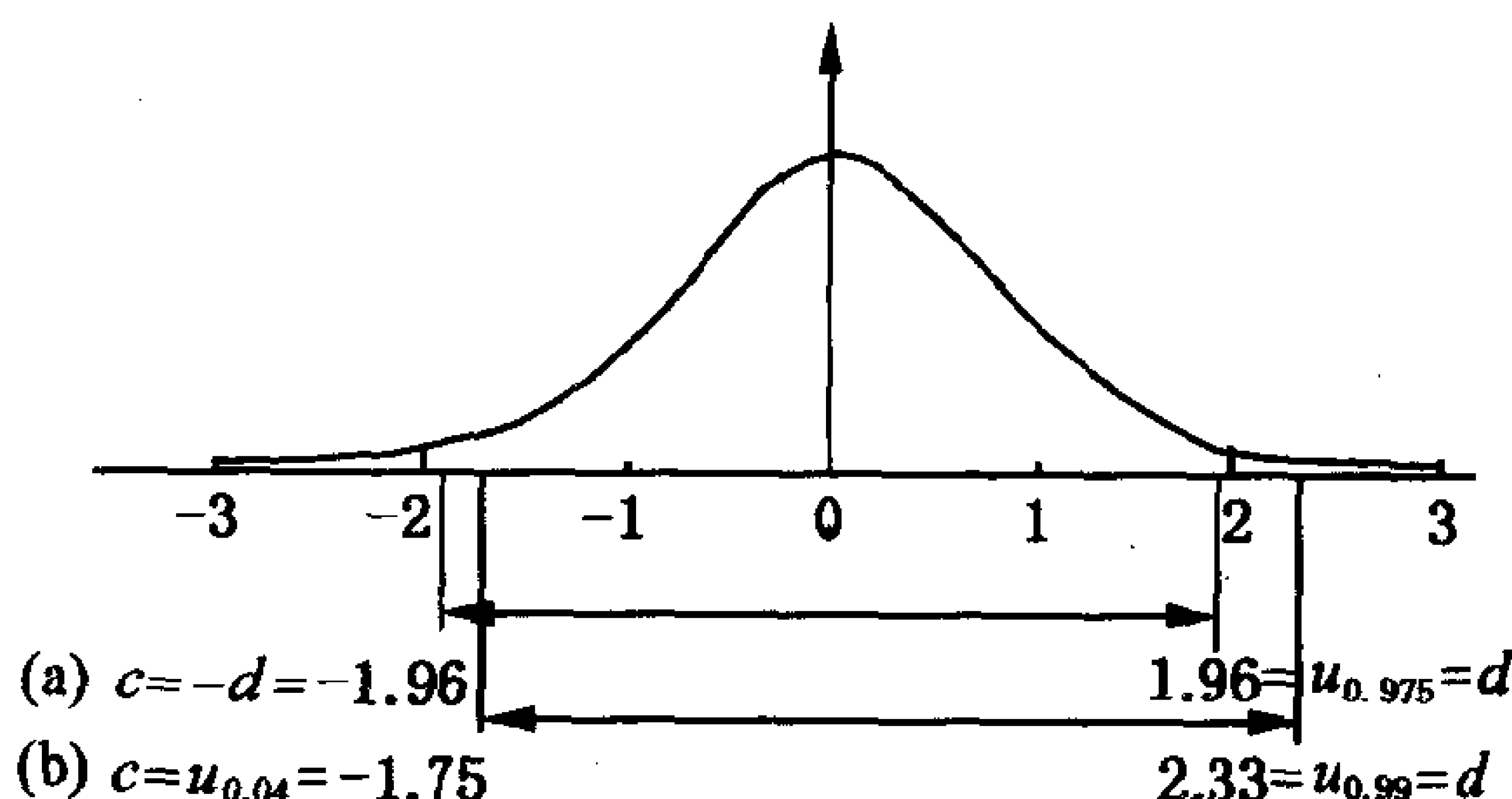


图 5.4.3　对称分布下 c、d 不同取法对应的区间长度

对给定的 α，为了提高区间估计的精度，就需要减小区间估计的平均长度。当 σ 已知时，正态总体均值 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间的长度 L 是样本容量 n 的函数，且从(5.4.8)式可知 L 是 n 的减函数，因而可以通过增加样本容量 n 来达到提高精度的目的。譬如给定精度，即给定置信区间的长度 L_0，那么 n 应满足方程

$$L_0 = 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$$

从中解出

$$n = \left(\frac{2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{L_0}\right)^2 \tag{5.4.9}$$

例 5.4.3　在例5.4.1中，为使 μ 的置信水平为0.95的置信区间长度 $L_0 = 0.1$，求样本容量 n。

解：由于现在 $\alpha = 0.05$，故 $u_{0.975} = 1.96$，又 $\sigma = 0.1$，又要求 $L_0 = 0.1$，故

由(5.4.9)求得

$$n=\left(\frac{2\times1.96\times0.1}{0.1}\right)^2=15.3664\approx16$$

即如果我们用该天平称这一物体16次，则求得的μ的置信水平为0.95的置信区间长度不会超过0.1。

5.4.4 正态均值μ的置信区间(σ未知)

在σ未知时，(5.4.5)表示的U不能用来构造μ的置信区间，因为此时它还含有未知参数σ。一个自然的想法是用样本标准差S去估计总体标准差σ，此时$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$就不再服从$N(0,1)$分布，而涉及$t$分布。下面先介绍一下$t$分布。

5.4.4.1 t分布

定义 5.4.2 如果$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且X与Y独立，则

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

的分布称为**自由度为n的t分布**，记为$t(n)$。

t分布是统计中常用的概率分布之一，它仅含一个未知参数n，这个参数n称为**自由度**。自由度为n的t分布的密度函数有如下形式：

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\qquad -\infty<x<\infty$$

其图象见图5.4.4。

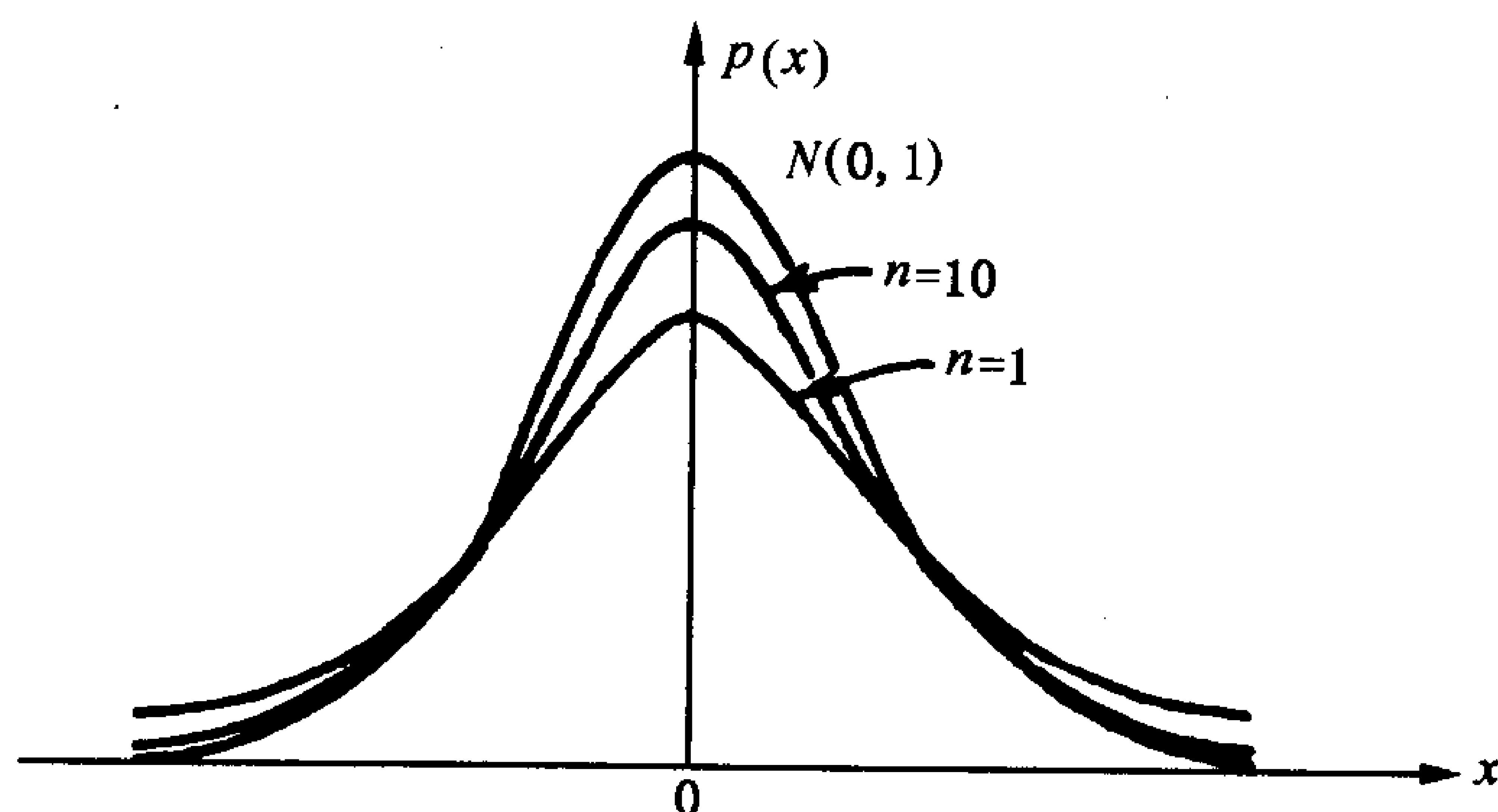


图5.4.4 几个t分布的密度函数与标准正态密度函数

从图 5.4.4 可见，$t(n)$ 的密度函数是偶函数，它是关于纵轴对称的单峰函数，形状与标准正态分布相似，但峰比 $N(0,1)$ 的峰低一些，两侧尾部厚一些，这表明 t 分布的取值的分散程度要比 $N(0,1)$ 大一些。随着自由度 n 的增大，t 分布与 $N(0,1)$ 之间的差别就越来越小，从图 5.4.4 可见，自由度为 10 的 t 分布已很接近 $N(0,1)$ 了。自由度为 1 的 t 分布的密度函数

$$p_1(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad,\quad -\infty<x<\infty$$

这便是柯西分布，其数学期望与方差均不存在。

自由度为 n 的 t 分布的 p 分位数记为 $t_p(n)$，附表 4 便是 t 分布的单侧分位数表。

5.4.4.2 σ 未知场合，正态均值 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间

前面已提到在 σ 未知场合，拟采用枢轴量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \tag{5.4.10}$$

为此要给出 t 的分布。

定理 5.4.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$、S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布。

证：由第四章 §4.2 知：$\overline{X}$ 与 S^2 独立，且

(1) $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，即 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim \chi^2(n-1)$

那么由定义 5.4.2 知

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

有了上述定理，便可由枢轴量(5.4.10)及 t 分布的分位数来求 μ 的 $1-\alpha$ 的置信区间了。由于 t 分布是对称的，故求等尾的置信区间，由

$$P(|t|\leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$$

可得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的等尾的置信区间(见图 5.4.5)为

$$\overline{X}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{5.4.11}$$

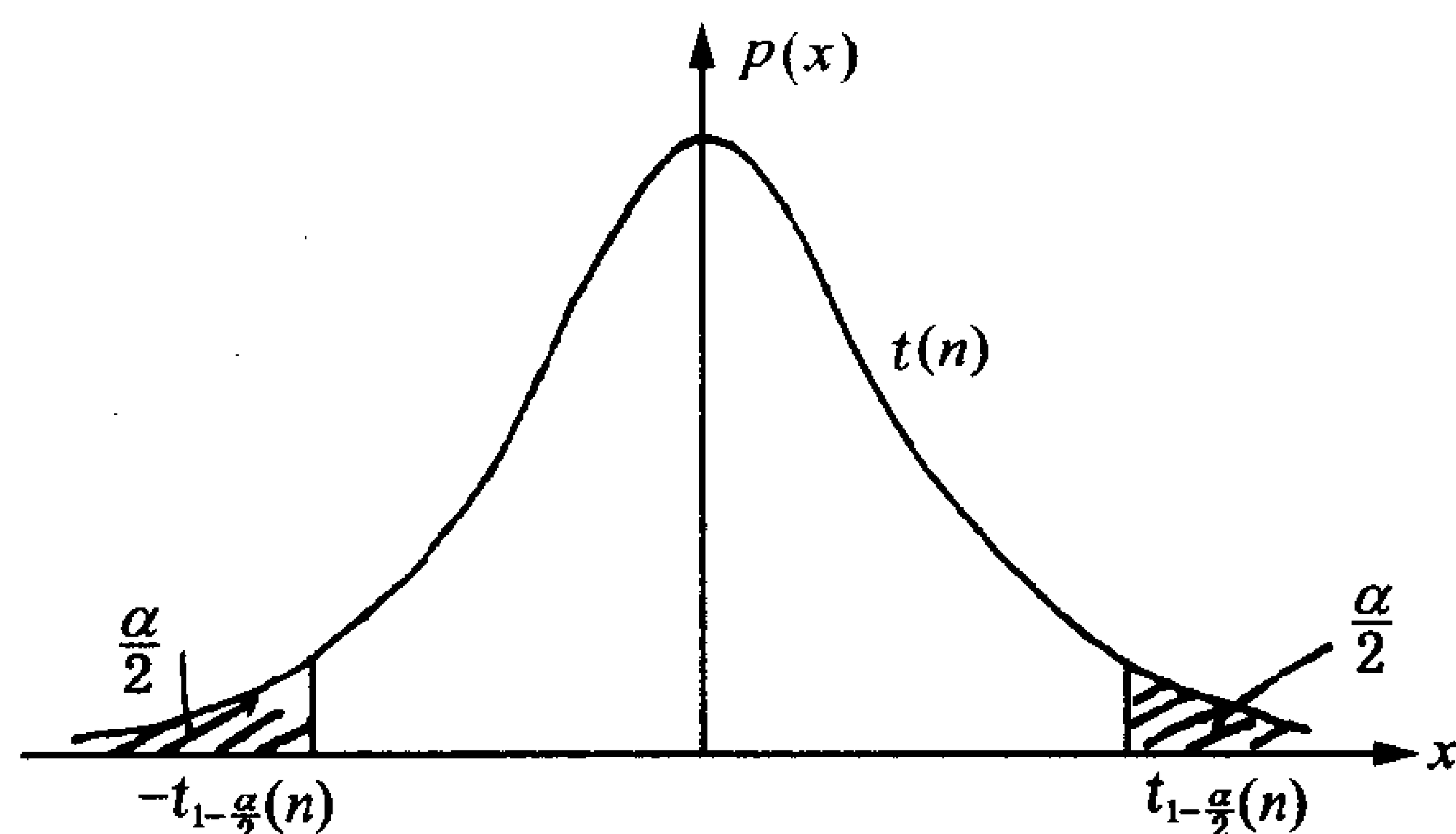


图 5.4.5　t 分布的分位数

当 n 较大时，譬如 $n > 30$，t 分布可用 $N(0,1)$ 代替，t 分布的分位数可用 $N(0,1)$ 的分位数代替，这时 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\overline{X} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{5.4.12}$$

例 5.4.4　某行业职工的月收入服从 $N(\mu,\sigma^2)$，现随机抽取 30 名职工进行调查，求得他们的月收入的平均值 $\bar{x} = 696.20$ 元，标准差 $s = 136.10$ 元，试求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：由于 σ 未知，故用(5.4.11)式来求 μ 的置信区间。现在 $n = 30$，在 $\alpha = 0.05$ 时查附表 4 得 $t_{0.975}(29) = 2.0452$，又 $\bar{x} = 696.20$，$s = 136.10$，将它们代入(5.4.11)得：

$$696.20 \pm 2.0452 \times \frac{136.10}{\sqrt{30}} = 696.20 \pm 50.82 = [645.38, 747.02]$$

故该行业职工的月平均收入在 645.38 元到 747.02 元之间。

5.4.5　正态方差 σ^2 与标准差 σ 的置信区间

设从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中获得样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，记样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，这里假定 μ 未知。

为求 σ^2 的置信区间，我们从其估计 S^2 出发，在 §4.2 已证明了

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \tag{5.4.13}$$

χ^2 中除 σ^2 外不含其它未知参数，其分布已知，且与 σ^2 无关，因而可将(5.4.13)作为枢轴量。由于 χ^2 只能取非负值，且分布不对称，因而按(5.4.4)，对给定的 α，从附表 5 的 χ^2 分布表中查得 $\frac{\alpha}{2}$ 与 $1-\frac{\alpha}{2}$ 两个分位数 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 与 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n$

$-1)$（见图 5.4.6），则有

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant \chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

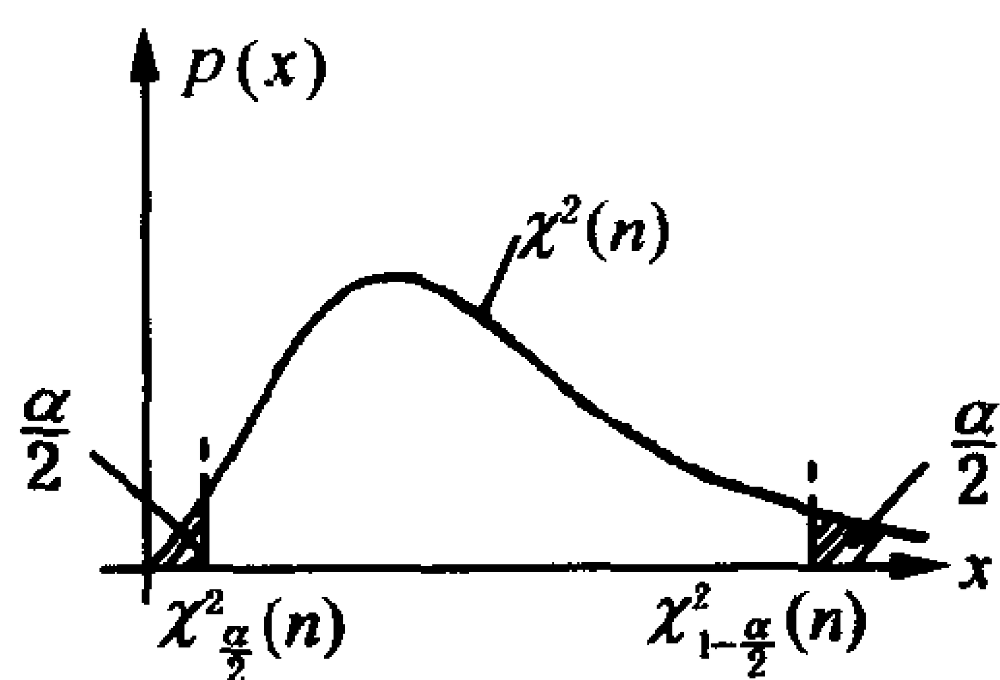


图 5.4.6　χ^2 分布的分位数

从

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \tag{5.4.14}$$

可解得 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \tag{5.4.15}$$

由于在 $(0,\infty)$ 上 σ 是 σ^2 的严格增函数，如果将(5.4.14)不等式各边均开方，则所得新事件

$$\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma} \leqslant \sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \tag{5.4.16}$$

与(5.4.14)为等价事件，即仍有

$$P\left(\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma} \leqslant \sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

故从(5.4.16)可得 σ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\quad \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right] \tag{5.4.17}$$

例 5.4.5　求例 5.4.4 中 σ 的置信水平为 0.90 的置信区间。

解：由于这里 μ 未知，因而用(5.4.17)作为 σ 的置信区间。现在 $n=30$，$\alpha=0.10$，由附表 5 查得 $\chi^2_{0.05}(29)=17.708$，$\chi^2_{0.95}(29)=42.557$，又 $s=136.10$，将它们代入(5.4.17)得 σ 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\left[\frac{\sqrt{29}\times 136.10}{\sqrt{42.557}},\quad \frac{\sqrt{29}\times 136.10}{\sqrt{17.708}}\right] = [112.35,\quad 174.17]$$

故该行业职工月平均收入的标准差在 112.35 元 ~ 174.17 元之间。

5.4.6 两个正态均值差的置信区间

设有两个独立正态总体，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，现从 X 中获得样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其样本均值为 $\overline{X}$，样本无偏方差为 S_X^2，从 Y 中获得样本 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$，其样本均值为 $\overline{Y}$，样本无偏方差为 S_Y^2，现要求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间。这是著名的 Behrens - Fisher 问题，几种特殊情况已获圆满解决，一般情况至今也只有近似解法，以下分别叙述。

(1) σ_1 与 σ_2 已知的场合。

此时可用 $\overline{X} - \overline{Y}$ 去估计 $\mu_1 - \mu_2$，由正态分布性质可知 $\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m})$，从而

$$U = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1) \qquad (5.4.18)$$

由于 U 中除 $\mu_1 - \mu_2$ 外不含其它未知参数，其分布已知，且与 $\mu_1 - \mu_2$ 无关，因而可将 U 作为枢轴量，同例 5.4.1 的推导，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间是

$$\overline{X} - \overline{Y} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \qquad (5.4.19)$$

(2) 已知 $\sigma_1 = \sigma_2$，但具体值未知的场合。

由于假定 $\sigma_1 = \sigma_2$，可将其记为 σ，那么 S_X^2 与 S_Y^2 都是同一方差 σ^2 的无偏估计，则其加权平均

$$S_W^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} \qquad (5.4.20)$$

也是 σ^2 的无偏估计。下面的定理将告诉我们如何从 S_W 构造枢轴量。

定理 5.4.2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 的一个样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 是来自正态总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ 的一个样本，且两样本独立，两个样本的均值分别记为 $\overline{X}, \overline{Y}$，两个样本的方差分别记为 S_X^2 与 S_Y^2，则

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2) \qquad (5.4.21)$$

这里 S_W^2 如(5.4.20)式所示。

证:由 §4.2 知

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \qquad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

且两者独立,由 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} = \frac{(n+m-2)S_W^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

另一方面由两样本独立性知

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\sigma^2\right)$$

即

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

再由样本均值与样本方差的独立性知 $\overline{X} - \overline{Y}$ 与 S_W^2 也相互独立,从而由定义 5.4.2 知

$$\frac{\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{(n+m-2)S_W^2}{\sigma_2}/(n+m-2)}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

这里 $S_W = \sqrt{S_W^2}$。

由于(5.4.21)的分布是自由度为 $n+m-2$ 的 t 分布,故可用此枢轴量 t,经过类似(5.4.11)的推导,得 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \qquad (5.4.22)$$

(3) 当 n 与 m 都充分大时,可以证明

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \qquad (5.4.23)$$

的渐近分布为 $N(0,1)$,从而此时 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\overline{X} - \overline{Y} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}} \qquad (5.4.24)$$

(4) 一般场合,(5.4.23) 中的枢轴量 T 已不是 $N(0,1)$,而是近似于自由

度为 l 的 t 分布，其中

$$l=\frac{\left(\frac{s_X^2}{n}+\frac{s_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{s_X^2}{n^2(n-1)}+\frac{s_Y^2}{m^2(m-1)}} \tag{5.4.25}$$

当 l 不为整数时，可取与 l 最接近的整数代替。于是在一般场合，近似地有枢轴量 $T\sim t(l)$，运用上述类似的步骤，可得 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间近似为

$$\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}} \tag{5.4.26}$$

例 5.4.6 某厂用两条流水线生产蕃茄酱小包装，现从两条流水线上各随机抽取一个样本，容量分别为 $n=6, m=7$，称重后算得（单位：克）：

$$\bar{x}=10.6,\qquad s_x^2=0.0125$$

$$\bar{y}=10.1,\qquad s_y^2=0.01$$

设两条流水线上所装蕃茄酱的重量 X 与 Y 都服从正态分布，其均值分别为 μ_X 与 μ_Y，方差分别为 σ_X^2 与 σ_Y^2，求 $\mu_X-\mu_Y$ 的置信水平为 0.90 的置信区间。

解：先设 X 与 Y 的方差相等，这时可用(5.4.22)求 $\mu_X-\mu_Y$ 的置信区间。由于 $\alpha=0.10, n+m-2=11$，由 t 分布表查得 $t_{0.95}(11)=1.7959$，又可求得：

$$\bar{x}-\bar{y}=0.5$$

$$s_W^2=\frac{5\times 0.0125+6\times 0.01}{11}=0.01114,\quad s_W=0.1055$$

将它们代入(5.4.22)得 $\mu_X-\mu_Y$ 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\begin{aligned}\bar{x}-\bar{y}\pm t_{0.95}(11)s_W\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}&=0.5\pm 1.7959\times 0.1055\times\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}\\&=0.5\pm 0.1054=[0.3946, 0.6054]\end{aligned}$$

如果认为 X 与 Y 的方差不等，则应该用(5.4.26)求 $\mu_X-\mu_Y$ 的置信区间。此时

$$\frac{s_X^2}{n}+\frac{s_Y^2}{m}=\frac{0.0125}{6}+\frac{0.01}{7}=0.003512$$

$$l=\frac{0.003512^2}{\frac{0.0125^2}{6^2\times 5}+\frac{0.01^2}{7^2\times 6}}=10.21\approx 10$$

由 $\alpha=0.10$，查得 $t_{0.95}(10)=1.8125$，故

$$t_{0.95}(10)\sqrt{\frac{s_X^2}{n}+\frac{s_Y^2}{m}}=1.8125\times\sqrt{0.003512}=0.1074$$

代入(5.4.26)则得 $\mu_X-\mu_Y$ 的置信水平为 0.90 的置信区间是：

$$0.5\pm0.1074=[0.3926,0.6074]$$

两种方法求得的区间略有差异。

5.4.7 两个正态方差比的置信区间

在上一小段的假定下，寻求两个正态方差比的置信区间将涉及到 F 分布，下面先对 F 分布作一介绍。

(1)F 分布。

定义 5.4.3 如果 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 独立，则

$$F=\frac{X/n}{Y/m}$$

的分布称为**自由度是 n 与 m 的 F 分布**，记为 $F(n,m)$。

F 分布是统计中常用的概率分布之一，它仅在$(0,\infty)$上取值。F 分布的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\quad n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}(nx+m)^{-\frac{n+m}{2}}\quad,\quad x>0$$

其图象见图 5.4.7。

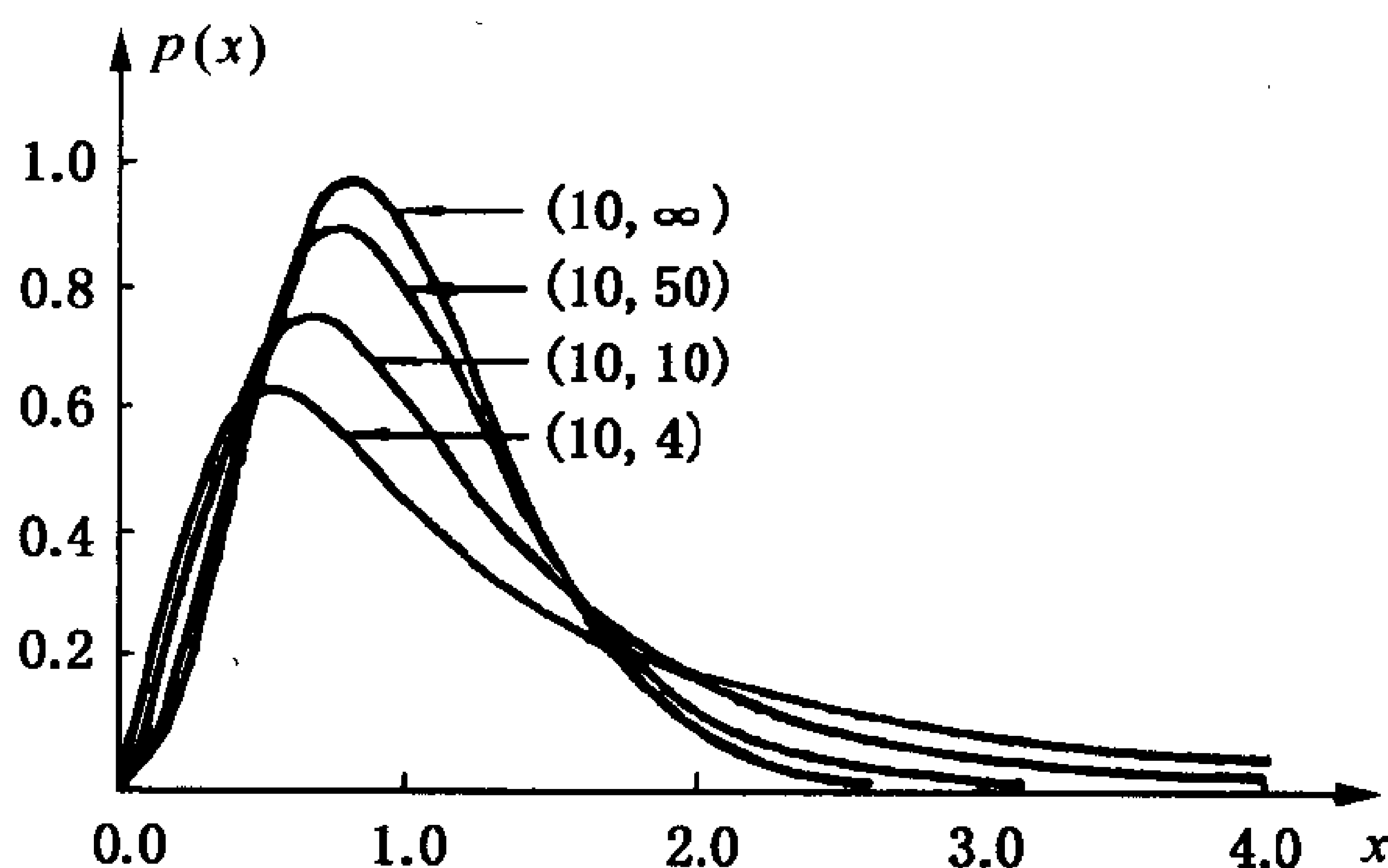


图 5.4.7 几种 F 分布密度曲线

F 分布含两个参数：分子的自由度 n，分母的自由度 m。从图 5.4.7 可见 F

分布是一种偏态分布。

自由度为 n,m 的 F 分布的 p 分位数记为 $F_p(n,m)$，附表 6 中给出了 $p=0.50,0.90,0.95,0.975,0.99,0.995,0.999$ 共七个值的分位数。那么当 $p<0.50$ 时分位数该怎么求呢？这要用到下面一个性质：

$$F_p(n,m)=\frac{1}{F_{1-p}(m,n)} \tag{5.4.27}$$

这是因为当 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 独立时，有

$$F=\frac{X/n}{Y/m}\sim F(n,m)$$

$$\frac{1}{F}=\frac{Y/m}{X/n}\sim F(m,n)$$

如果 $F_p(n,m)$ 是 F 的 p 分位数，则由分位数性质可知：

$$P(F<F_p(n,m))=p$$

即

$$P\left(\frac{1}{F}>\frac{1}{F_p(n,m))}\right)=p$$

从而

$$P\left(\frac{1}{F}\leqslant\frac{1}{F_p(n,m))}\right)=1-p$$

这表明 $\frac{1}{F_p(n,m)}$ 是 $\frac{1}{F}$ 的 $1-p$ 分位数，即

$$\frac{1}{F_p(n,m)}=F_{1-p}(m,n)$$

故有(5.4.27)式。

(2) 两个正态方差比的置信区间。

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是来自正态总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两个样本独立，为求 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间，很自然想到用它们的估计之比作枢轴量，设 S_X^2 与 S_Y^2 分别为两个样本的方差，记

$$F=\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_1^2} \tag{5.4.28}$$

为要使 F 能作为枢轴量，就需要知道其分布。对此有下面的定理。

定理 5.4.3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的一个样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一个样本，且两样本独立，两样本的方差分别记为 S_X^2 与 S_Y^2，则

$$F = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

证：由 §4.2 知

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

由两样本的独立性知 S_X^2 与 S_Y^2 独立，再由 F 分布的定义知

$$\frac{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2}/(n-1)}{\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}(m-1)} = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

有了(5.4.28)中的 $F \sim F(n-1, m-1)$，就可以把 F 看作枢轴量，由此可获得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 $1-\alpha$ 的等尾置信区间：

$$\left[\frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)}, \quad \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)}\right] \quad (5.4.29)$$

类似(5.4.27)的导出，还可得正态总体标准差之比 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{S_X}{S_Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)}}, \quad \frac{S_X}{S_Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)}}\right] \quad (5.4.30)$$

例 5.4.7 求例 5.4.6 中 σ_X/σ_Y 的置信水平为 0.90 的置信区间。

解：在 $\alpha = 0.10, n = 6, m = 7$ 时，查 F 分布表得

$$F_{0.95}(5, 6) = 4.39$$

由(5.4.27)又得

$$F_{0.05}(5, 6) = \frac{1}{F_{0.95}(6, 5)} = \frac{1}{4.95}$$

将 $s_X^2 = 0.0125, s_Y^2 = 0.01$ 及上述分位数都代入(5.4.30)式，得 σ_X/σ_Y 的置信水平为 0.90 的置信区间是

$$\left[\frac{\sqrt{0.0125}}{\sqrt{0.01}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4.39}}, \quad \frac{\sqrt{0.0125}}{\sqrt{0.01}} \cdot \sqrt{4.95}\right] = [0.5336, 2.4875]$$

这表明两条蕃茄酱小包装流水线包装重量的标准差之比在 0.5336 ～ 2.4875 之间。

§5.5　单侧置信限

5.5.1　单侧置信限的概念

在一些实际问题中，我们往往关心某些未知参数的上限或下限。例如对某种合金钢的强度来讲，人们总希望其强度越大越好，这时强度的"下限"是一个很重要的指标，而对某种药物的毒性来讲，人们总希望其毒性越小越好，这时药物毒性的"上限"便成了一个重要的指标。这些问题都可以归结为寻求未知参数的单侧置信限问题。

定义 5.5.1　设 θ 是总体的某一未知参数，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，由来自该总体的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的统计量 $\theta_L=\theta_L(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，满足

$$P(\theta\geqslant\theta_L)\geqslant 1-\alpha \tag{5.5.1}$$

则称 θ_L 为置信水平是 $1-\alpha$ 的**单侧置信下限**，简称 $1-\alpha$ 置信下限，又若由样本确定的统计量 $\theta_U=\theta_U(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，满足

$$P(\theta\leqslant\theta_U)\geqslant 1-\alpha \tag{5.5.2}$$

则称 θ_U 为置信水平是 $1-\alpha$ 的**单侧置信上限**，简称 $1-\alpha$ 置信上限。

所有用来求置信区间的枢轴量都可以用来求单侧置信限，下面举两个例子说明。

例 5.5.1　为研究某种汽车轮胎的磨损特性，随机取 16 只轮胎实际使用。记录其用到磨坏时所行驶路程(单位：公里)，算得 $\bar{x}=41\ 116$，$s=6\ 346$。若设此样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，如今在 σ^2 未知情况下，要求该种轮胎平均行驶路程 μ 的 0.95 置信下限。

解：由于该正态总体中 σ^2 未知，因而用 §5.4 中(5.4.10)式作枢轴量，此时 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$。

由 t 分布知，对给定的 α，可找到 $t_{1-\alpha}(n-1)$，使得

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\leqslant t_{1-\alpha}(n-1)\right)=1-\alpha$$

由此可推得

$$\mu \geqslant \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$$

故 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限是

$$\mu_L = \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$$

在本例中,$n=16$,$\alpha=0.05$ 时查得 $t_{0.95}(15)=1.7531$,再将 $\bar{x}$ 及 s 的值代入,得 μ 的置信水平为 0.95 的置信下限是 38 334 公里。

例 5.5.2 用仪器间接测量炉子的温度,其测量值服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知,这里我们关心的是 σ 的上限。现用该仪器重复测 5 次,结果为(℃):

1250　1265　1245　1260　1275

试求 σ 的置信水平为 0.95 的置信上限。

解:由于 μ 未知,故采取 §5.4 中(5.4.13)式作为枢轴量,此时 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$。

由于要求 σ_u,使 $P(\sigma \leqslant \sigma_U) \geqslant 1-\alpha$,这等价于要求 $P(\sigma^2 \leqslant \sigma_U^2) \geqslant 1-\alpha$,亦即要求

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geqslant c\right) = 1-\alpha$$

由 χ^2 分布知,$c=\chi_\alpha^2(n-1)$,从而 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信上限

$$\sigma_U^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}$$

而 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信上限为

$$\sigma_U = \frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi_\alpha^2(n-1)}}$$

在本例中,$n=5$,$\alpha=0.05$ 时,$\chi_{0.05}^2(4)=0.711$,由样本可求得 $s=11.9$,将它们一起代入,得 σ 的置信水平为 0.95 的置信上限为 28.2。

下面我们将介绍构造单侧置信限的一般方法,并按分布函数为连续函数与阶梯函数分别讨论。

5.5.2 基于连续分布函数构造置信限

设 $F(x;\theta)$ 是连续随机变量 X 的分布函数,其中 θ 是所含未知参数,则有 $F(X;\theta) \sim U(0,1)$,特别对区间(0,1)中任一实数 r,有

$$P(F(X;\theta) \leqslant r) = r \quad , \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

下面我们利用这一性质来构造 θ 的置信限。

设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ 是 θ 的一个估计(如极大似然估计，矩法估计等)，又设 $G(y;\theta)$ 是 $\hat{\theta}$ 的分布函数。由于总体分布是连续的，故 $\hat{\theta}$ 的分布函数也是连续的，且 $G(\hat{\theta};\theta) \sim U(0,1)$，那么对介于 0 与 1 之间的任意实数 r，有

$$P(G(\hat{\theta};\theta) \leqslant r) = r \tag{5.5.3}$$

现假定 $G(\hat{\theta};\theta)$ 是 θ 的严减函数，为求 θ 的 $1-\alpha$ 的单侧置信下限，可令(5.5.3)中 $r = 1-\alpha$，则从方程

$$G(\hat{\theta};\theta) = 1-\alpha$$

中解出 $\theta = \theta_L(\boldsymbol{X})$，从而事件"$G(\hat{\theta};\theta) \leqslant 1-\alpha$"等价于事件"$\theta \geqslant \theta_L(\boldsymbol{X})$"，即

$$P(\theta \geqslant \theta_L(\boldsymbol{X}) = 1-\alpha$$

这表明 $\theta_L(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限(见图 5.5.1)。为求 θ 的 $1-\alpha$ 的单侧置信上限，可令(5.5.3)中 $r = \alpha$，则从方程

$$G(\hat{\theta};\theta) = \alpha$$

中解出 $\theta = \theta_U(\boldsymbol{X})$，从而事件"$G(\hat{\theta};\theta) \leqslant \alpha$"等价于事件"$\theta \geqslant \theta_U(\boldsymbol{X})$"，即

$$P(\theta < \theta_U(\boldsymbol{X})) = 1-\alpha$$

这表明 $\theta_U(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限(见图 5.5.2)。

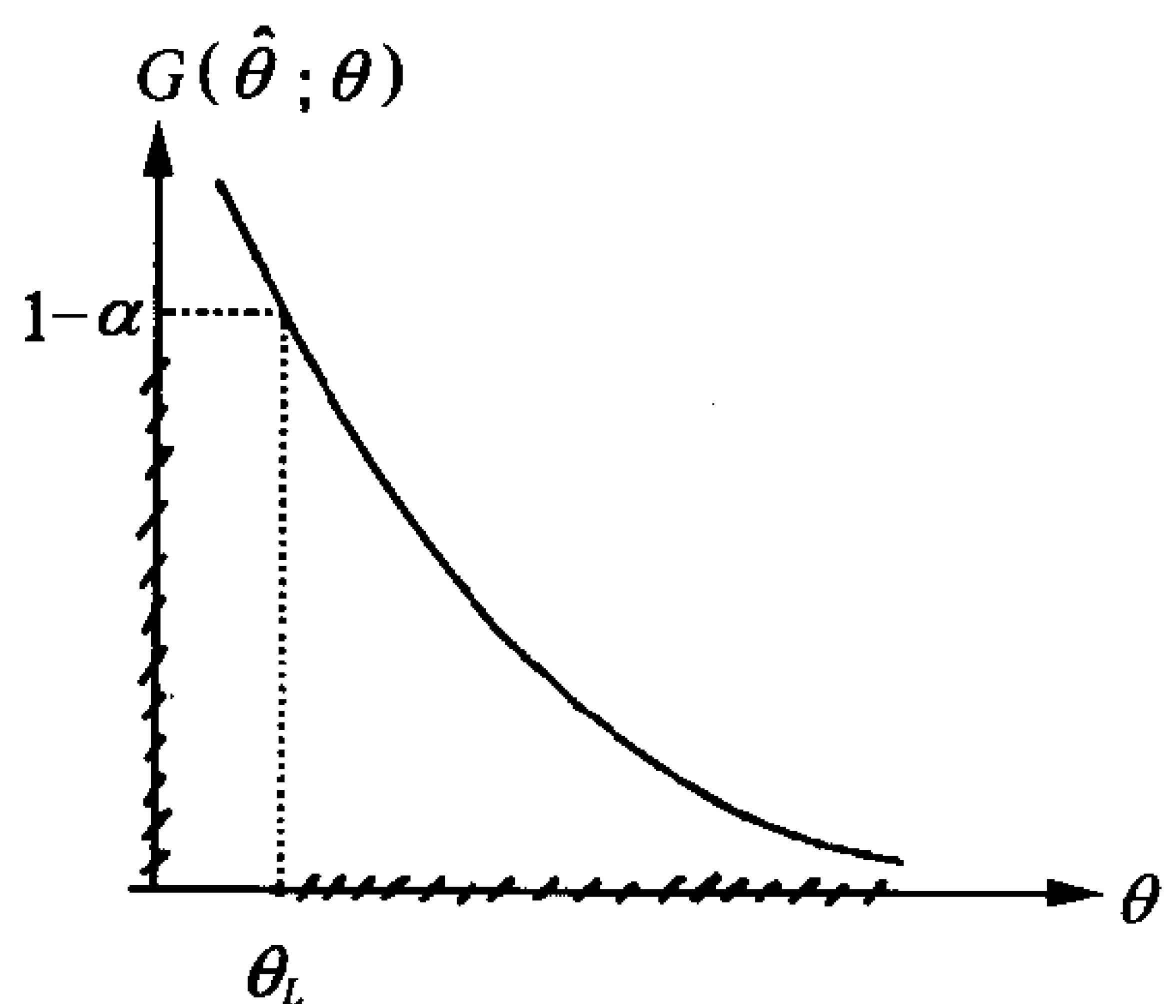


图 5.5.1　$G(\hat{\theta};\theta)$ 是 θ 的单调降函数，求 θ 的 $1-\alpha$ 置信下限 θ_L

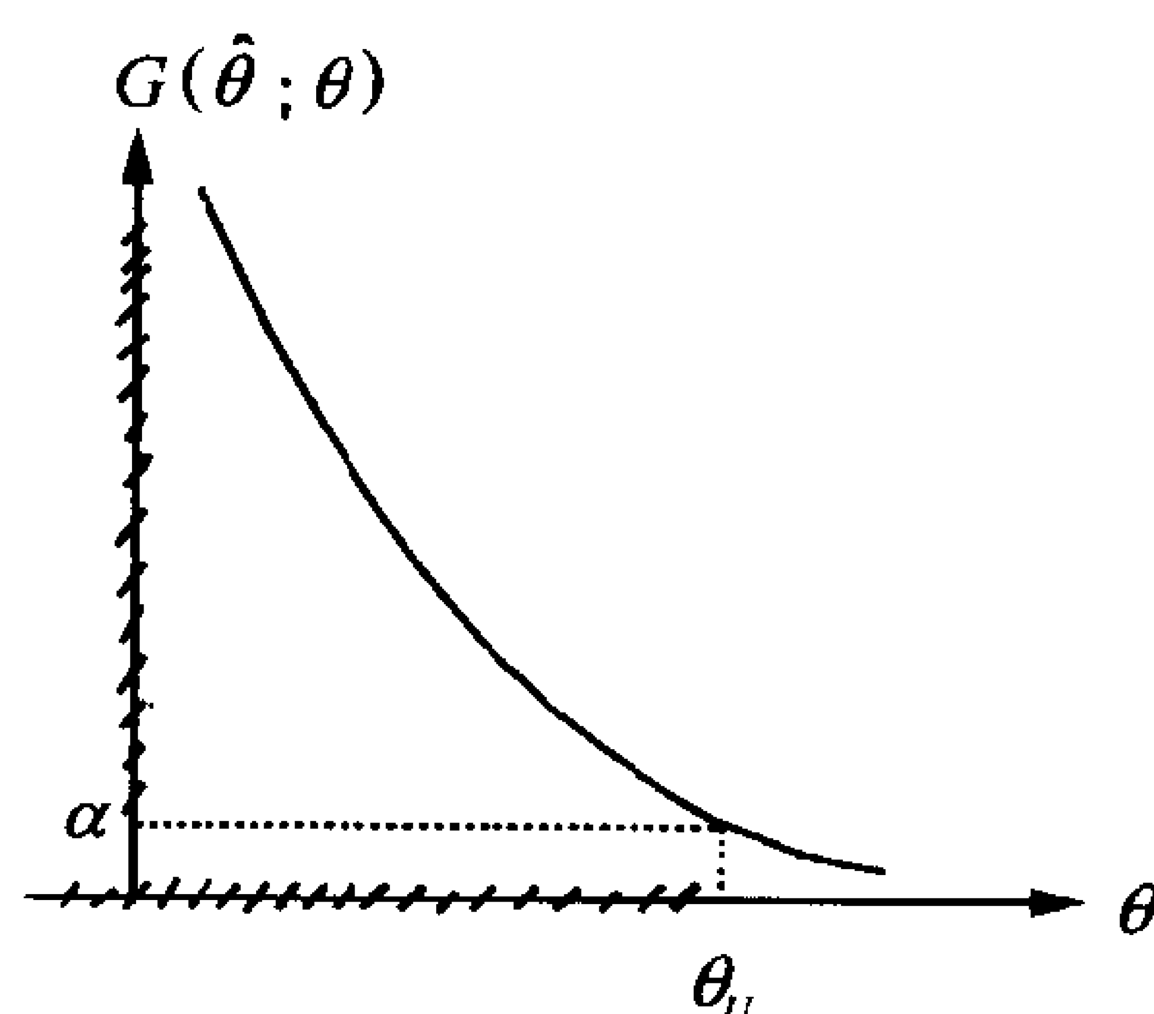


图 5.5.2　$G(\hat{\theta};\theta)$ 是 θ 的单调降函数，求 θ 的 $1-\alpha$ 置信上限 θ_U

利用这一方法也可构造 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间，这时可分别找出 $1-\frac{\alpha}{2}$ 的置信下限 θ_L 与 $1-\frac{\alpha}{2}$ 的置信上限 θ_U，使

$$P(\theta \geqslant \theta_L) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

$$P(\theta \geqslant \theta_U) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

从而

$$P(\theta_L \leqslant \theta \leqslant \theta_U) = 1 - \alpha$$

即$[\theta_L, \theta_U]$是θ的$1-\alpha$的置信区间(见图5.5.3)。

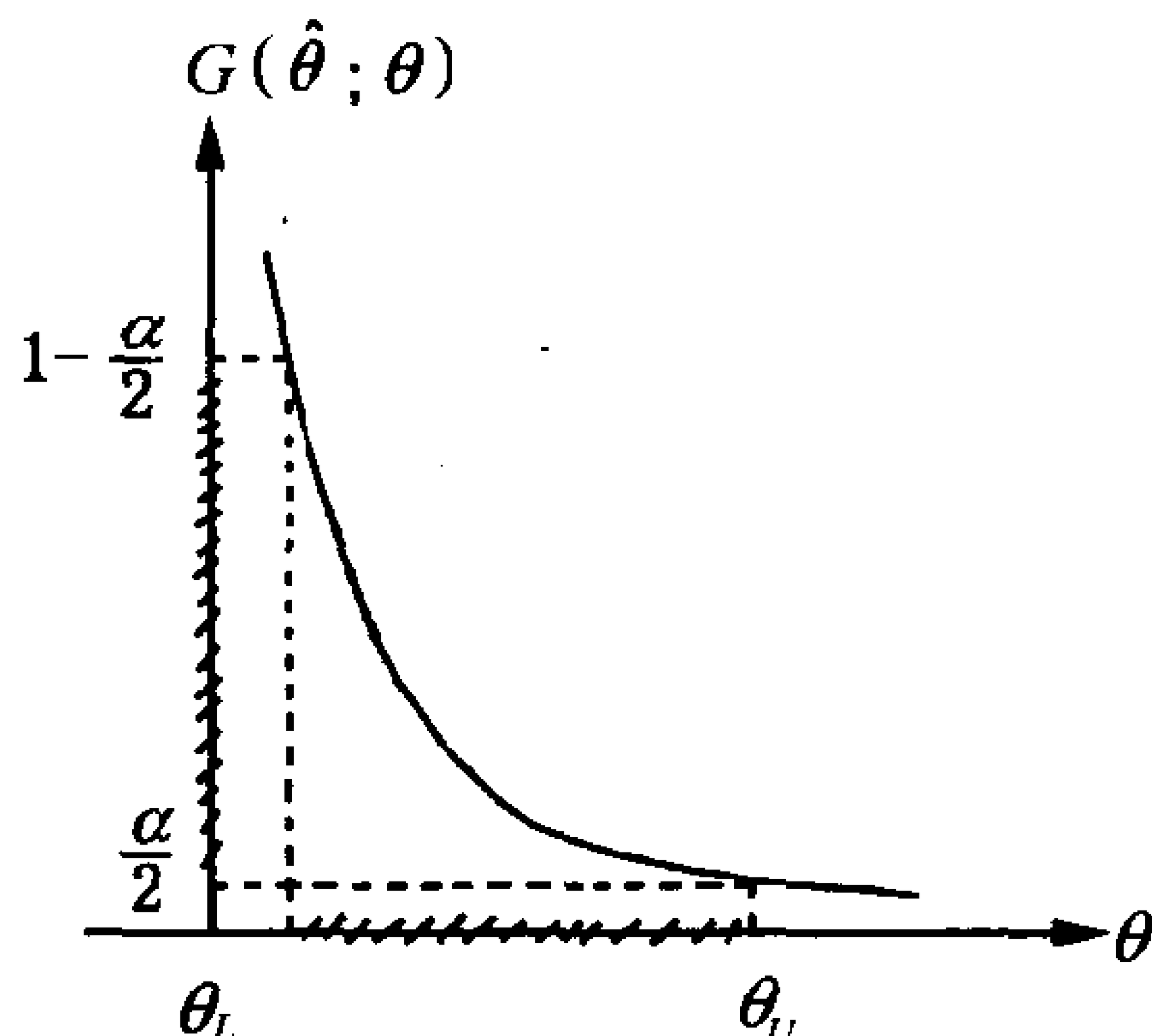


图5.5.3　$G(\hat{\theta};\theta)$是θ的单调降函数，求θ的$1-\alpha$置信区间$[\theta_L, \theta_U]$

当$G(\hat{\theta};\theta)$是θ的严增函数时，也可类似处理。

例5.5.3　设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma_0^2)$的一个样本，其中σ_0^2已知。由于$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n})$，故$\overline{X}$的分布函数为$\Phi\left(\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_0 \sqrt{n}}\right)$。此分布函数是$\overline{x}$的连续函数，又是$\mu$的严减函数，则$\mu$的$1-\alpha$置信下限$\mu_L$是下列方程的解：

$$\Phi\left(\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

若令$u_{1-\alpha}$是$N(0,1)$的$1-\alpha$分位数，则由

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = u_{1-\alpha}$$

可解得

$$\mu_L = \overline{x} - u_{1-\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

这与用枢轴量法的结果一致。

例5.5.4　设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自密度函数

$$p(x_i;\theta) = \frac{\theta}{x^2} \quad , \quad 0 < \theta \leqslant x < \infty$$

的一个样本,试求 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间。

解:(1) 先求 θ 的极大似然估计。

似然函数

$$L(\theta)=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\right)\theta^n \quad , \quad \forall x_i \geqslant \theta$$

由于 $L(\theta)$ 是 θ 的严增函数,且 $\theta \leqslant X_{(1)}$,故 θ 的极大似然估计

$$\hat{\theta}=X_{(1)}$$

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的密度函数 $g(y;\theta)$。

由 $p(x)=\frac{\theta}{x^2}, 0<\theta\leqslant x<\infty$ 知总体的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta\\ 1-\frac{\theta}{x} \quad , & x\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$,从而 $\hat{\theta}=X_{(1)}$ 的密度函数为

$$g(y;\theta)=np(y)[1-F(y)]^{n-1}=\frac{n\theta^n}{x^{n+1}} \quad , \quad 0<\theta\leqslant y<\infty$$

其分布函数

$$G(y;\theta)=1-\frac{\theta^n}{x^n} \quad , \quad 0<\theta\leqslant y<\infty$$

(3) 由于 $G(X_{(1)};\theta)=1-\frac{\theta^n}{X_{(1)}^n}$ 是 θ 的严减函数,故令

$$G(X_{(1)};\theta_L)=1-\frac{\theta_L^n}{X_{(1)}^n}=1-\alpha/2$$

与

$$G(X_{(1)};\theta_U)=1-\frac{\theta_U^n}{X_{(1)}^n}=\frac{\alpha}{2}$$

中解出 $\theta_L=\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}X_{(1)}, \theta_U=\sqrt[n]{1-\frac{\alpha}{2}}X_{(1)}$,所以 θ 的 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left[\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}X_{(1)}, \quad \sqrt[n]{1-\frac{\alpha}{2}}X_{(1)}\right]$$

5.5.3 基于阶梯分布函数构造置信限

我们知道,离散随机变量 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 是阶梯函数,对此种函数有如下性质:

定理 5.5.1 设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数,如果 $0\leqslant r\leqslant 1$,则

$$P(F(X) \leqslant r) \leqslant r \leqslant p(F(X-0)) \leqslant r)$$

其中 $F(x-0)$ 是 $F(x)$ 在 x 处的左极限(见图 5.5.4)。

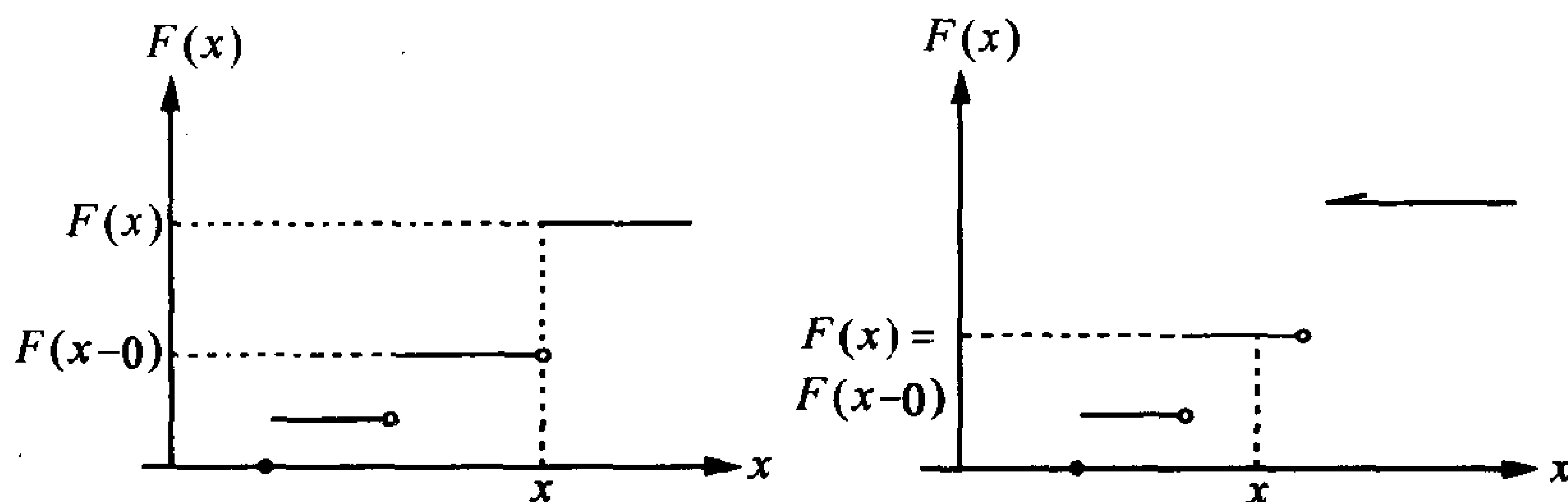


图 5.5.4　阶梯函数的左极限

这个定理的证明这里就省略了。不过要指出的是,当 $F(x)$ 为连续时等号成立,并有 $F(x) \sim U(0,1)$,因而这一定理是上节所用性质的一种推广。

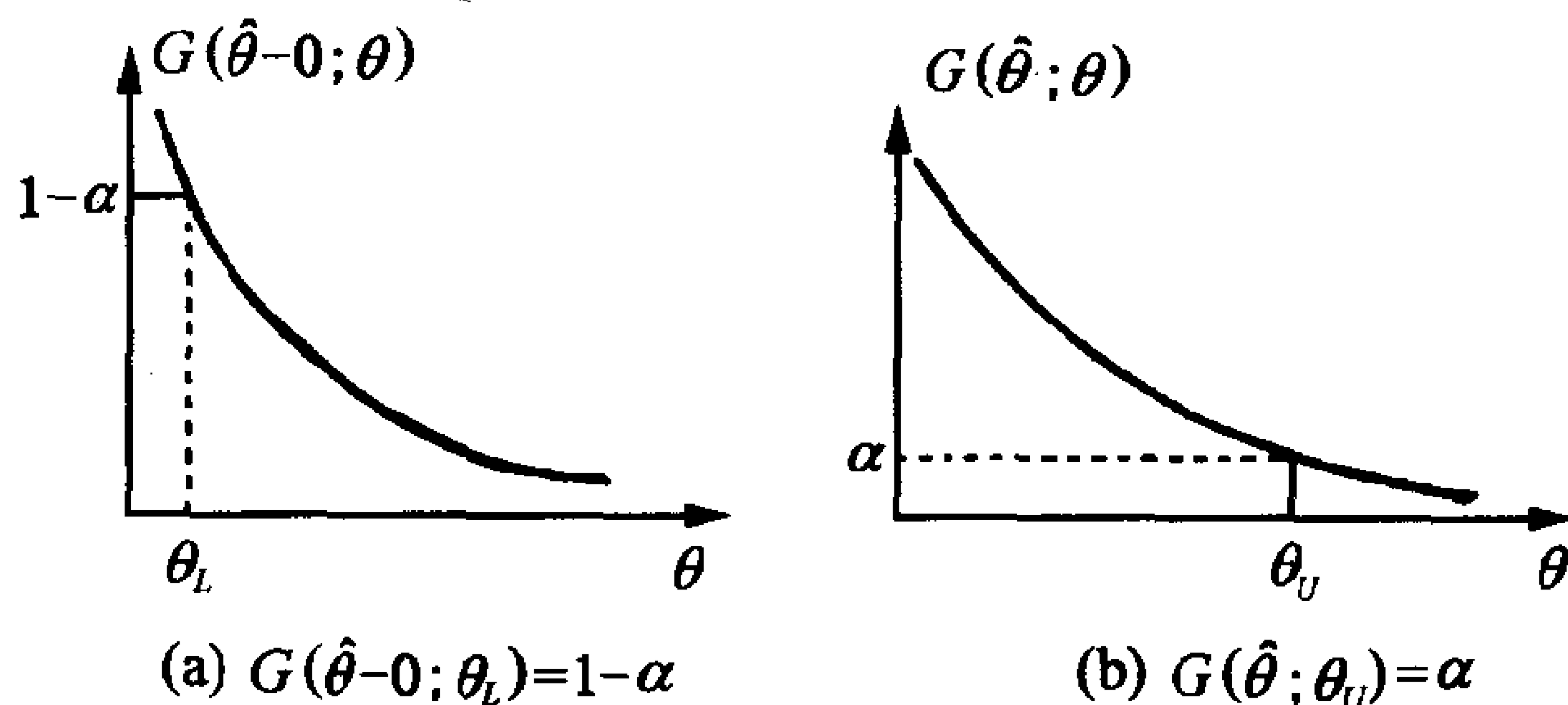
利用这个定理可以构造参数的单侧置信限。设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体分布函数 $F(x;\theta)$ 的一个样本,其中参数 $\theta \in \Theta$。又设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的某个估计量,它的分布函数记 $G(y;\theta)$,其中 y 是 $\hat{\theta}$ 的取值,假如用 $\hat{\theta}$ 去代替 y,则 $G(\hat{\theta};\theta)$ 是一个新的随机变量。由定理 5.5.1 右边不等式可知

$$P(G(\hat{\theta}-0;\theta) \leqslant 1-\alpha) \geqslant 1-\alpha$$

另一方面,若设 G 还是 θ 的连续的严减函数,令 θ_L 是关于 θ 的方程 $G(\hat{\theta}-0;\theta) = 1-\alpha$ 的解,即 $G(\hat{\theta}-0;\theta_L) = 1-\alpha$(见图 5.5.5(a)),这时事件"$G(\hat{\theta}-0;\theta) \leqslant 1-\alpha$"与事件"$\theta \geqslant \theta_L$"等价,于是有

$$P(\theta \geqslant \theta_L) = P(G(\hat{\theta}-0;\theta) \leqslant 1-\alpha) \geqslant 1-\alpha$$

这表明 θ_L 是 θ 的 $1-\alpha$ 单侧下置信限。



(a) $G(\hat{\theta}-0;\theta_L)=1-\alpha$　　(b) $G(\hat{\theta};\theta_U)=\alpha$

图 5.5.5　G 是 θ 的连续严减函数

类似地,由定理 5.5.1 左边的不等式可知

$$P(G(\hat{\theta};\theta) \leqslant \alpha) \leqslant \alpha \text{ 或 } P(G(\hat{\theta};\theta) > \alpha) \geqslant 1-\alpha$$

在 G 是 θ 的连续严减函数假设下，令 θ_U 是关于 θ 的方程 $G(\hat{\theta};\theta)=\alpha$ 的解，即 $G(\hat{\theta};\theta_U)=\alpha$，则“$\theta<\theta_U$”与“$G(\hat{\theta};\theta)>\alpha$”是两个等价事件，于是有

$$P(\theta<\theta_U)=P(G(\hat{\theta};\theta)>\alpha)\geqslant 1-\alpha$$

这表明：θ_U 是 θ 的 $1-\alpha$ 单侧上置信限。

综合上述，我们证明了如下定理。

定理 5.5.2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $F(x;\theta)$ 的一个样本，θ 的某一估计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数为 $G(y;\theta)$。假如 $G(y;\theta)$ 还是 θ 的连续的严减函数，且

$$\theta_L \text{ 是关于 } \theta \text{ 的方程 } G(\hat{\theta}-0;\theta)=1-\alpha \text{ 的解} \qquad (5.5.4)$$
$$\theta_U \text{ 是关于 } \theta \text{ 的方程 } G(\hat{\theta};\theta)=\alpha \text{ 的解}$$

则 $\hat{\theta}_L$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 单侧置信下限，$\hat{\theta}_U$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 单侧置信上限。

当 $G(\hat{\theta};\theta)$ 是 θ 的严增函数时，可类似证明如下定理。

定理 5.5.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $F(x;\theta)$ 的一个样本，θ 的某个估计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数为 $G(y;\theta)$。假如 $G(y;\theta)$ 还是 θ 的连续的严增函数（见图 5.5.6(a) 与(b)），且

$$\theta_L \text{ 是关于 } \theta \text{ 的方程 } G(\hat{\theta}-0;\theta)=\alpha \text{ 的解} \qquad (5.5.5)$$
$$\theta_U \text{ 是关于 } \theta \text{ 的方程 } G(\hat{\theta};\theta)=1-\alpha \text{ 的解}$$

则 θ_L 是 θ 的 $1-\alpha$ 单侧下置信限，θ_U 是 θ 的 $1-\alpha$ 单侧上置信限。

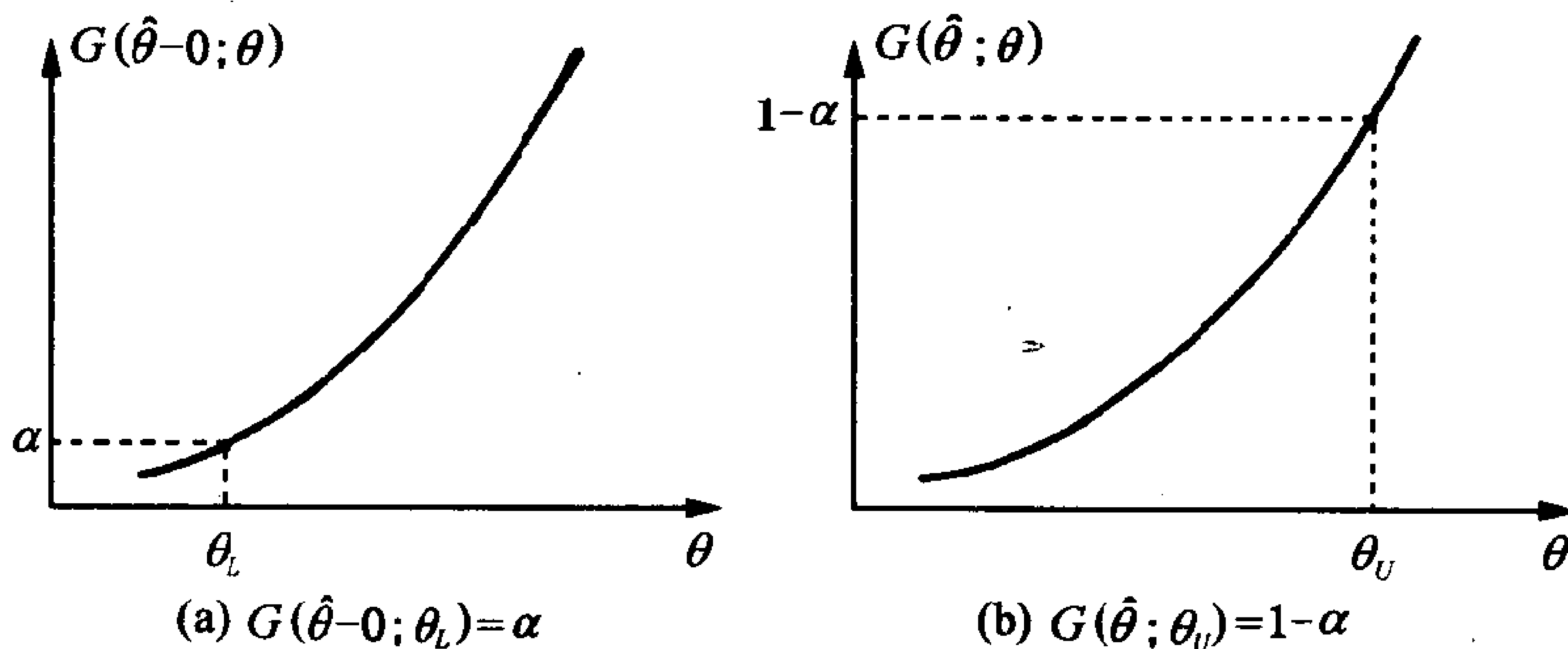


图 5.5.6 G 是 θ 的连续严增函数

下面我们通过求泊松分布置信限来说明这一方法的具体步骤。

例 5.5.5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自泊松分布 $P(\lambda)$ 的一个样本，试构造 λ 的 $1-\alpha$ 置信区间。

解：为求 λ 的置信区间，可分两步进行：先求 λ 的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 的置信下限 λ_L，再

求 λ 的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 的置信上限 λ_U，最后综合即得：

$$P(\lambda_L \leqslant \lambda \leqslant \lambda_U) = 1-\alpha$$

由于 λ 是泊松分布的均值，因而它常用样本均值作估计，即

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

若记 $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$，则可从 T 的分布出发进行讨论，下分几步：

(1) 因总体 $X \sim P(\lambda)$，样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，故

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\lambda_1), \qquad \lambda_1 = n\lambda$$

T 的分布函数为

$$G(y;\lambda_1) = \sum_{t \leqslant y} \frac{\lambda_1^t}{t!} e^{-\lambda_1}, \qquad y \geqslant 0$$

若记 $k = [y]$（y 的整数部分），则有

$$G(y;\lambda_1) = \sum_{t=1}^{k} \frac{\lambda_1^t}{t!} e^{-\lambda_1}$$

当 y 为正整数时，

$$G(y-0;\lambda_1) = \sum_{t=1}^{k-1} \frac{\lambda_1^t}{t!} e^{-\lambda_1}$$

(2) $G(y;\lambda_1)$ 是 λ_1 的严格减函数。

利用分部积分法可以证明

$$1-G(y;\lambda_1) = \sum_{t=k+1}^{\infty} \frac{\lambda_1^t}{t!} e^{-\lambda_1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^{\lambda_1} t^k e^{-t} dt \quad , \qquad \lambda_1 > 0 \tag{5.5.6}$$

当 y 固定时，k 也随之固定，这时(5.5.6)的右端可以看成是形状参数为 $k+1$，尺度参数为1的伽玛分布的分布函数，从而 $1-G(y;\lambda_1)$ 是 λ_1 的连续的严增函数，由此即知泊松分布的分布函数 $G(y;\lambda_1)$ 是 λ_1 的连续的严减函数。

(3) 由定理 5.2.2 可知 λ 的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 置信下限 λ_L 应满足

$$G(y-0;n\lambda_L) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

即

$$\sum_{t=0}^{k-1} \frac{(n\lambda_L)^t}{t!} e^{-n\lambda_L} = 1-\frac{\alpha}{2}$$

或

$$\sum_{t=k}^{\infty}\frac{(n\lambda_L)^t}{t!}e^{-n\lambda_L}=\frac{\alpha}{2} \tag{5.5.7}$$

λ的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 置信上限 λ_U 应满足

$$G(y;n\lambda_U)=\frac{\alpha}{2}$$

即

$$\sum_{t=0}^{k}\frac{(n\lambda_U)^t}{t!}e^{-n\lambda_U}=\frac{\alpha}{2}$$

或

$$\sum_{t=k+1}^{\infty}\frac{(n\lambda_U)^t}{t!}e^{-n\lambda_U}=1-\frac{\alpha}{2} \tag{5.5.8}$$

(4) 在(5.5.6)式中令 $u=2t$,则

$$\sum_{t=k+1}^{\infty}\frac{\lambda_1^t}{t!}e^{-\lambda_1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\int_0^{2\lambda_1}u^k e^{-\frac{u}{2}}du \tag{5.5.9}$$

这是自由度为 $\nu=2(k+1)$ 的 χ^2 分布函数在 $2n\lambda$ 处的函数值，记为 $k_{2(k+1)}(2n\lambda)$。

利用这一性质,那么(5.5.7)与(5.5.8)可改写为

$$k_{2k}(2n\lambda_L)=\frac{\alpha}{2}$$

$$k_{2(k+1)}(2n\lambda_U)=1-\frac{\alpha}{2}$$

用 χ^2 分布的分位数表示,得

$$2n\lambda_L=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2k)$$

$$2n\lambda_U=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2(k+1))$$

从而得

$$\lambda_L=\frac{1}{2n}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2k) \tag{5.5.10}$$

$$\lambda_U=\frac{1}{2n}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2(k+1)) \tag{5.5.11}$$

如此求得区间$[\lambda_L,\lambda_U]$就是泊松分布参数 λ 的 $1-\alpha$ 的等尾置信区间。

例 5.5.6 某公司一天内帐务上的错误个数服从泊松分布,其参数 λ 未知。现随机抽查 10 天,共发现有 6 个错误,试求 λ 的 0.95 的置信区间。

解:这里 $n=10,k=6,2k=12,2(k+1)=14$,在 $\alpha=0.05$ 时,查 χ^2 分

布表得：

$$\chi^2_{0.025}(12) = 4.404,\quad \chi^2_{0.975}(14) = 26.119$$

将它们代入(5.5.10)与(5.5.11)得

$$\lambda_L = \frac{4.404}{2\times 10} = 0.22$$

$$\lambda_U = \frac{26.119}{2\times 10} = 1.31$$

所以 λ 的置信水平为 0.95 的置信区间为[0.22,1.31]。

§5.6 比率 p 的置信区间

比率 p 是经常会遇到的一个量，如产品的不合格品率、某一电视节目的收视率、对某项政策的支持率等等。为对 p 作估计，我们可以把 p 看成是一个服从二点分布总体的参数。以某产品质量而言，用 X 记检查一个产品的不合格品数，$X=1$ 表示该产品为不合格品，$X=0$ 表示该产品是合格品，从而当该产品的不合格品率为 p 时，X 便服从二点分布 $b(1,p)$：

$$P(X=1)=p,\qquad P(X=0)=1-p$$

p 便是该二点分布的期望，$E(X)=p$，而 $\mathrm{Var}(X)=p(1-p)$。

为估计 p，可从二点分布总体中进行抽样，获得容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。一般都取样本均值 $\overline{X}$ 作为 p 的点估计。

为对 p 作区间估计，需要研究样本和 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的分布。

5.6.1 小样本场合下 p 的置信区间

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自二点分布 $b(1,p)$ 的一个样本，则 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 服从二项分布 $b(n,p)$。p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $[p_L,p_U]$ 可由定理 5.5.2 获得。具体做法如下：

(1) 设 $G(x)$ 是二项分布 $b(n,p)$ 的分布函数，则

$$G(y;p)=\sum_{x\leqslant y}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{k}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\quad,\quad y>0 \qquad (5.6.1)$$

其中 $k=[y]$（y 的整数部分）。利用分部积分法可知

$$\begin{aligned}
&1-G(y;p)\\
&=\sum_{x=k+1}^{n}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}\\
&=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}\int_0^p u^k(1-u)^{n-k-1}du,\qquad 0<p<1
\end{aligned}\tag{5.6.2}$$

在 y 固定时，上式右端可以看成是参数为 $k+1$ 与 $n-k$ 的贝塔分布的分布 函数，从而 $1-G(y;p)$ 是 p 的严增函数，由此可知二项分布的分布函数 $G(y;p)$ 是 p 的连续的严减函数。

(2) 由定理5.5.2知，p 的 $1-\alpha$ 置信区间 $[p_L,p_U]$ 的两端点 p_L 和 p_U 应分别满足下列两式

$$\begin{cases}G(y-0;p_L)=1-\alpha/2\\ G(y;p_U)=\alpha/2\end{cases}$$

由(5.6.1)知，上两式等价于

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{x=0}^{k-1}\binom{n}{x}p_L^x(1-p_L)^{n-x}=1-\alpha/2\\ \displaystyle\sum_{x=0}^{k}\binom{n}{x}p_U^x(1-p_U)^{n-x}=\alpha/2\end{cases}\tag{5.6.3}$$

这里 k 是 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的观察值。

(3) 如何从(5.6.3)中的两个方程分解出 p_L 和 p_U 呢?这个计算问题可用 F 分布完成。在(5.6.2)中令

$$v=\frac{u}{1-u},\quad u=\frac{v}{1+v},\quad du=\frac{dv}{(1+v)^2}$$

则有

$$1-G(y;p)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}\int_0^{\frac{p}{1-p}}\frac{v^k}{(1+v)^{n+1}}dv$$

再令 $v=\dfrac{k+1}{n-k}\omega$，$\nu_1=2(k+1)$，$\nu_2=2(n-k)$，可得

$$1-G(y;p)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}\int_0^{\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}}\frac{\left(\dfrac{k+1}{n-k}\right)^{k+1}\omega^k}{\left(1+\dfrac{k+1}{n-k}\omega\right)^{n+1}}d\omega$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\int_0^{\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{p}{1-p}} \frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\omega^{\frac{\nu_2-1}{2}}}{(\nu_2+\nu_1\omega)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}d\omega$$

$$= F\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{p}{1-p};\nu_1,\nu_2\right)$$

最后一个积分恰好是自由度为 ν_1 和 ν_2 的 F 分布函数在 $\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{p}{1-p}$ 处的值。综合上述，可得如下公式

$$\sum_{x=k+1}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = F\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{p}{1-p};\nu_1,\nu_2\right) \tag{5.6.4}$$

这就是用 F 分布计算二项分布的一般公式。

(4) 利用公式(5.6.4)来解方程组(5.6.3)。先把(5.6.3)改写为

$$\begin{cases} \sum_{x=k}^{n}\binom{n}{x}p_L^x(1-p_L)^{n-x} = \frac{\alpha}{2} \\ \sum_{x=k+1}^{n}\binom{n}{x}p_U^x(1-p_U)^{n-x} = 1-\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

利用(5.6.4)，可得：

$$\begin{cases} F\left(\frac{\nu'_2}{\nu'_1}\frac{p_L}{1-p_L};\nu'_1,\nu'_2\right) = \frac{\alpha}{2}, \quad \nu'_1 = 2k, \quad \nu'_2 = 2(n-k+1) \\ F\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{p_U}{1-p_U};\nu_1,\nu_2\right) = 1-\frac{\alpha}{2}, \quad \nu_1 = 2(k+1), \quad \nu_2 = 2(n-k) \end{cases}$$

查 F 分布表可得

$$\begin{cases} \frac{\nu'_2}{\nu'_1}\frac{p_L}{1-p_L} = F_{\alpha/2}(\nu'_1,\nu'_2) \\ \frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{p_U}{1-p_U} = F_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_L = \frac{\nu'_1F_{\alpha/2}(\nu'_1,\nu_2)}{\nu'_2+\nu'_1F_{\alpha/2}(\nu'_1,\nu'_2)} \\ p_U = \frac{\nu_1F_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}{\nu_2+\nu_1F_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} \end{cases} \tag{5.6.5}$$

如此求出的区间 $[p_L,p_U]$ 就是 p 的 $1-\alpha$ 置信区间。

例5.6.1 从一批产品中随机抽查63件，发现有3件不合格品。求这批产品的不合格品率 p 的 0.90 置信区间。

解：在这个问题中，$n=63, k=3$，故 p 的点估计 $\hat{p}=0.048$。下面利用(5.6.5)式来求 p 的置信区间。

$$\nu'_1 = 2k = 6, \quad \nu'_2 = 2(n-k+1) = 122$$
$$F_{0.05}(6,122) = 1/F_{0.95}(122,6) = 1/3.70$$
$$p_L = \frac{6/3.70}{122 + 6/3.70} = 0.013$$
$$\nu_1 = 2(k+1) = 8, \quad \nu_2 = 2(n-k) = 120$$
$$F_{0.95}(8,120) = 2.02$$
$$p_U = \frac{8 \times 2.02}{120 + 8 \times 2.02} = 0.119$$

故这批产品的不合格品率的 0.90 置信区间为[0.013,0.119]。

5.6.2 大样本场合下 p 的近似置信区间

当总体 $X \sim b(1,p)$ 时，只要 n 足够大，根据中心极限定理，可以认为 $\overline{X}$ 渐近正态分布。现在 $E\overline{X} = p$，$\mathrm{Var}(\overline{X}) = p(1-p)/n$，因而只要 n 足够大，有

$$U = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

所以可将 U 取作枢轴量对 p 作区间估计，由

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| \leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

可以从

$$\left|\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| \leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

去解出 p 的范围。由于上式等价于

$$(\overline{X} - p)^2 \leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{p(1-p)}{n}$$

亦等价于

$$(n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2)p^2 - (2n\overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2)p + n\overline{X}^2 \leqslant 0$$

记 $a = n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$，$b = -(2n\overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2)$，$c = n\overline{X}^2$，则 $a > 0$，$b^2 - 4ac = \left(2n\overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right)^2 - 4(n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2) \cdot n\overline{X}^2 = 4n\overline{X}(1-\overline{X})u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^4 > 0$，故二次三项式 $ap^2 + bp + c$ 开口向上，有两个实根 p_L 与 p_U（见图 5.6.1），故当 p 满足



图 5.6.1 求 p_L，p_U 的示意图

$$p_L \leqslant p \leqslant p_U$$

可使 $ap^2 + bp + c \leqslant 0$,其中

$$p_L = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad p_U = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5.6.6}$$

从而 p 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[p_L, p_U]$$

其中 p_L, p_U 如(5.6.6)式所示,当(5.6.6)式中 $p_L < 0$ 时,取 $p_L = 0$。

例 5.6.2 在某电视节目收视率调查中,调查了 400 人,其中有 100 人收看了该电视节目,试对该节目收视率 p 作置信水平为 0.95 的区间估计。

解:在本例中,$n = 400$,当取 $\alpha = 0.05$ 时,$u_{0.975} = 1.96$,又由样本求得 $\bar{x} = \frac{100}{400} = 0.25$,从而

$$a = 400 + 1.96^2 = 403.8416$$

$$b = -(2 \times 400 \times 0.25 + 1.96^2) = -203.8416$$

$$c = 400 \times 0.25^2 = 25$$

代入(5.6.6),求得

$$p_L = \frac{203.8416 - 34.1649}{807.6832} = 0.2101$$

$$p_U = \frac{203.8416 + 34.1649}{807.6832} = 0.2947$$

从而 p 的置信水平为 0.95 的置信区间是

$$[0.2101, 0.2947]$$

* §5.7 贝叶斯估计

统计学中有两大学派:频率学派(又称经典学派)和贝叶斯学派,它们的理论与方法都建立在概率论基础上,应用都相当广泛。本书后四章主要介绍经典统计学的基本内容,仅在这一节以贝叶斯估计为题对贝叶斯统计作一些介绍。

5.7.1 统计推断中的三种信息

我们在前面的统计推断(点估计、区间估计等)中用到了两种信息。

(1) 总体信息,即总体分布或总体所属分布族给我们的信息。譬如,“总体是正态分布”这一句话就给我们带来很多信息:它的密度函数是一条钟形曲

线；它的一切阶矩都存在；有许多成熟的统计推断方法可供我们选用等。总体信息是很重要的信息，为了获取此种信息往往耗资巨大。我国为确认国产轴承寿命分布为威布尔分布前后花了五年时间，处理了几千个数据后才定下的。

(2) 样本信息，即样本提供给我们的信息，这是最"新鲜"的信息，并且越多越好，希望通过样本对总体或总体的某些特征作出较精确的统计推断。没有样本就没有统计学可言。

基于以上两种信息进行统计推断的统计学就称为**经典统计学**。然而在我们周围还存在着第三种信息 —— 先验信息，它也可用于统计推断。

(3) 先验信息，即在抽样之前有关统计问题的一些信息。一般说来，先验信息来源于经验和历史资料。先验信息在日常生活和工作中是很重要的。先看两个例子。

例 5.7.1 英国统计学家 Savage, L. J. 曾考察了如下两个统计试验：

(1) 一位常饮牛奶加茶的妇女声称，她能辨别先倒进杯子里的是茶还是牛奶。对此做了十次试验，她都正确地说出了。

(2) 一位音乐家声称，他能从一页乐谱辨别出是海顿(Haydn) 还是莫扎特(Mozart) 的作品。在十次这样的试验中，他都辨别正确。

在这两个统计试验中，假如认为被试验者是在猜测，每次成功概率为 0.5，那么十次都猜中的概率为 $2^{-10} = 0.0009766$。这是很小的概率，是几乎不可能发生的。所以认为"每次成功概率为 0.5"应被拒绝，认为试验者每次成功概率要比 0.5 大得多，这就不是猜测，而是他们的经验帮了他们的忙。可见经验(先验信息的一种) 在推断中不可忽视。

例 5.7.2 "免检产品"是怎样决定的？某工厂的产品每天要抽检几件，获得不合格品率 θ 的估计。经过一段时间后，就可根据历史资料(先验信息的一种) 对过去产品的不合格品率 θ 构造一个分布

$$P(\theta = \frac{i}{n}) = \pi_i, \quad i = 0,1,2,\cdots,n \tag{5.7.1}$$

这种对先验信息进行加工获得的分布今后称为**先验分布**。有了这种先验分布就可得到对该厂过去产品的不合格品率 θ 的一个全面看法。如果这个分布的概率绝大部分集中在 $\theta = 0$ 附近，那么该产品可以认为是"信得过产品"。假如以后的多次抽检结果与历史资料提供的先验分布是一致的，那就可以对它作出"免检产品"的决定，或者每月抽检一次就足够了，这就省去了大量的人力与物力。可见，历史资料在统计推断中应该加以应用。

基于上述三种信息进行统计推断的统计学称为**贝叶斯统计学**。它与经典

统计学的差别就在于是否利用先验信息。贝叶斯统计在重视使用总体信息和样本信息的同时，还注意先验信息的收集、挖掘和加工，使它数量化，形成先验分布，参加到统计推断中来，以提高统计推断的质量。忽视先验信息的利用，有时是一种浪费，有时还会导出不合理的结论。

贝叶斯统计起源于英国学者贝叶斯(Bayes, T.R. 1702(?)—1761)死后发表的一篇论文"论有关机遇问题的求解"，在此文中提出了著名的贝叶斯公式(见 §1.5)和一种归纳推理的方法，之后，被一些统计学家发展成一种系统的统计推断方法。到本世纪30年代已形成贝叶斯学派，到50～60年代已发展成一个有影响的统计学派，其影响还在日益扩大。

贝叶斯学派的最基本的观点是：任一未知量 θ 都可看作随机变量，可用一个概率分布去描述，这个分布称为先验分布。因为任一未知量都有不确定性，而在表述不确定性的程度时，概率与概率分布是最好的语言。例 5.7.2 中产品的不合格品率 θ 是未知的，但每天都在变化，把它看成随机变量是合理的，用一个概率分布去描述它是恰当的。再看下面一个例子。

例5.7.3 某地区煤的储存量 θ 在几百年内不会有多大变化，可看作是一个常量，但对人们来说，它是未知的、不确定的量。有位专家研究了有关资料，结合他的经验认为：该地区煤的储存量 θ"大概有 5 亿吨左右"。若把"左右"理解为 4 到 6 亿吨之内，把"大概"理解为 80% 的把握，还有 20% 的可能性在此区间之外(见图 5.7.1)。这无形中就是用一个概率分布(这一分布的确定是用主观概率)去描述未知量 θ，而具有概率分布的量当然是随机变量。

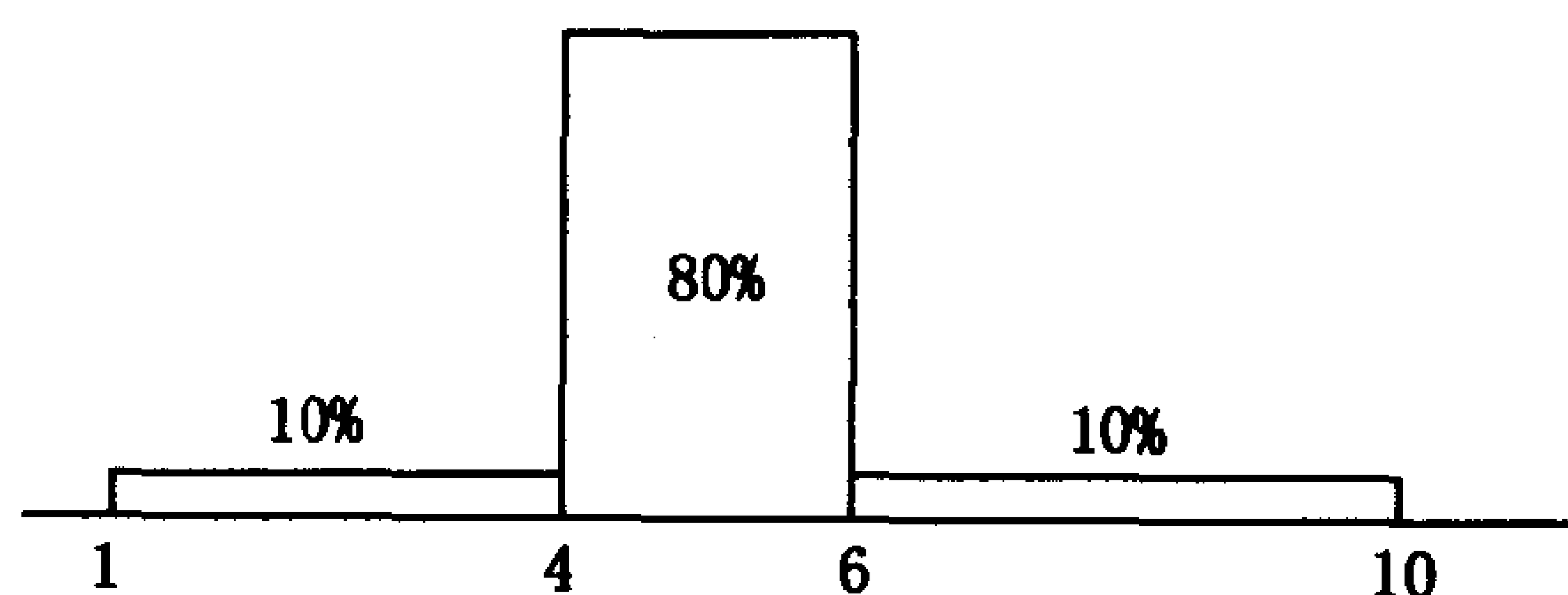


图 5.7.1 煤的储存量(亿吨)的描述

关于未知量是否可看作随机变量在经典学派与贝叶斯学派间争论了很长时间。如今经典学派已不反对这一观点。著名的美国经典统计学家 Lehmann, E.L. 在他的《点估计理论》一书中写道："把统计问题中的参数看作随机变量的实现要比看作未知参数更合理一些"。如今两派的争论焦点是：如何利用各种先验信息合理地确定先验分布。这在有些场合是容易解决的，但在很多场合是相当困难的。这时应加强研究，发展贝叶斯统计，而不宜简单处置，引起非难。

5.7.2 贝叶斯公式的密度函数形式

贝叶斯公式的事件形式已在 §1.5 中叙述。这里用随机变量的密度函数再一次叙述贝叶斯公式，并从中介绍贝叶斯学派的一些具体想法。

(1) 依赖于参数 θ 的密度函数在经典统计中记为 $p(x;\theta)$，它表示参数空间 Θ 中不同的 θ 对应不同的分布。在贝叶斯统计中应记为 $p(x|\theta)$，它表示在随机变量 θ 给定某个值时，X 的条件密度函数。

(2) 根据参数 θ 的先验信息确定先验分布 $\pi(\theta)$。

(3) 从贝叶斯观点看，样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的产生要分两步进行。首先设想从先验分布 $\pi(\theta)$ 产生一个样本 θ'。这一步是"老天爷"做的，人们是看不到的，故用"设想"二字。第二步从 $p(x|\theta')$ 中产生一个样本 $\boldsymbol{X}$。这时样本 $\boldsymbol{X}$ 的联合条件密度函数为

$$p(\boldsymbol{X}|\theta')=p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta')=\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta') \qquad (5.7.2)$$

这个联合分布综合了总体信息和样本信息，又称为似然函数。

(4) 由于 θ' 是设想出来的，仍然是未知的，它是按先验分布 $\pi(\theta)$ 产生的。为把先验信息综合进去，不能只考虑 θ'，对 θ 的其它值发生的可能性也要加以考虑，故要用 $\pi(\theta)$ 进行综合。这样一来，样本 $\boldsymbol{X}$ 和参数 θ 的联合分布为

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=p(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta) \qquad (5.7.3)$$

这个联合分布把三种可用信息都综合进去了。

(5) 我们的任务是要对未知参数 θ 作统计推断。在没有样本信息时，我们只能依据先验分布 $\pi(\theta)$ 对 θ 作出推断。在有了样本观察值 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之后，我们应依据 $h(\boldsymbol{x},\theta)$ 对 θ 作出推断。若把 $h(\boldsymbol{x},\theta)$ 作如下分解：

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=\pi(\theta|\boldsymbol{x})m(\boldsymbol{x}) \qquad (5.7.4)$$

其中 $m(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的边缘密度函数：

$$m(\boldsymbol{x})=\int_{\Theta}h(\boldsymbol{x},\theta)d\theta=\int_{\Theta}p(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta \qquad (5.7.5)$$

它与 θ 无关，或者说 $m(\boldsymbol{x})$ 中不含 θ 的任何信息。因此能用来对 θ 作出推断的仅是条件分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$，它的计算公式是

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x})=\frac{h(\boldsymbol{x},\theta)}{m(\boldsymbol{x})}=\frac{p(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta}p(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} \qquad (5.7.6)$$

这就是贝叶斯公式的密度函数形式。这个条件分布称为 θ 的**后验分布**，它集中了总体、样本和先验中有关 θ 的一切信息。它也是用总体和样本对先验分布 $\pi(\theta)$ 作调整的结果，它要比 $\pi(\theta)$ 更接近 θ 的实际情况，从而使基于 $\pi(\theta|x)$ 对

θ的推断可以得到改进。

(5.7.6)式是在X和θ都是连续随机变量场合下的贝叶斯公式。其它场合下的贝叶斯公式容易写出。譬如在X是离散随机变量和θ是连续随机变量时，只要把(5.7.6)中的密度函数$p(\boldsymbol{x}|\theta)$改为概率$p(\boldsymbol{x}|\theta)$即可；而当θ为离散随机变量时，只要把(5.7.6)中先验密度函数$\pi(\theta)$改为先验分布列$\pi(\theta_i)$，$i=1,2,\cdots$，把积分改为求和即可。

例 5.7.4 设事件A的概率为θ，即$P(A)=\theta$。为了估计θ，进行了n次独立观察，其中事件A出现次数为X。显然$X\sim b(n,\theta)$，即：

$$P(X=x|\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x},\quad x=0,1,\cdots,n \qquad (5.7.7)$$

这就是似然函数。假如在试验前，我们对事件A没有什么了解，从而对其发生的概率θ也说不出是大是小。在这种场合，贝叶斯建议用区间(0,1)上的均匀分布$U(0,1)$作为θ的先验分布，因为它取(0,1)上每点都机会均等。贝叶斯的这个建议被后人称为贝叶斯假设。这里θ的先验分布为

$$\pi(\theta)=\begin{cases}1, & 0<\theta<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad (5.7.8)$$

为了综合试验信息和先验信息，可利用贝叶斯公式。为此先计算样本X与参数θ的联合分布：

$$h(x,\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x},\quad x=0,1,\cdots,n,\quad 0<\theta<1 \qquad (5.7.9)$$

从形式上看，此联合分布与(5.7.7)没有差别，可在定义域上有差别。再计算样本X的边缘分布：

$$m(x)=\int_0^1 h(x,\theta)d\theta=\binom{n}{x}\int_0^1\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}d\theta$$
$$=\binom{n}{x}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)} \qquad (5.7.10)$$

将(5.7.9)除以(5.7.10)，即得θ的后验分布为：

$$\pi(\theta|x)=\frac{h(x,\theta)}{m(\theta)}$$
$$=\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\theta^{(x+1)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1},\quad 0<\theta<1$$

这便是参数为$x+1$与$n-x+1$的贝塔分布$\mathrm{Be}(x+1,n-x+1)$。

拉普拉斯在1786年研究了巴黎男婴诞生的比率θ是否大于0.5。为此他收集了1745年到1770年在巴黎诞生的婴儿数据，其中男婴为251527个，女婴为241945个。他选用$U(0,1)$作为θ的先验分布，于是得θ的后验分布为Be(x

$+1, n-x+1)$，其中 $n=251527+241945=493472, x=251527$，利用这一后验分布，拉普拉斯计算了"$\theta \leqslant 0.5$"的后验概率：

$$P(\theta \leqslant 0.5 \mid x)=\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1) \Gamma(n-x+1)} \int_0^{0.5} \theta^x(1-\theta)^{n-x} d \theta$$

当年拉普拉斯把被积函数 $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ 在最大值 $\frac{x}{n}$ 处展开，然后对上述不完全贝塔函数作近似计算，最后结果为

$$P(\theta \leqslant 0.5 \mid x)=1.15 \times 10^{-42}$$

由于这一概率很小，故他以很大的把握断言：男婴诞生的概率大于 0.5。这一结果在当时是很有影响的。

5.7.3 共轭先验分布

我们知道，在区间(0,1)上的均匀分布是贝塔分布 Be(1,1)。从例 5.7.4 中可以看到一个有趣的现象：二项分布 $b(n,\theta)$ 中的成功概率 θ 的先验分布若取 Be(1,1)，则其后验分布也是贝塔分布 $Be(x+1, n-x+1)$。先验分布与后验分布同属一个贝塔分布族，只不过参数不同罢了。这一现象不是偶然的，假如把 θ 的先验分布换成一般的贝塔分布 $Be(a,b)$，其中 $a>0, b>0$，则经过类似的计算可以看出 θ 的后验分布仍是贝塔分布 $Be(a+x, b+n-x)$，此种先验分布称为 θ 的共轭先验分布。在其它场合还会遇到其它共轭先验分布，它的一般定义如下：

定义 5.7.1 设 θ 是某分布中的一个参数，$\pi(\theta)$ 是其先验分布。假如由抽样信息算得的后验分布 $\pi(\theta \mid \boldsymbol{x})$ 与 $\pi(\theta)$ 是同属于一个分布族，则称 $\pi(\theta)$ 是 θ 的**共轭先验分布**。

从这个定义可以看出，共轭先验分布是对某一分布中的参数而言的，离开指定参数及其所在的分布，谈论共轭先验分布是没有意义的。常用的共轭先验分布列于表 5.7.1 中。

表 5.7.1 常用的共轭先验分布

总体分布	参数	共轭先验分布
二项分布	成功概率	贝塔分布
泊松分布	均值	伽玛分布
指数分布	均值倒数	伽玛分布
正态分布(方差已知)	均值	正态分布
正态分布(均值已知)	方差	倒伽玛分布

注：若 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，则 $1/X$ 的分布称为倒伽玛分布。

例 5.7.5 正态均值(方差已知)的共轭先验分布是正态分布。

证:设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态分布 $N(\theta,\sigma^2)$ 的一个样本,其中 σ^2 已知。此样本的联合密度函数为:

$$p(\boldsymbol{x}|\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2\right\},\qquad -\infty<x_1,\cdots,x_n<\infty$$

再取另一正态分布 $N(\mu,\tau^2)$ 作为正态均值 θ 的先验分布,即

$$\pi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right\}\quad,\quad -\infty<\theta<\infty$$

其中 μ 与 τ^2 为已知。由此可写出样本 $\boldsymbol{x}$ 与参数 θ 的联合密度函数:

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=k_1\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n\theta^2-2n\theta\bar{x}+\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2}+\frac{\theta^2-2\mu\theta+\mu^2}{\tau^2}\right]\right\}$$

其中 $k_1=(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}\tau^{-1}\sigma^{-n}$,$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$,若再记

$$\sigma_0^2=\frac{\sigma^2}{n},\quad A=\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2},\quad B=\frac{\bar{x}}{\sigma_0^2}+\frac{\mu}{\tau^2},\quad C=\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2}+\frac{\mu^2}{\tau^2}$$

则有

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{x},\theta)&=k_1\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}[A\theta^2-2\theta B+C]\right\}\\&=k_1\cdot\exp\left\{-\frac{(\theta-B/A)^2}{2/A}-\frac{1}{2}\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\right\}\end{aligned}$$

由此容易算得样本 $\boldsymbol{X}$ 的边缘分布

$$m(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}h(x,\theta)d\theta=k_1\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\right\}\cdot\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

将上述两式相除,即得 θ 的后验分布

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x})=\frac{h(\boldsymbol{x},\theta)}{m(\boldsymbol{x})}=\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(\theta-B/A)^2}{2/A}\right\}$$

这是正态分布,其均值 μ_1 与方差 σ_1^2 分别为

$$\mu_1=\frac{B}{A}=\frac{\bar{x}\sigma_0^{-2}+\mu\tau^{-2}}{\sigma_0^{-2}+\tau^{-2}},\quad \sigma_1^2=\frac{1}{A}=(\sigma_0^{-2}+\tau^{-2})^{-1}\qquad(5.7.11)$$

譬如 $X\sim N(\theta,2^2)$,$\theta\sim N(10,3^2)$,若从总体 X 中抽得容量为 5 的样本,算得 $\bar{x}=12.1$,则从(5.7.11)算得 $\mu_1=11.93$,$\sigma_1^2=\left(\frac{6}{7}\right)^2$,此时 θ 的后验分布为

$N(11.93,\left(\frac{6}{7}\right)^2)$。

共轭先验分布中常含有未知参数，先验分布中的未知参数称为**超参数**。在先验分布类型已定，但其中还含有超参数时，确定先验分布的问题就转化为估计超参数的问题。下面的例子虽仅涉及贝塔分布，但其确定超参数的方法在其它分布中也可用。

例5.7.6 前面已指出：二项分布中成功概率θ的共轭先验分布是贝塔分布 $Be(a,b)$。现在来讨论此共轭分布中的两个超参数 a 与 b 如何确定。下面分几种情况讨论：

(1) 假如根据先验信息能获得成功概率 θ 的若干个(间接)观察值 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$。一般它们是从历史数据整理加工获得的，由此可算得先验均值$\bar{\theta}$与先验方差 $S_{n\theta}^2$ 为：

$$\bar{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_i,\qquad S_{n\theta}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\bar{\theta})^2$$

由于贝塔分布的均值与方差分别为：

$$E(\theta)=\frac{a}{a+b}$$

$$\mathrm{Var}(\theta)=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

则令

$$\begin{cases}E(\theta)=\bar{\theta}\\ \mathrm{Var}(\theta)=S_{n\theta}^2\end{cases}$$

解之，即可得超参数 a 与 b 的矩法估计值：

$$\hat{a}=\bar{\theta}\left[\frac{(1-\bar{\theta})\bar{\theta}}{S_{n\theta}^2}-1\right],\quad \hat{b}=(1-\bar{\theta})\left[\frac{(1-\bar{\theta})\bar{\theta}}{S_{n\theta}^2}-1\right]$$

(2) 假如根据先验信息只能获得先验均值 $\bar{\theta}$。可令

$$\frac{a}{a+b}=\bar{\theta}$$

但一个方程不能唯一确定两个未知的超参数。譬如$\bar{\theta}=0.4$，那么满足$\frac{a}{a+b}=0.4$的 a 与 b 有无穷多组解。表 5.7.2 列出了若干组，从表中可见，它们的方差 $\mathrm{Var}(\theta)$ 随 $a+b$ 的增大而减小，方差减小意味着概率向均值 $E(\theta)$ 集中，从而提高 $E(\theta)=0.4$ 的确信程度。这样一来，选择 $a+b$ 的问题转化为决策人对 $E(\theta)=0.4$的确信程度大小的问题。若对 $E(\theta)=0.4$ 很确信，那么 $a+b$ 可选得大一些，否则就选得小一些。譬如决策人对 $E(\theta)=0.4$ 很确信，从而选 $a+$

$b=35$。从表 5.7.2 知，此时 $\hat{a}=14,\hat{b}=21$，这样 θ 的先验分布为贝塔分布 Be(14,21)。

表 5.7.2　贝塔分布中超参数与方差的关系

贝塔分布	a	$a+b$	$E(\theta)$	$\mathrm{Var}(\theta)$
Be(2,3)	2	5	0.4	0.0400
Be(4,6)	4	10	0.4	0.0218
Be(8,12)	8	20	0.4	0.0114
Be(10,15)	10	25	0.4	0.0092
Be(14,21)	14	35	0.4	0.0067

(3) 用两个分位数来确定 a 与 b。譬如用两个上、下四分位数 θ_U 与 θ_L 来确定 a 与 b。从图 5.7.2 上可见，θ_L 与 θ_U 满足如下两个方程：

$$\int_0^{\theta_L}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta=0.25$$

$$\int_{\theta_U}^{1}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta=0.25$$

由先验信息定出 θ_L 与 θ_U 的估计值，再解出 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$(这需要用到数值积分)。

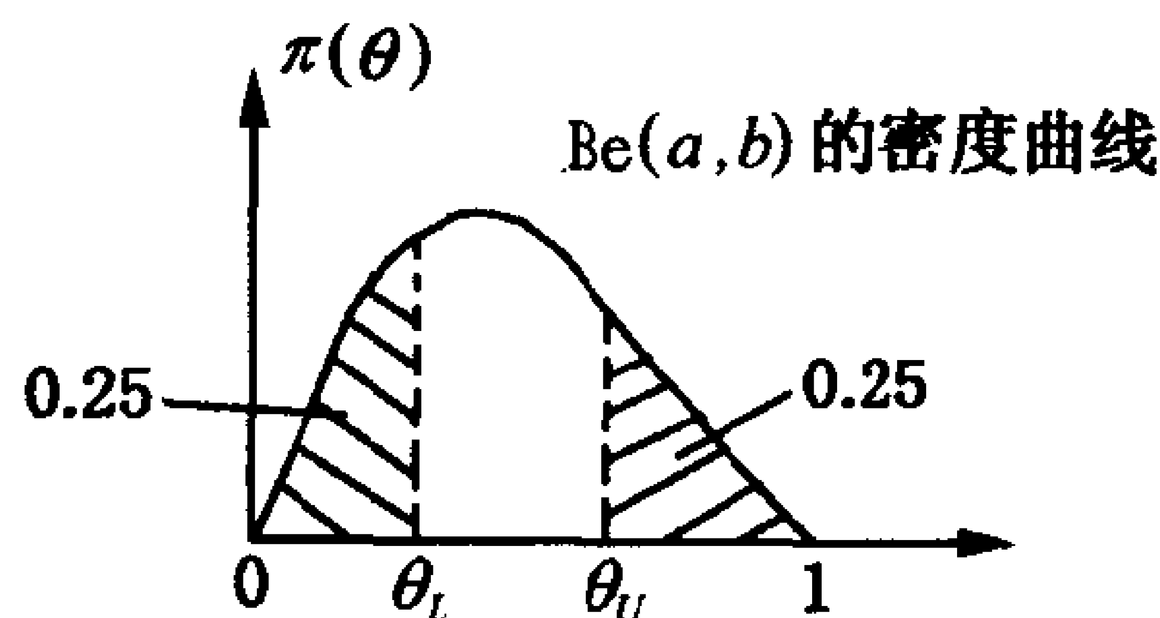


图 5.7.2　贝塔分布的上、下四分位数

(4) 如果对成功概率 θ 的先验信息很缺乏，说不上 θ 在哪个区域有更大的概率，这时可用均匀分布 Be(1,1) 作为 θ 的先验分布，此时 $\hat{a}=1,\hat{b}=1$，这便是前面说过的贝叶斯假设。

5.7.4　贝叶斯点估计

后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 综合了总体 $p(x|\theta)$，样本 $\boldsymbol{x}$ 和先验 $\pi(\theta)$ 中有关 θ 的信息，如今要寻找参数 θ 的估计 $\hat{\theta}$，当然要从后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 中提取信息。从 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 中提取关于 θ 的信息有三种常用的方法：使后验密度达到最大的 θ，后验分布的中位数，后验分布的均值。用得最多的是后验分布的均值。

定义 5.7.2 θ 的后验分布的期望值称为 θ 的**后验期望估计**，也简称**贝叶斯估计**，常记为 $\hat{\theta}_B$。

定理 5.7.1 设 θ 的后验密度为 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$，则后验期望估计 $\hat{\theta}_B$ 使均方误差达到最小。

证：$\hat{\theta}_B$ 的均方误差 $MSE(\hat{\theta}_B)=E(\hat{\theta}_B-\theta)^2$，下面在 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 下进行计算：

$$E(\hat{\theta}_B-\theta)^2=\int_\Theta(\hat{\theta}_B-\theta)^2\pi(\theta|x)d\theta$$

$$=\hat{\theta}_B^2-2\hat{\theta}_B\int_\Theta\theta\pi(\theta|x)d\theta+\int_\Theta\theta^2\pi(\theta|x)d\theta$$

这是 $\hat{\theta}_B$ 的二次三项式，其二次项系数为正，必有最小值。用微分法对其求导并令其为 0，便有

$$2\hat{\theta}_B-2\int_\Theta\theta\pi(\theta|\boldsymbol{x})d\theta=0$$

即

$$\hat{\theta}_B=\int_\Theta\theta\pi(\theta|\boldsymbol{x})d\theta=E(\theta|\boldsymbol{x})$$

下面看几个例子。

例 5.7.7 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\theta,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 σ^2 已知，θ 为未知参数，假如 θ 的先验分布为 $N(\mu,\tau^2)$，其中 μ 与 τ^2 已知。试求 θ 的贝叶斯估计。

解：由于正态分布 $N(\mu,\tau^2)$ 是正态均值 θ 的共轭先验分布，由例 5.7.5 知，在样本 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 给定的条件下，θ 的后验分布为 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，其中 μ_1、σ_1^2 如(5.7.11) 所示，μ_1 即为后验分布的期望，故 θ 的贝叶斯估计

$$\hat{\theta}_B=\mu_1=\frac{\bar{x}\sigma_0^{-2}+\mu\tau^{-2}}{\sigma_0^{-2}+\tau^{-2}}$$

其中 $\sigma_0^2=\frac{\sigma^2}{n}$。若记 $r_n=\frac{\sigma_0^{-2}}{\sigma_0^{-2}+\tau^{-2}}$，则上述贝叶斯估计可改写为如下的加权平均：

$$\hat{\theta}_B=r_n\bar{x}+(1-r_n)\mu \tag{5.7.12}$$

其中 $\bar{x}$ 是样本均值，μ 是 θ 的先验均值，权 r_n 由样本均值的方差 σ_0^2 和先验方差 τ^2 算得。当 $\sigma_0^2>\tau^2$ 时，$r_n<\frac{1}{2}$，$1-r_n>\frac{1}{2}$，于是从(5.7.12) 可以看出在贝叶斯估计中先验均值 μ 占的比重大一些。这从直观上也容易理解，因为在 $\sigma_0^2>\tau^2$ 时，方差小的是更应受到重视。反之，当 $\sigma_0^2<\tau^2$ 时，$r_n>\frac{1}{2}$，$1-r_n<\frac{1}{2}$，于是

在贝叶斯估计(5.7.12)中样本均值$\bar{x}$占的比重大一些。特别当$r_n=0$时，这时$\sigma_0^2=\infty$，这表示没有样本信息，故贝叶斯估计只能用先验均值了。而当$r_n=1$时，这时$\tau^2=\infty$，这表示没有任何先验信息可用，故贝叶斯估计就取经典估计$\bar{x}$。从上述解释可以看出，用(5.7.12)表示的贝叶斯估计是十分合理的。

作为一个数值例子，我们考虑对一个儿童做智力测验。设测验结果$X\sim N(\theta,100)$，其中θ为这个儿童的智商的真值。若又设$\theta\sim N(100,225)$。应用上述方法，在$n=1$时，可得在给定$X=x$条件下，该儿童智商θ的后验分布是正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，其中

$$\mu_1=\frac{100\times 100+225x}{100+225}=\frac{400+9x}{13}$$

$$\sigma_1^2=\frac{100\times 225}{100+225}=\frac{900}{13}=69.23=(8.32)^2$$

假如这个儿童测验得分为115分。则他的智商的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B=\frac{400+9\times 115}{13}=110.38$$

例 5.7.8 为估计不合格品率θ，今从一批产品中随机抽取n件，其中不合格品数为X，又设θ的先验分布为贝塔分布$\mathrm{Be}(a,b)$，这里a、b已按例5.7.6的方法确定，因而已知。求θ的贝叶斯估计。

解：由共轭先验分布可知，此时θ的后验分布$\pi(\theta|x)$为贝塔分布$\mathrm{Be}(a+x,b+n-x)$，此后验分布的均值即为θ的贝叶斯估计，故

$$\hat{\theta}_B=\frac{a+x}{a+b+n}$$

这一估计亦可改写为

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_B&=\frac{a+x}{a+b+n}=\frac{n}{a+b+n}\cdot\frac{x}{n}+\frac{a+b}{a+b+n}\cdot\frac{a}{a+b}\\&=r_n\hat{\theta}_L+(1-r_n)\bar{\theta}\end{aligned}\tag{5.7.13}$$

其中$\bar{\theta}=\dfrac{a}{a+b}$是先验分布$\mathrm{Be}(a,b)$的均值，它可看作仅用先验分布对$\theta$所作的估计。$\hat{\theta}_L=\dfrac{x}{n}$是仅用抽样信息对$\theta$所作的极大似然估计。$r_n=\dfrac{n}{a+b+n}$是权，它的大小取决于样本量$n$的大小。当$n$很大时，$r_n$将很接近于1，于是贝叶斯估计将很接近极大似然估计$\hat{\theta}_L$，即抽样信息在估计$\theta$中占主要成份；当$n$较小时，$r_n$将接近于0，于是贝叶斯估计将很接近于先验均值$\bar{\theta}$，即先验信息在估计$\theta$中占主要成份。这一现象表明，各种信息在贝叶斯估计中所占的地位是很恰当的。

作为一个数值例子，我们选用贝叶斯假设，即 θ 的先验分布选为均匀分布 $U(0,1)$，它就是 $a=b=1$ 的贝塔分布。假如其它条件不变，那末 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B = \frac{x+1}{n+2} \tag{5.7.14}$$

它与极大似然估计 $\hat{\theta}_L = x/n$ 略有不同，它相当于在 n 次检查中再追加二次检查，并且不合格品也增加一个。这里 2 与 1 正是均匀先验分布能提供的信息。表 5.7.3 列出四个试验结果。在试验 1 与试验 2 中，“抽检 3 个产品全合格”与“抽检 10 个产品也全合格”在人们心目中留下的印象是不同的，后批的质量要比前批的质量更信得过，这一点用 $\hat{\theta}_L$ 反映不出来，而用贝叶斯估计会有所反映。类似地，在试验 3 和试验 4 中，“抽检 3 个产品全不合格”与“抽检 10 个产品也全不合格”在人们心目中也是有差别的二个事件，可用极大似然估计 $\hat{\theta}_L$ 看不出此种差别，而贝叶斯估计能反映一些。在这些极端场合，贝叶斯估计更具有吸引力。

表 5.7.3　不合格品率 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$ 与贝叶斯估计 $\hat{\theta}_B$

试验号	n	x	$\hat{\theta}_L = x/n$	$\hat{\theta}_B = (x+1)/(n+2)$
1	3	0	0	0.2
2	10	0	0	0.083
3	3	3	1	0.8
4	10	10	1	0.917

例 5.7.9　经过早期筛选后的彩色电视接收机（简称彩电）的寿命服从指数分布。它的密度函数为

$$p(t|\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-t/\theta}\quad,\quad t>0$$

其中 $\theta>0$ 是彩电的平均寿命。

现从一批彩电中随机抽取 n 台进行寿命试验。试验到第 r 台失效为止，其失效时间为 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_r$，另外 $n-r$ 台彩电直到试验停止时(t_r)还未失效。这种试验称为截尾寿命试验，所得样本 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_r)$ 为截尾样本。试求彩电平均寿命 θ 的贝叶斯估计。

解：截尾样本的联合分布为

$$p(t|\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} p(t_i|\theta)[F(t_r)]^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{\theta} e^{-t_i/\theta} \right) \cdot \left(e^{-t_r/\theta} \right)^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta^r} e^{-s_r/\theta}$$

其中 $s_r = t_1 + t_2 + \cdots + t_r + (n-r)t_r$ 称为总试验时间，$F(t)$ 为彩电寿命的分布函数。

为寻求θ的贝叶斯估计，我们来寻求θ的先验分布。据国内外的经验，选用倒伽玛分布作为θ的先验分布是恰当的。假如随机变量$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$，则$X^{-1}$的分布就称为倒伽玛分布，记为$I\Gamma(\alpha,\lambda)$，它的密度函数可算得为：

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda/\theta}, \qquad \theta > 0$$

其中 $\alpha > 0, \lambda > 0$ 是两个待定参数，其数学期望 $E(\theta) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$。

利用(5.7.6) 可得 θ 的后验分布为：

$$\pi(\theta|t) = \frac{(\lambda + s_r)^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha + r)} \theta^{-(\alpha+r+1)} e^{-(\lambda+s_r)/\theta}, \quad \theta > 0$$

这为 $I\Gamma(\alpha + r, \lambda + s_r)$，因此其后验期望为$\frac{\lambda + s_r}{\alpha + r - 1}$，故 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B = \frac{\lambda + s_r}{\alpha + r - 1}$$

为了最后确定这个估计，我们收集大量的先验信息。我国彩电生产厂做了大量的彩电寿命试验，仅 15 个工厂实验室和一些独立实验室就对 13 142 台彩电进行了共计 5 369 812 台时试验，而且还对 9 240 台彩电进行了三年现场跟踪试验，总共进行了 5 547 810 台时试验。这两类试验总共失效台数不超过 250 台。对如此大量先验信息加工整理后，确认我国彩电平均寿命不低于 30 000 小时，它的 10% 的分位数 $\theta_{0.1}$ 大约为 11 250 小时，经过一些专家认定，这两个数据是符合我国前几年彩电寿命的实际情况，也是留有余地的。

由此可列出如下二个方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{\alpha - 1} = 30\ 000 \\ \displaystyle\int_0^{11250} \pi(\theta) d\theta = 0.1 \end{cases}$$

在计算机上解此方程组，得

$$\alpha = 1.956, \qquad \lambda = 2\ 868$$

这样一来，我们就完全确定了先验分布 $I\Gamma(1.956, 2\ 868)$，假如随机抽取 100

台彩电进行 400 小时试验，没有一台失效。这时总试验时间 $s_r = 100 \times 400 = 40\,000$ 小时，$r = 0$，于是彩电平均寿命 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B = \frac{2\,868 + s_r}{1.956 + r - 1} = \frac{42\,868}{0.956} = 44\,841(\text{小时})$$

5.7.5 贝叶斯区间估计

对于区间估计问题，贝叶斯方法比经典方法更容易处理。因为在贝叶斯统计中参数 θ 是一个随机变量，且有后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$，这里 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，因此 θ 落在某一区间的概率是容易计算的，譬如给定区间 $[a,b]$，用后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 可算得其概率，譬如为 $1-\alpha$，即

$$P^{\theta|x}(a \leqslant \theta \leqslant b|\boldsymbol{x}) = 1 - \alpha \tag{5.7.15}$$

反之，若给定概率 $1-\alpha$，要求一个区间 $[a,b]$，使上式成立，这样求得的区间 $[a,b]$ 就是 θ 的贝叶斯区间估计。这是在 θ 为连续随机变量场合。假如 θ 是离散随机变量，对给定的概率 $1-\alpha$，满足等式(5.7.15)的 a 与 b 不一定存在，这时只有略微放大(5.7.15)左端的概率，才能找到 a 与 b，这样的区间也是 θ 的贝叶斯区间估计。它的一般定义如下：

定义 5.7.3 设参数 θ 的后验分布为 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$。对给定的概率 $1-\alpha$，若存在这样的两个统计量 $\theta_L = \theta_L(\boldsymbol{x})$ 与 $\theta_U = \theta_U(\boldsymbol{x})$，使得

$$P^{\theta|x}(\theta_L \leqslant \theta \leqslant \theta_U|\boldsymbol{x}) \geqslant 1 - \alpha \tag{5.7.16}$$

则称区间 $[\theta_L, \theta_U]$ 为参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的**贝叶斯可信区间**，或简称为 θ 的 $1-\alpha$ **可信区间**，而满足

$$P^{\theta|x}(\theta \geqslant \theta_L) \geqslant 1 - \alpha \tag{5.7.17}$$

的 θ_L 称为 θ 的 $1-\alpha$ **可信下限**，满足

$$P^{\theta|x}(\theta \leqslant \theta_U) \geqslant 1 - \alpha \tag{5.7.18}$$

的 θ_U 称为 θ 的 $1-\alpha$ **可信上限**。

这里的可信区间与经典统计中的置信区间是同类概念，只是在解释上不同。对可信区间 $[\theta_L, \theta_U]$ 可以说"θ 属于这个区间"或"θ 落在这个区间"。而对置信区间 $[\theta_L, \theta_U]$ 不能这么说，因为经典统计认为 θ 是常量，只能说"这个区间覆盖着 θ"或"这个区间包含 θ"。相比之下，前者的解释简单、自然，易被人理解和采用。

例 5.7.10 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\theta, \sigma^2)$ 的一个样本，其中 σ^2 已知。正态均值 θ 的先验分布是 $N(\mu, \tau^2)$，其中 μ, τ^2 已知。在例 5.7.5 中已求得 θ 的后验分布为 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，其中

$$\mu_1 = \frac{\sigma_0^{-1}\mu + \tau^{-2}\overline{x}}{\sigma_0^{-2} + \tau^{-2}}, \qquad \sigma_1^2 = (\sigma_0^{-2} + \tau^{-2})^{-1}$$

其中 $\overline{x}$ 为样本均值，$\sigma_0^2 = \sigma^2/n$。如今要求正态均值 θ 的 $1-\alpha$ 可信区间。

解：由于 θ 的后验分布为正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，于是标准化变量 $(\theta-\mu_1)/\sigma_1$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$。若设 $u_{\alpha/2}$ 和 $u_{1-\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $\alpha/2$ 和 $1-\alpha/2$ 的分位数，则对给定的 $1-\alpha$ 有

$$P\left(u_{\alpha/2} \leqslant \frac{\theta-\mu_1}{\sigma_1} < u_{1-\alpha/2} \mid \boldsymbol{x}\right) = 1-\alpha$$

由于正态分布的对称性，故有 $u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$。所以

$$P(\mu_1 - \sigma_1 u_{1-\alpha/2} \leqslant \theta \leqslant \mu_1 + \sigma_1 u_{1-\alpha/2} \mid \boldsymbol{x}) = 1-\alpha$$

其中区间 $[\mu_1 - \sigma_1 u_{1-\alpha/2}, \mu_1 + \sigma_1 u_{1-\alpha/2}]$ 就是正态均值 θ 的 $1-\alpha$ 可信区间。

在儿童智商测验（见例 5.7.5）中，$X \sim N(\theta, 100)$，$\theta \sim N(100, 225)$。在仅取一个样本（$n=1$）情况下，算得一儿童智商 θ 的后验分布为 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，其中

$$\mu_1 = \frac{400 + 9x}{13}, \quad \sigma_1^2 = 69.23 = (8.32)^2$$

该儿童在一次智力测验中得 $x = 115$ 分，θ 的贝叶斯估计为 $\hat{\theta}_B = 110.38$。如今来求 θ 的 0.95 可信区间。由于 $u_{0.975} = 1.96$，故可算得

$$\mu_1 - \sigma_1 u_{0.975} = 110.38 - 8.32 \times 1.96 = 94.07$$

$$\mu_1 + \sigma_1 u_{0.975} = 110.38 + 8.32 \times 1.96 = 126.69$$

该儿童智商 θ 的 0.95 可信区间为 $[94.07, 126.69]$，该区间长为 32.62。

假如不用先验信息，仅用抽样信息，即仅用 $X \sim N(\theta, 100)$，则用经典方法求得的 0.95 置信区间为

$$(115 - 1.96 \times 10, 115 + 1.96 \times 10) = (95.4, 134.6)$$

其区间长为 39.2，这两个区间估计不同，区间长度也不同。

例 5.7.11 在例 5.7.9 中利用指数分布的截尾样本 $\boldsymbol{t}$ 和共轭先验分布，我们获得了彩电平均寿命 θ 的后验分布为倒伽玛分布 $I\Gamma(\alpha + r, \lambda + s_r)$，其中 α, λ 是共轭先验分布 $I\Gamma(\alpha, \lambda)$ 中的参数，它们已由先验信息确定：$\alpha = 1.956, \lambda = 2868$，$r$ 是截尾样本中的失效数，s_r 是总试验时间，它们分别是 $r = 0, s_r = 40000$ 小时。如今要确定彩电平均寿命 θ 的 0.90 的可信下限。

解：直接从 θ 的后验分布获得其可信下限是困难的，因为我们没有倒 Γ 分布的分位数表，为此我们通过变换把分布转换到常用分布上去。下面两个命题是容易证明的。

(1) 若随机变量 $X \sim I\Gamma(\alpha, \lambda)$，则 $X^{-1} \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$。

(2) 若随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$，$c>0$，则 $cX \sim \Gamma(\alpha,\lambda/c)$。

利用这两个性质可以把倒 Γ 分布转化为 χ^2 分布。因为

$$\theta|t \sim I\Gamma(\alpha+r,\lambda+s_r)$$

$$\theta^{-1}|t \sim \Gamma(\alpha+r,\lambda+s_r) \qquad \text{(由于(1))}$$

$$2(\lambda+s_r)\theta^{-1}\Big|t \sim \Gamma\left(\alpha+r,\frac{1}{2}\right) = \chi^2(2(\alpha+r)) \quad \text{(由于(2))}$$

设 $\chi^2_{0.90}(f)$ 是自由度为 f 的 χ^2 分布的 0.90 分位数，

$$P(2(\lambda+S_r)\theta^{-1} \leqslant \chi^2_{0.90}(f)) = 0.90$$

于是可看出，θ 的 0.90 可信下限为

$$\theta_L = \frac{2(\lambda+s_r)}{\chi^2_{0.90}(f)}$$

这里 $f = 2(\alpha+r) = 2(1.956+0) = 3.912$。从 χ^2 分布表上查得 $\chi^2_{0.9}(3) = 6.251$，$\chi^2_{0.9}(4) = 7.779$，用线性内插法获近似值 $\chi^2_{0.9}(3.912) = 7.645$。于是 θ 的 0.90 可信下限为

$$\theta_L = \frac{2(2\,868+40\,000)}{7.645} = 11\,215(\text{小时})$$

第六章 假设检验

§6.1 假设检验的概念与步骤

6.1.1 什么是假设检验

统计推断的另一类重要问题是假设检验。下面先通过一个例子来说明什么是假设检验以及如何进行假设检验。

例 6.1.1 某餐厅每天营业额服从正态分布，以往老菜单其均值为 8000 元，标准差为 640 元。一个新的菜单挂出后，九天中平均每天营业额为 8300 元，经理想知道这个差别是否是由于新菜单而引起的。（这里假定标准差不变。）

这一例子涉及两个正态总体：一个是老菜单的营业额，其总体分布为 $N(\mu_0,\sigma_0^2)$，这里 $\mu_0=8000$，$\sigma_0=640$；一个是新菜单挂出后的营业额，其总体分布为 $N(\mu,\sigma^2)$，这里假定 $\sigma=\sigma_0$，但 μ 未知。现在我们仅得到后一总体的一个样本，其样本均值 $\bar{x}$，可作为 μ 的一个估计。当 $\bar{x}$ 与 μ_0 差别很小时，就会认为两

个总体间没有显著差异，而当两者差别很大时，譬如 $\bar{x}=12000$ 元，那就很少会怀疑新菜单的作用。可是在很多场合两者的差别不那么明显时，两个总体间是否有显著差别呢？假设检验将提供一种方法，供人们对这一问题作出判断，这一判断不可避免地带有风险，但这种风险会受到控制。

假设检验的做法分以下几步来叙述：

(1)建立假设。

为了评估新菜单的好坏，先要建立一个命题"新老菜单的平均营业额之间没有差异"。这个命题称为**原假设**，设为 H_0。于是我们的任务就是要确认这原假设 H_0 是真还是假。

当我们能确认原假设 H_0 为假时就拒绝 H_0，这时我们就面临如下三个命题的选择：

命题 1："新菜单的平均营业额比老菜单高"；

命题 2："新菜单的平均营业额不如老菜单"；

命题 3："新老菜单的平均营业额之间有显著差异"。

在抛弃原假设后可供选择的命题称为**备择假设**，记为 H_1。选择哪一个命题作为备择假设要视问题而定。在本例中，餐厅经理是想知道当前平均营业额的增加是否是由于新菜单而引起的，因而将命题 1 作为备择假设。

在本例中，上面所确立的原假设 H_0 与备择假设 H_1 可以分别用关于 μ 的等式与不等式表示：

$$H_0: \mu=8000$$

$$H_1: \mu>8000$$

如果我们拒绝原假设 H_0，就可以认为 H_1 正确。应该注意的是 H_1 只告诉我们 $\mu>8000$，它可以是 8100，8200，…等等。现在由样本给出 $\bar{x}=8300$，这仅是 μ 的一个估计而已。

(2)寻找检验统计量。

假设检验的任务是要确认原假设 H_0 是否为真。我们的做法是：先假定 H_0 成立，然后用样本去判断其真伪。由于样本所含信息较为分散，因此需要构造一个统计量来做判断，此统计量称为**检验统计量**。在本例中可用样本均值 $\bar{X}$ 作为检验统计量。

在 H_0 为真时，新菜单挂出后，每天营业额仍服从正态分布 $N(8000, 640^2)$。如今我们获得了一个容量为 9 的样本，此时样本均值仍服从正态分布，其均值仍为 8000，而方差变成

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{640^2}{9}=\left(\frac{640}{3}\right)^2=213.3^2$$

所以 $\bar{X}\sim N(8000,213.3^2)$。

在 H_0 为真时，$\bar{X}$ 的观察值 $\bar{x}$ 应接近 8000，如果 $\bar{x}$ 远离 8000，那就有理由怀疑 H_0 不真。如今 8300 与 8000 算近还是算远？或者讲 $\bar{x}$ 要多大才拒绝 H_0？这里就需要一个界限，记此界限为 c，当 $\bar{x}$ 的值越过 c 这一界限就拒绝 H_0，否则就保留 H_0，即

当平均观察值 $\bar{x}\geqslant c$ 时，拒绝 H_0；

当平均观察值 $\bar{x}<c$ 时，保留 H_0；

这便是我们的检验法则的初型，这里的 c 称为**检验的临界值**，c 值的确定方法下面再讲。

使原假设 H_0 被拒绝的样本观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所组成的区域称为**检验的拒绝域**，用 W 表示；而保留原假设 H_0 的样本观测值所组成的区域称为**检验的接受**（保留之意）**域**，用 A 表示。在本例中，W 与 A 分别为：

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\bar{x}\geqslant c\}$$
$$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\bar{x}<c\}$$

今后常简记为 $W=\{\bar{x}\geqslant c\}$，$A=\{\bar{x}<c\}$。图 6.1.1 表示了 $n=2$ 时的拒绝域 W 与接受域 A。由于 A 与 W 是互斥的，而其区域之并为样本空间 Ω，即为样本的一切可能取值的空间，因而只要知道其中之一即可。在假设检验中，人们总是关心拒绝域，这是因为如今我们手中只有一个样本，用一个样本去证明一个命题是正确的，在逻辑上是不充分的，但用一个反例（如样本）去推翻一个命题，理由是充足的，因为一个命题成立时是不允许有一个反例存在的。当不能否定原假设 H_0 时，只能将原假设 H_0 当作为真的保留下来。这里保留的意思有两点：

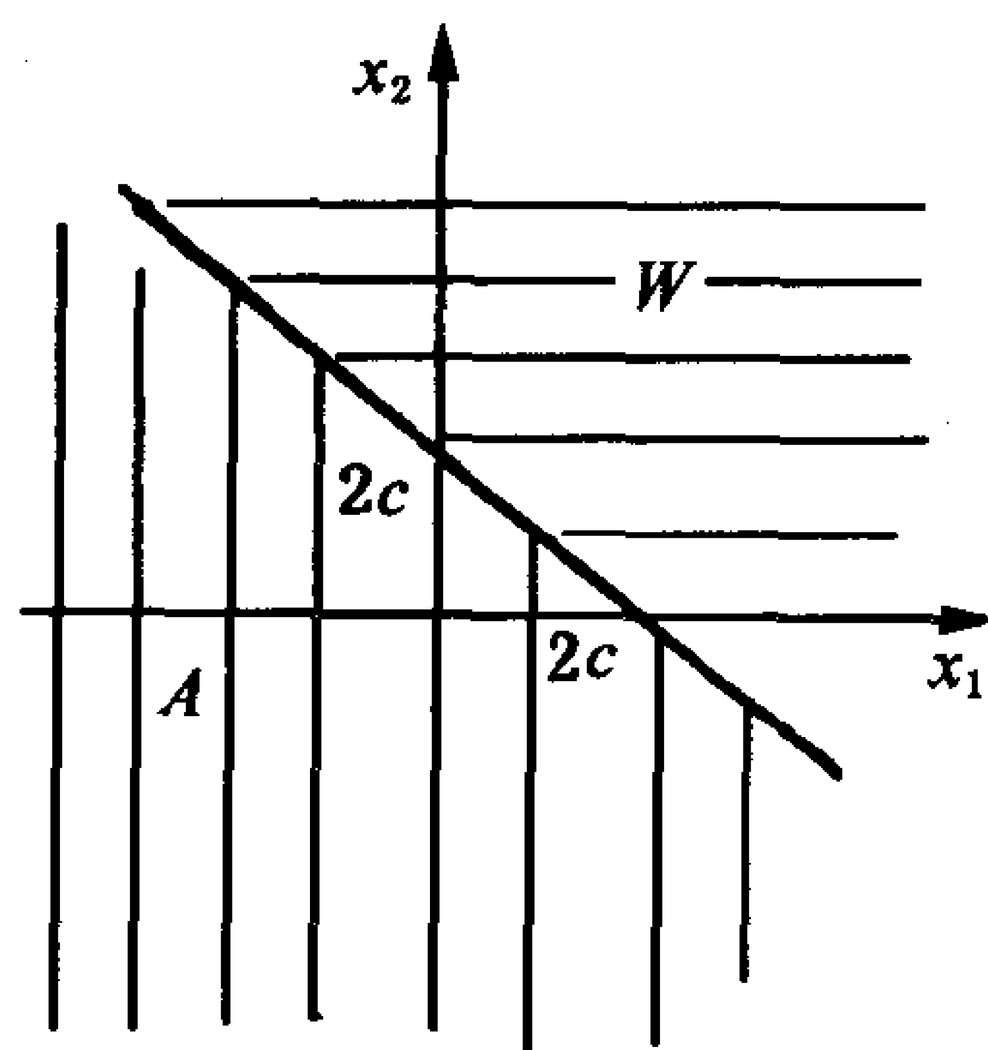


图 6.1.1　$n=2$ 时的拒绝域 W 与接受域 A 的示意图

一是 H_0 可能为真，二是保留进一步检验的权力。

(3)显著性水平与临界值。

当我们试图对原假设 H_0 是否为真作判断时有可能会犯错误，这就是要冒风险，为了控制这一风险，首先需要用一个概率去表示这一风险，这个概率便是事件“H_0 为真但被拒绝”的概率，这个概率又称为**显著性水平**，记为 α。在作判断时我们要尽量避免这一事件发生，然而由于样本的随机性，要完全避免是不可能的，因而只能把这个事件发生的概率 α 控制在一个很小的范围内。譬如在本例中取 $\alpha=0.05$，这便意味着

$$P(H_0\text{ 为真，但被拒绝})=0.05$$

这里“H_0 为真”表示样本实际是来自总体 $N(8000,640)^2$，“被拒绝”表示样本均值 $\overline{X}\geqslant c$。所以我们可以设法去决定 c 值，使得在 H_0 为真时 $\overline{X}\geqslant c$ 这一事件发生的概率为 0.05，这便是用 H_0 为真时 $\overline{X}$ 的分布 $N(8000,\frac{640^2}{9})$去计算 $\overline{X}\geqslant c$ 的概率，使

$$P_{\mu_0}(\overline{X}\geqslant c)=0.05$$

由于在 H_0 为真时，有 $1-\Phi\left(\frac{c-8000}{640/3}\right)=0.05$，从而由正态分布表可知：$\frac{c-8000}{640/3}=1.645$，这样我们便定出了临界值 $c=8000+1.645\times\frac{640}{3}=8350.9$，这一临界值唯一决定了拒绝域 W。图 6.1.2(a)表示总体分布，(b)表示样本均值 $\overline{X}$ 的分布，c 即为求出的临界值。

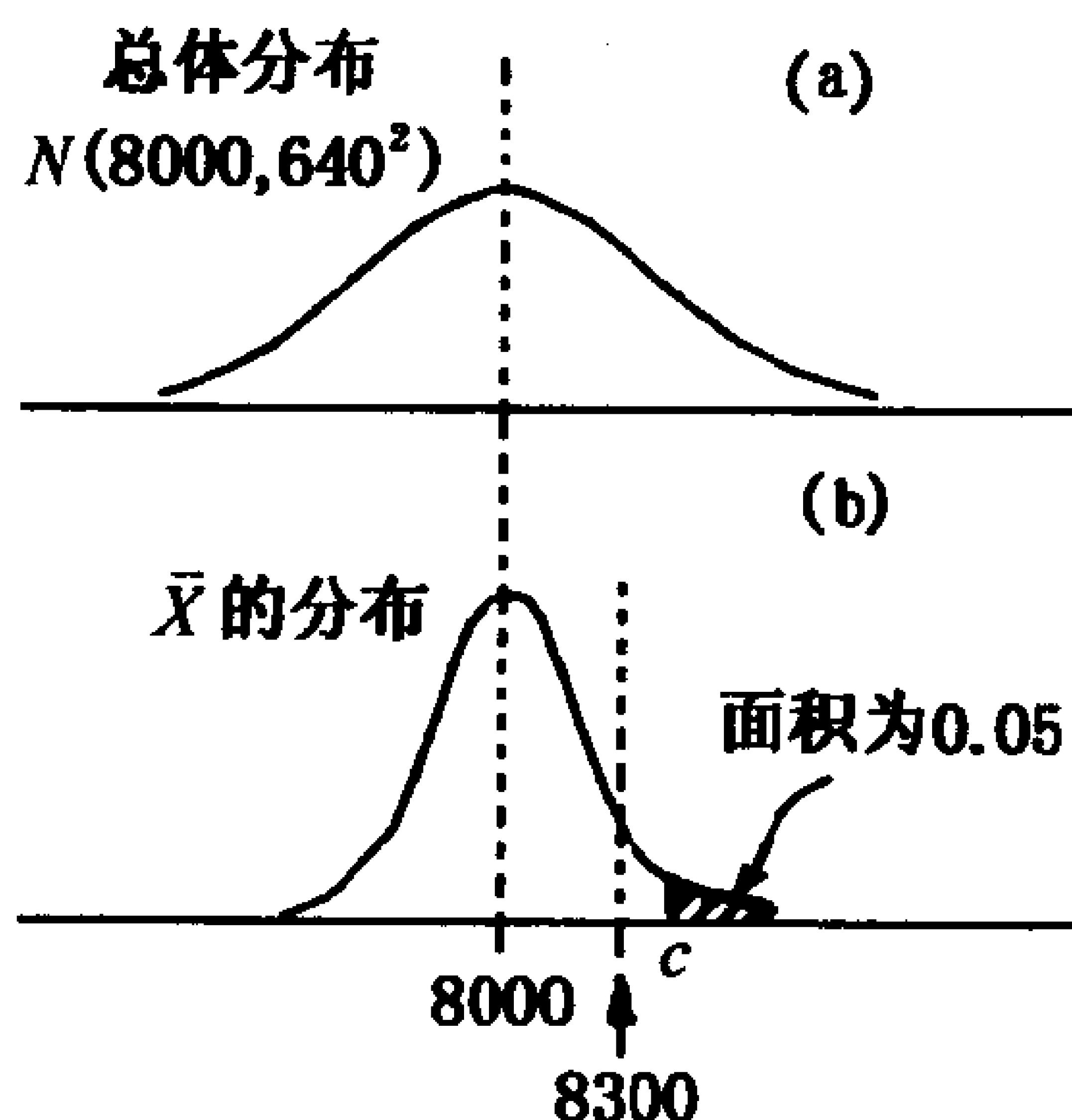


图 6.1.2 临界值的示意图

(4)作判断。

在 H_0 为真的前提下，$\overline{X} \geqslant 8350.9$ 这一事件发生的概率仅为 0.05，反之 $\overline{X} < 8350.9$ 这一事件发生的概率为 0.95，前者是一个小概率事件。通常在一次试验中小概率事件是难以发生的，倘若小概率事件在一次试验中发生了，人们就有理由怀疑“$\overline{X} \geqslant c$”不是一个小概率事件。这一矛盾导致人们不相信原假设 H_0 为真，从而否定原假设 H_0。所以我们的检验准则为：

当平均观察值 $\bar{x} \geqslant 8350.9$ 时，拒绝 H_0；

当平均观察值 $\bar{x} < 8350.9$ 时，保留 H_0。

这与我们前面确定的检验法则的初型是一致的。现在新菜单使用了 9 天，平均每天营业额 $\bar{x}=8300$ 元，它小于 8350.9 元，故应保留 H_0，即新菜单的挂出对平均每天营业额没有显著影响，至此就回答了餐厅经理所提的问题。

上面这一例子说明了假设检验的基本思路和具体步骤。下面再对涉及的一些概念作进一步的说明。

6.1.2 假设

通常我们把关于总体分布的某个命题作为**假设**。在对总体分布的参数作假设检验时，原假设和备择假设都可看作参数空间 Θ 的某个真子集 Θ_0 与 Θ_1，且这两个子集不能相交，其并可以是参数空间 Θ 也可以是 Θ 的一个子集。这时原假设和备择假设可分别记为：

$$H_0: \theta \in \Theta_0, \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

如果 Θ_0(或 Θ_1)中只含一个元素，则称该假设为**简单假设**，否则称为**复杂假设**。如例 6.1.1 中，$H_0: \mu=8000$ 便是一个简单假设，而 $H_1: \mu>8000$ 便是一个复杂假设。

原假设与备择假设的建立主要根据具体问题来决定的。常把没有把握不能轻易肯定的命题作为备择假设，而把没有充分理由不能轻易否定的命题作为原假设，只有理由充足时才拒绝它，否则应予保留。譬如在例 6.1.1 中，我们不敢肯定新菜单有作用，因而把 $\mu>8000$ 作为备择假设，而把 $\mu=8000$ 作为原假设。又譬如某人有一颗重 23.1 克的钻石想拍卖，拍卖行的职工需要在精密天平上将钻石反复秤重来作判断，由于这时不能轻易否定钻石重量，故可建立假设 $H_0: \mu=23.1$，$H_1: \mu \neq 23.1$。

还有一点需注意，这里所讨论的假设与数学中的假设含义是不同的。譬如数学中“假设某函数连续”，那么我们就承认这一前提，而这里所讲的假设是否正确还有待于我们用样本去作检验。

6.1.3 两类错误

在对原假设的真伪作判断时，由于样本的随机性可能使判断发生下面两类错误，其中第一类错误在前面已提及。

第一类错误：原假设 H_0 为真，但由于样本的随机性，使样本观测值落入拒绝域 W，这时所下的判断便是拒绝 H_0，这类错误称为**第一类错误**，其发生的概率称为犯第一类错误的概率，亦称为**拒真概率**，它便是前面提及的显著性水平 α。如在例 6.1.1 中，新菜单挂出后实际上对每天营业额无显著影响，若是那 9 天由于婚宴订菜而使平均营业额达到 8600 元，由于 $\bar{x}\geqslant 8350.9$，故作出拒绝 H_0 的判断，认为新菜单对每天营业额有显著影响，这就犯了第一类错误。

第二类错误：原假设 H_0 为假，但由于样本的随机性，使样本观测值落入接受域 A，这时所下的判断为保留 H_0，这类错误称为**第二类错误**，其发生的概率称为犯第二类错误的概率，亦称为**取伪概率**，记为 β。如在例 6.1.1 中，新菜单挂出后实际上是对每天营业额有显著影响，可是那 9 天的平均营业额仅为 8200 元，由于 $\bar{x}<8350.9$，故作出保留 H_0 的判断，认为新菜单对每天营业额无显著影响，这就犯了第二类错误。

一个好的检验法则总希望犯两类错误的概率 α 与 β 都很小，但这在一般场合下很难实现。为此我们再来考察一下例 6.1.1 中的 α 与 β。其总体分布为 $N(\mu,\sigma^2)$，样本均值 $\overline{X}$ 的分布为 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，其中 n 为样本量。在 H_0 为真时，$\mu=\mu_0=8000$，在 H_1 为真时，不妨设为 $\mu=\mu_1>8000$，于是

$$\alpha=P_{\mu_0}(\overline{X}\geqslant c)=1-\Phi\left(\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \tag{6.1.1}$$

$$\beta=P_{\mu_1}(\overline{X}<c)=\Phi\left(\frac{c-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \tag{6.1.2}$$

在样本量 n 和标准差 σ 固定时，要使 α 小，则从(6.1.1)知应使 $\Phi\left(\frac{c-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ 大，由于 $\Phi(x)$ 是 c 的严增函数，故必要求 c 大，但从 6.1.2 知，当 c 增大时，β 也随之而增大。这表明要使 α 小必导致 β 大，若要 β 小必导致 α 大。所以要使 α 与 β 同时小只能增大样本容量 n。因而在抽取样本时，尽量使样本容量大一点，这对假设检验中同时减小 α 与 β 是有好处的。

在一般场合，当 n 固定时，减小 α 必会导致增大 β，因此在选择显著水平 α 时不应太小，譬如不宜取 $\alpha=0.001$，因为这时虽可减小拒真概率，但会大大增

加取伪概率。仍来看一下例 6.1.1，若取 $\alpha=0.001$，则可定出 $c=8661.3$，这时若 $\mu_1=8500$，那么犯第二类错误的概率 $\beta=P_{\mu_1}(\overline{X}<c)=\Phi\left(\frac{8661.3-8500}{640/3}\right)=0.7752$，这是无法使人忍受的。因而控制 β 的一个办法是不使 α 太小，通常选 $\alpha=0.10, 0.05$ 和 0.01 为宜。

α 取多少为宜还要看检验问题的背景，譬如在检验药品的毒性问题时，毒性过大会导致病人中毒甚至死亡。如果 μ 为药品毒性均值，建立如下假设：$H_0: \mu\leqslant\mu_0, H_1: \mu>\mu_0$，这时就必须严格控制取伪概率 β，这可用增大拒真概率 α 来实现，在这类问题中，甚至可取 $\alpha=0.15$ 或 0.20 以尽量减小 β。这可减少病人中毒死亡事件发生的可能性。

在复杂假设的场合，α 与 β 都是未知参数 θ 的函数。仍以例 6.1.1 来看，这时备择假设 $H_1: \mu>8000$，在不同的 μ 下，犯第二类错误的概率 β 也不同。这时可记 β 为 $\beta(\mu)$：

$$\beta(\mu)=P_{\mu}(\overline{X}<c)=\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

在 $\mu_0=8000, n=9, \sigma=640, \alpha=0.05$ 时，$c=8350.9$。下面列出了不同的 μ 值对应的 β 值：

表 6.1.1　对例 6.1.1 的拒绝域 $\{\overline{X}\geqslant 8350.9\}$，不同 μ 值对应的 β 值

μ	8 100	8 200	8 300	8 400	8 500	8 600	8 700	…
β	0.8802	0.7601	0.5944	0.4090	0.2423	0.1216	0.0509	…

一般情况下，若以 θ 表示分布中的未知参数，对 θ 作假设检验时，可分别记 α、β 为 $\alpha(\theta)$、$\beta(\theta)$。

6.1.4　水平为 α 的检验

检验就是指判断准则。如在例 6.1.1 中，判断准则为"当平均观察值 $\bar{x}\geqslant c$ 时拒绝 H_0"就是一个检验，有时也可用样本空间上一个函数表示：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \bar{x}\geqslant c\\ 0, & \bar{x}<c\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示样本观测值，函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在拒绝域上取 1，在接受域上取 0。在一般场合，也可记为：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in W\\ 0, & \boldsymbol{x}\in A\end{cases} \tag{6.1.3}$$

用这种函数表示检验不仅简单明了，而且还可以用它来表示 α 与 β，由于 $\varphi(\boldsymbol{X})$

是统计量，其期望

$$E_\theta\varphi(\boldsymbol{X})=P_\theta(\boldsymbol{X}\in W)$$

其中下标 θ 表示用参数为 θ 的分布来计算的。容易看出，当 $\theta\in\Theta_0$ 时，

$$P_\theta(\boldsymbol{X}\in W)=\alpha(\theta)$$

当 $\theta\in\Theta_1$ 时，

$$P_\theta(\boldsymbol{X}\in A)=1-P_\theta(\boldsymbol{X}\in W)=\beta(\theta)$$

所以

$$g(\theta)=E_\theta\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\alpha(\theta), & \theta\in\Theta_0\\ 1-\beta(\theta), & \theta\in\Theta_1\end{cases}$$

假如一个问题中所立的假设为

$$H_0:\theta\leqslant\theta_0,\quad H_1:\theta>\theta_0$$

那么 $g(\theta)$ 便是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的一个函数，如今我们要控制犯第一类错误的概率 α，这相当于要求在 $\theta\leqslant\theta_0$ 时，$g(\theta)\leqslant\alpha$。若一个检验 $\varphi(\boldsymbol{X})$，使

$$g(\theta)=E_\theta\varphi(X)\leqslant\alpha,\qquad \theta\in\Theta_0$$

则称此检验是**水平为 α 的检验**。一般来讲，此种水平为 α 的检验不止一个，而我们要找的检验是在一切水平为 α 的检验中使犯第二类错误的概率尽可能小的检验。譬如在例 6.1.1 中，

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \bar{x}\geqslant 8350.9\\ 0, & \bar{x}<8350.9\end{cases}\tag{6.1.4}$$

是水平为 $\alpha=0.05$ 的检验，同样当 $c>8350.9$ 时，如临界值 c 取为 8351，8360 等，则

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \bar{x}\geqslant c\\ 0, & \bar{x}<c\end{cases}$$

也都是水平为 $\alpha=0.05$ 的检验，因为此时犯第一类错误的概率不会超过 0.05，但这一检验如前所述随着 c 的增大将会增大犯第二类错误的概率。为使犯第二类错误的概率尽可能小，我们取(6.1.4)中的 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 作为 $\alpha=0.05$ 水平的检验。

在水平为 α 的检验中，我们控制犯第一类错误的概率不超过 α，即在原假设 H_0 为真时，作出拒绝 H_0 的概率得到控制，这里又一次看到原假设是受到保护而不轻易否定的，因而在实际问题中常把不能轻易否定的命题作为原假设。

6.1.5 假设检验问题的类型

前面给出了假设检验的基本概念和具体步骤，但假设检验的方法是多种多样的，这要视被检验的问题来定。譬如：

(1)总体分布是已知的还是未知的。若总体分布已知，只是对其参数作假设检验，这种检验被称为**参数检验**，若总体分布未知，这时涉及的检验称为**非参数检验**。

(2)总体分布是正态还是非正态。若总体分布是正态的，其参数的假设检验问题已有较为成熟的检验法则，若总体分布已知但非正态，那就需要一个一个地讨论与解决，没有一般方法可言。

(3)当总体含有多个参数，除了要检验的参数外，其余参数是已知还是未知。

(4)备择假设 H_1 的选取涉及拒绝域的形式是单边的还是双边的。如例 6.1.1 中拒绝域形式为 $W=\{\bar{x}\geqslant c\}$，这种检验称为**单边检验**。如果拒绝域形式为 $W=\{T(\boldsymbol{x})\leqslant c_1$ 或 $T(\boldsymbol{x})\leqslant c_2\}$，这种检验称为**双边检验**，这里 $T(\boldsymbol{x})$ 是检验用的统计量。

(5)样本量的大小。用大样本的检验称为**大样本检验**，这时需用到检验统计量的极限分布，用小样本的检验称为**小样本检验**，这时需用到检验统计量的精确分布或近似分布。

(6)涉及总体个数，如例 6.1.1 只是涉及新菜单挂出后每天营业额的分布，因而只需抽取一个样本，这是**单样本的检验**。当涉及两个总体的分布或参数比较时，就需要**两样本的检验**。有时还会涉及更多总体的比较，第七章所讲的方差分析将涉及多个样本的检验。

例 6.1.2 某厂制造的产品长期以来不合格品率不超过 0.01，某天开工后，为检验生产过程是否稳定，随机抽检了 100 件产品，发现其中有 2 件不合格品。试判断该厂生产是否稳定。

设总体 X 为抽检一件产品中不合格品的件数，则 X 服从二点分布 $b(1,\theta)$，其中 θ 为产品的不合格品率，$0<\theta<1$。当生产稳定时 $\theta\leqslant 0.01$，当生产不稳定时 $\theta>0.01$。因此判断该天工厂生产是否稳定可转化为检验如下假设：

$$H_0: \theta\leqslant 0.01, \qquad H_1: \theta>0.01$$

这是一个离散总体参数的单边检验问题。

检验用的统计量常可以从 θ 的估计出发去寻找，在这个例子中 θ 的估计为 $\bar{X}$，因此可以用 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 作为检验统计量，在 n 确定时，也可以用 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$。当 H_0 为真时，$\bar{X}$ 不应过大，即 T 不会过大；当 H_0 不真时，$\bar{X}$ 较大，即 T 会取较大的值。因而当抽取样本后，可以根据 T 的值来下判断，当 $T\geqslant c$ 时认为 H_0 不真，故拒绝域为如下形式

$$W=\{T\geqslant c\}$$

这里 c 是临界值。

为在给定了显著性水平 α 后确定 c 的值，先来看一下 T 的分布。当 $X\sim b(1,\theta)$，样本和 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,\theta)$，从而犯两类错误的概率分别是 θ 的函数：

$$\alpha(\theta)=P_\theta(T\geqslant c)=\sum_{j=c}^{100}\binom{100}{j}\theta^j(1-\theta)^{100-j},\quad 0<\theta\leqslant 0.01$$

$$\beta(\theta)=P_\theta(T<c)=\sum_{j=0}^{c-1}\binom{100}{j}\theta^j(1-\theta)^{100-j},\quad 0.01<\theta<1$$

下表列出了若干 θ 值下，不同 c 对应的 $\alpha(\theta)$ 与 $\beta(\theta)$ 的值：

表 6.1.2　例 6.1.2 中对不同的 c 值给出的若干 $\alpha(\theta)$，$\beta(\theta)$

c	1	2	3	4	5	6	…
$\alpha(0.005)$	0.394	0.090	0.014	0.002	0.0002	0.00001	…
$\alpha(0.01)$	0.634	0.264	0.079	0.018	0.003	0.0005	…
$\beta(0.04)$	0.017	0.087	0.232	0.429	0.629	0.788	…
$\beta(0.08)$	0.0002	0.002	0.011	0.037	0.090	0.180	…

由这几个值上可见，对固定的 c，在 $\theta\leqslant 0.01$ 时，$\alpha(\theta)$ 随 θ 的增大而增大；在 $\theta>0.01$ 时，$\beta(\theta)$ 的值随 θ 的增大而减小，所以在 $\theta\leqslant 0.01$ 时，可选择 $\theta=0.01$ 时满足 $\alpha(\theta)\leqslant\alpha$ 的 c 即可；又从上表可见，对固定的 $\theta>0.01$，随着 c 的增大，$\beta(\theta)$ 也将增大。因此应选取使 $\alpha(0.01)\leqslant\alpha$ 时对应的最小的 c 值，即使 $\alpha(0.01)\leqslant\alpha$ 又最靠近 α 的那个 c 值，以控制犯第二类错误的概率。综上，在 $\alpha=0.01$ 时，可取临界值 $c=3$，从而拒绝域为

$$W=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant 3\right\}$$

当由样本观测值知不合格品数不少于 3 个时拒绝 H_0，不到 3 个时保留 H_0，现在由样本得 $T=2$ 落在接受域中，故保留 H_0，即认为该天生产稳定。

§ 6.2　正态总体参数的假设检验

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 是常用的分布，关于 μ 与 σ^2 的有关检验也是实际中常常遇到的，下面分几种情况加以讨论。

6.2.1 关于均值的检验

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，样本均值为 $\overline{X}$，样本的无偏方差为 S^2，现要考虑关于均值 μ 的检验问题。

6.2.1.1 σ 已知的情况

根据原假设 H_0 与备择假设 H_1 的不同，分别加以考虑：

(1)单边假设检验问题。

考虑检验问题

$$H_0:\mu\leqslant\mu_0,\quad H_1:\mu>\mu_0 \tag{6.2.1}$$

这里 μ_0 是一个已知常数。

由于 μ 常用 $\overline{X}$ 来估计，因而取 $\overline{X}$ 作为检验统计量。相对于备择假设 H_1 来讲，当原假设 H_0 为真时，$\overline{X}$ 不应太大，$\overline{X}$ 过大时，应拒绝 H_0，因而拒绝域应有如下形式：

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\overline{x}\geqslant c\}$$

其中 c 为待定的临界值。

由于 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，故犯第一类错误的概率为

$$\alpha(\mu)=P_\mu(\overline{X}\geqslant c)=1-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right),\quad \mu\leqslant\mu_0$$

在 $\mu\leqslant\mu_0$ 时，$\alpha(\mu)$是 μ 的严增函数，故其最大值在 $\mu=\mu_0$ 处达到，从而对给定 α，要求 c 满足

$$1-\Phi\left(\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\alpha$$

则$\frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=u_{1-\alpha}$，即临界值

$$c=\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}$$

从而得拒绝域为

$$W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\overline{x}\geqslant\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right\} \tag{6.2.2}$$

(6.2.2)也可写成另一种形式：

$$W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$$

亦可取

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{6.2.3}$$

为检验统计量，u 为其取值，这时拒绝域可记为 $W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):u\geqslant u_{1-\alpha}\}$，今后简记作

$$W=\{u\geqslant u_{1-\alpha}\} \tag{6.2.4}$$

以后称以 U 作为检验统计量的检验为 U **检验**。

例 6.2.1 微波炉在炉门关闭时的辐射量是一个重要的质量指标。某厂该指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，常期以来 $\sigma=0.1$，且均值都符合要求不超过 0.12。为检查近期产品的质量，抽查了 25 台，得其炉门关闭时辐射量的均值 $\bar{x}=0.1203$。试问在 $\alpha=0.05$ 水平上该厂炉门关闭时辐射量是否升高了？

解：首先建立假设。由于长期以来该厂 $\mu\leqslant0.12$，故将其作为原假设，有

$$H_0:\mu\leqslant0.12,\quad H_1:\mu>0.12$$

在 $\alpha=0.05$ 时，$u_{0.95}=1.645$，拒绝域应为 $\{u\geqslant1.645\}$。现由观测值求得

$$u=\frac{0.1203-0.12}{0.1/\sqrt{25}}=0.015<1.645$$

因而在 $\alpha=0.05$ 水平下，不能拒绝 H_0，即认为当前生产的微波炉关门时的辐射量无明显升高。

另一种类型的单边检验问题是

$$H_0:\mu\geqslant\mu_0\quad,\quad H_1:\mu<\mu_0 \tag{6.2.5}$$

此时，若取(6.2.3)为检验统计量，则拒绝域应改为

$$W=\{u\leqslant u_\alpha\} \tag{6.2.6}$$

因为根据 H_1 可知，当 $\overline{X}$ 较小的时候应拒绝 H_0，此时犯第一类错误的概率

$$\alpha(\mu)=P_\mu(\overline{X}\leqslant c)=\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right),\quad \mu\geqslant\mu_0$$

这是 μ 的严减函数，在 $\mu=\mu_0$ 时取最大值，因而可要求

$$\Phi\left(\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\alpha$$

从而由 $N(0,1)$ 的分位数知 $\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=u_\alpha$，即 $c=\mu_0+u_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，由于 $\overline{X}\leqslant\mu_0+u_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 等价于 $U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant u_\alpha$，故(6.2.6)是检验问题(6.2.5)的水平为 α 的检验的拒绝域。

例 6.2.2 某厂生产需用玻璃纸作包装，按规定供应商供应的玻璃纸的

横向延伸率不应低于 65。已知该指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，σ 一直稳定于 5.5。从近期来货中抽查了 100 个样品，得样本均值 $\bar{x}=55.06$，试问在 $\alpha=0.05$ 水平上能否接收这批玻璃纸？

解：由于若不接收这批玻璃纸需作退货处理，这必须慎重，故取 $\mu<65$ 作为备择假设，从而所建立的假设为

$$H_0:\mu\geqslant 65,\qquad H_1:\mu<65$$

在 $\alpha=0.05$ 时，$u_\alpha=-1.645$，拒绝域应取作 $\{u\leqslant -1.645\}$。现由样本求得

$$u=\frac{55.06-65}{5.5/\sqrt{100}}=-18.07<-1.645$$

故应拒绝 H_0，不能接收这批玻璃纸。

(2)双边假设检验问题。

考虑检验问题

$$H_0:\mu=\mu_0,\qquad H_1:\mu\neq\mu_0 \tag{6.2.7}$$

仍可取(6.2.3)作为检验统计量。由于相对于 H_1 来讲，当 H_0 为真时，$\overline{X}$ 与 μ_0 不应相差过大，故拒绝域形为 $\{|\bar{x}-\mu_0|\geqslant c\}$，由于在 H_0 中仅含一个参数值，故要使犯第一类错误概率不超过 α，只要 $P_{\mu_0}(|\overline{X}-\mu_0|\geqslant c)=\alpha$ 即可，这等价于 $P_{\mu_0}\left(|U|\geqslant\frac{c}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\alpha$，此时只要取 $\frac{c}{\sigma\sqrt{n}}=u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 便可，从而检验问题(6.2.7)的水平为 α 的检验的拒绝域为

$$W=\{|u|\geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \tag{6.2.8}$$

例 6.2.3 某洗涤剂厂有一台瓶装洗洁精的灌装机，在生产正常时，每瓶洗洁精的净重服从正态分布，均值为 454g，标准差为 12g。为检查近期机器工作是否正常，从中抽出 16 瓶，称得其净重的平均值为 $\bar{x}=456.64g$。试对机器工作正常与否作出判断。(取 $\alpha=0.01$，并假定 σ 不变。)

解：这里需检验的假设为：

$$H_0:\mu=454\qquad H_1:\mu\neq 454$$

在 $\alpha=0.01$ 时，$u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.995}=2.58$，从而拒绝域为 $\{|u|\geqslant 2.58\}$。现由样本求得

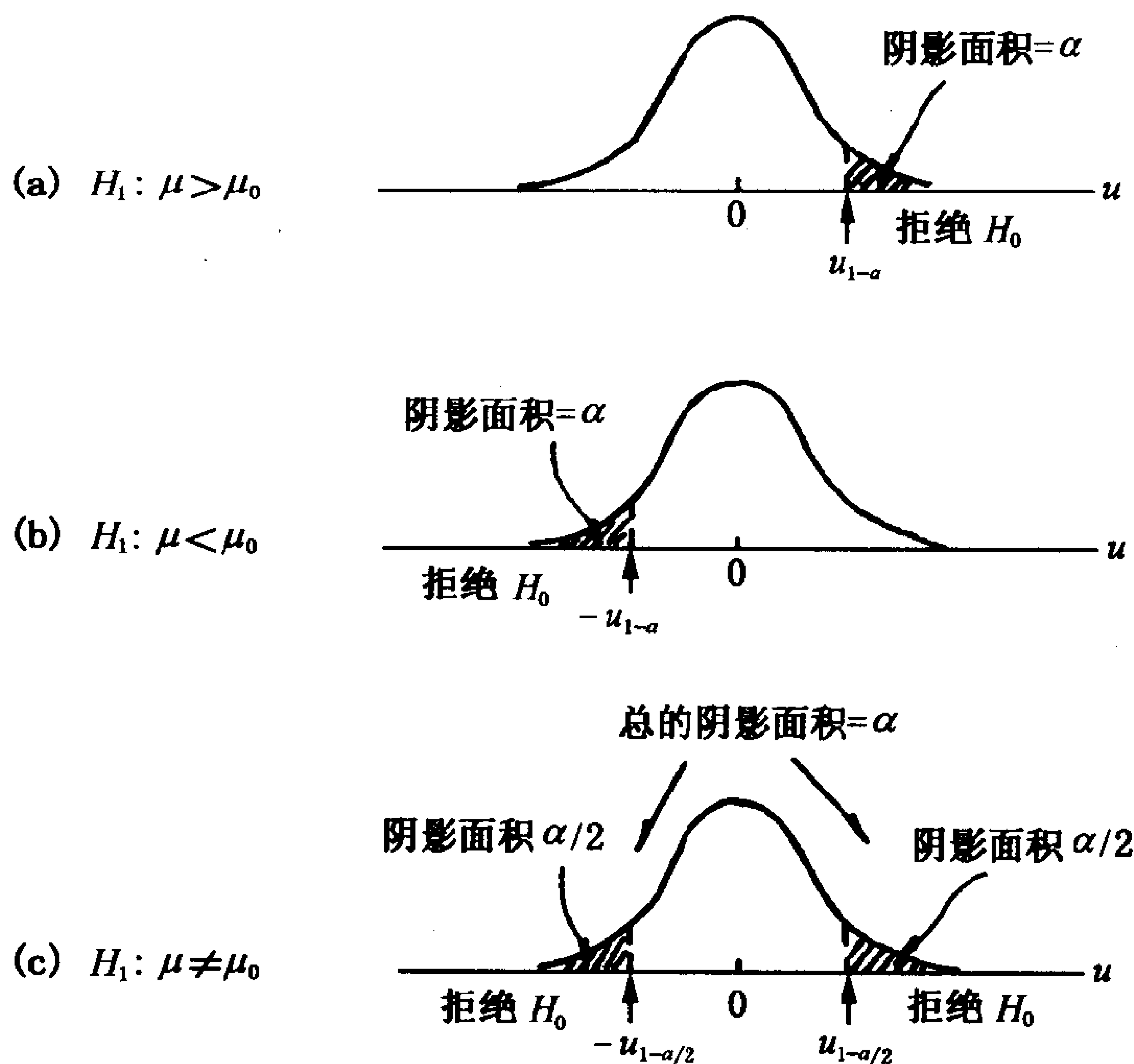
$$u=\frac{456.64-454}{12/\sqrt{16}}=0.88$$

由于 $|u|<2.58$，故不能拒绝 H_0，即认为机器正常。

前面已提到在建立假设时并不要求 Θ_0 与 Θ_1 之并为 Θ，譬如检验问题 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$，其水平为 α 的检验的拒绝域仍为(6.2.4)；同理，检验问题 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$，其水平为 α 的检验的拒绝域仍为(6.2.6)。检验的拒

绝域的形式由 H_1 决定，而临界值实际上是由 $\mu=\mu_0$ 时 U 的分布所决定的，在 $\mu=\mu_0$ 时，$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，因此拒绝域(6.2.4)中的临界值为 $u_{1-\alpha}$，拒绝域(6.2.6)中的临界值为 u_α，拒绝域(6.2.8)中为 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$。

图 6.2.1 中给出了不同备择假设、拒绝域和显著性水平。



(图中曲线为 $N(0,1)$ 的密度函数曲线)

图 6.2.1 备择假设、拒绝域和显著性水平

6.2.1.2 σ 未知的情况

可同样考虑前面提到的三个检验问题：

(1)$H_0:\mu\leqslant\mu_0$ ， $H_1:\mu>\mu_0$ (6.2.1)

(2)$H_0:\mu\geqslant\mu_0$ ， $H_1:\mu<\mu_0$ (6.2.5)

(3)$H_0:\mu=\mu_0$ ， $H_1:\mu\neq\mu_0$ (6.2.7)

但现在不能用 U 作为检验统计量，因为它含有未知数参数 σ，一个自然的想法是用 σ^2 的无偏估计 S^2 去取代 σ^2，采用统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{6.2.9}$$

对检验问题(6.2.1)来讲，其拒绝域为

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):t\geqslant c\}$$

其中 c 应满足

$$\alpha(\mu)=P_\mu(t\geqslant c)\leqslant\alpha \quad , \quad \mu\leqslant\mu_0$$

它在 $\mu=\mu_0$ 时达到最大，这是因为对固定的 μ 而言 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}+\dfrac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，其中 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，当记 $F_{t(n-1)}(x)$ 为自由度是 $n-1$ 的 t 分布的分布函数时，有

$$\alpha(\mu)=P_\mu(t\geqslant c)=P_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\geqslant c-\frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$=1-F_{t(n-1)}\left(c-\frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right) \quad , \quad \mu\leqslant\mu_0$$

当 μ 增大时，$\alpha(\mu)$ 将增大，在 $\mu=\mu_0$ 处达到最大，故只要取 $\alpha(\mu_0)=\alpha$。而在 $\mu=\mu_0$ 时，$t\sim t(n-1)$，从而 $c=t_{1-\alpha}(n-1)$。所以检验问题(6.2.1)的水平为 α 的检验的拒绝域为

$$W=\{t\geqslant t_{1-\alpha}(n-1)\} \tag{6.2.10}$$

对检验问题(6.2.5)与(6.2.7)来讲，水平为 α 的检验的拒绝域分别为

$$W=\{t\leqslant t_\alpha(n-1)\} \tag{6.2.11}$$

及

$$W=\{|t|\geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} \tag{6.2.12}$$

称以(6.2.9)为检验统计量的检验为 **t 检验**。

例 6.2.4 根据某地环境保护法规定，倾入河流的废水中某种有毒化学物质含量不得超过 3ppm。该地区环保组织对沿河各厂进行检查，测定每日倾入河流的废水中该物质的含量。某厂连日的记录为

3.1 3.2 3.3 2.9 3.5 3.4 2.5 4.3

2.9 3.6 3.2 3.0 2.7 3.5 2.9

试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 上判断该厂是否符合环保规定(假定废水中有毒物质含量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$)。

解： 为判断是否符合环保规定，可提出如下假设：

$$H_0:\mu\leqslant 3 \quad , \quad H_1:\mu>3$$

由于这里 σ 未知，故采用 t 检验，现在 $n=15$，在 $\alpha=0.05$ 时 $t_{0.95}(14)=1.7613$，故拒绝域为

$$\{t>1.7613\}$$

现根据样本求得 $\bar{x}=3.2, s=0.436$，从而有

$$t=\frac{3.2-3}{0.436/\sqrt{15}}=1.7766>1.7613$$

样本落入拒绝域，因此在 $\alpha=0.05$ 水平上认为该厂废水中有毒物质含量超标，不符合环保规定，应采取措施来降低废水中有毒物质的含量。

综上，将关于正态总体均值检验的有关结果列在表 6.2.1 中以便查找。

表 6.2.1　正态总体均值的假设检验

（显著性水平为 α）

检验法	条件	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域
U 检验	σ 已知	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\{u\geqslant u_{1-\alpha}\}$ $\{u\leqslant u_\alpha\}$ $\{\lvert u\rvert\geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$
t 检验	σ 未知	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\{t\geqslant t_{1-\alpha}(n-1)\}$ $\{t\leqslant t_\alpha(n-1)\}$ $\{\lvert t\rvert\geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

6.2.2 关于方差的检验

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，样本均值为 $\overline{X}$，样本的无偏方差为 S^2，现在讨论 μ 未知时关于方差 σ^2 的检验问题。

6.2.2.1　单边假设检验问题

首先考虑检验问题

$$H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2,\quad H_1:\sigma^2>\sigma_0^2 \tag{6.2.13}$$

其中 σ_0^2 为一正的常数。σ^2 常用样本方差 S^2 去估计，考虑到 H_1，则拒绝域应为

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):s^2\geqslant c\}$$

考虑检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \tag{6.2.14}$$

由于 $S^2\geqslant c$ 这一事件等于 $\chi^2\geqslant c^*$，c^* 为临界值，待定。此时犯第一类错误的概率

$$\alpha(\sigma^2)=P_{\sigma^2}(\chi^2\geqslant c^*),\quad \sigma^2\leqslant\sigma_0^2$$

这是 σ^2 的严增函数，这可从下面看出。若以 $F_{\chi^2(n-1)}(x)$ 记自由度是 $n-1$ 的 χ^2

分布的分布函数，那么对固定的 $\sigma^2(\sigma^2\leqslant\sigma_0^2)$，有 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，从而 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$，此时

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma^2)&=P(\chi^2\geqslant c^*)\\&=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\geqslant c^*\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)=1-F_{\chi^2(n-1)}\left(c^*\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

当 σ^2 增大时，$\alpha(\sigma^2)$将增大，因此在 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 时，$\alpha(\sigma^2)$达到最大。故对给定的显著性水平 α，只要在 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 时，$\alpha(\sigma_0^2)=\alpha$，那么此时 $\chi^2\sim\chi^2(n-1)$，从而可取 $c^*=\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$。

综上，对检验问题(6.2.13)，可用(6.2.14)作为检验统计量，水平为 α 的检验的拒绝域为

$$W=\{\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\} \tag{6.2.15}$$

同理，对另一单边检验问题

$$H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2,\qquad H_1:\sigma^2<\sigma_0^2 \tag{6.2.16}$$

仍可用(6.2.14)作检验统计量，此时水平为 α 的检验的拒绝域为

$$W=\{\chi^2\leqslant\chi^2_{\alpha}(n-1)\} \tag{6.2.17}$$

6.2.2.2　双边假设检验问题

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,\qquad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

仍可用检验统计量(6.2.14)，此时拒绝域为

$$W=\{\chi^2\leqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{或 }\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} \tag{6.2.18}$$

称以(6.2.14)为检验统计量的检验为 χ^2 **检验**。

将关于正态总体方差检验的有关结果列于表 6.2.2 中以便查找。

表 6.2.2　正态总体方差的假设检验

(显著性水平为 α)

检验法	条件	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域
χ^2 检验	μ 未知	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\{\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$
		$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\{\chi^2\leqslant\chi^2_{\alpha}(n-1)\}$
		$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$		$\{\chi^2\leqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

例 6.2.5　某种导线的电阻服从 $N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，其中一个质量指标是

电阻标准差不得大于 0.005Ω。现从中抽取了九根导线测其电阻，测得样本标准差 $s=0.0066$，试问在 $\alpha=0.05$ 水平上能否认为这批导线的电阻波动合格？

解：首先建立假设

$$H_0:\sigma\leqslant 0.005,\qquad H_1:\sigma>0.005$$

这是一个单边检验，在 $n=9,\alpha=0.05$ 时，$\chi^2_{0.95}(8)=15.507$，拒绝域为

$$W=\{\chi^2\geqslant 15.507\}$$

现由样本求得

$$\chi^2=\frac{8\times 0.0066^2}{0.005^2}=13.94<15.507$$

故可接受原假设，在 $\alpha=0.05$ 水平上认为这批导线的电阻波动合格。

6.2.3 关于两个正态总体方差的检验

设从正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，其样本均值与样本无偏方差分别记为 $\overline{X},S_X^2$，从另一正态总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中获得样本 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，其样本均值与样本无偏方差分别记为 $\overline{Y}$、S_Y^2，且两个样本独立。

这里假定 μ_1,μ_2 未知，考虑有关方差大小的检验问题。

先考虑单边检验问题：

$$H_0:\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2 \tag{6.2.19}$$

也可将上述检验问题记为：

$$H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leqslant 1,\quad H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1 \tag{6.2.20}$$

由于常用 S_X^2 与 S_Y^2 分别估计 σ_1^2 与 σ_2^2，因而可考虑通过比较 S_X^2 与 S_Y^2 的大小来判断。现考虑统计量

$$F=\frac{S_X^2}{S_Y^2} \tag{6.2.21}$$

考虑到 H_1，因而可取拒绝域为

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m):F\geqslant c\}$$

c 为临界值，待定。

对固定的 σ_1^2 与 σ_2^2，$\dfrac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}=F\cdot\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n-1,m-1)$，记 $F_{F(n-1,m-1)}(x)$ 为自由度是 $n-1,m-1$ 的 F 分布的分布函数，则犯第一类错误的概率为：

$$\alpha\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)=P(F\geqslant c)=P\left(\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}\geqslant c\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)$$

$$=1-F(c\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}),\quad \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\leqslant 1$$

它是$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的增函数，它在$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$时达到最大，故只要$\alpha(1)=\alpha$便可得水平为$\alpha$的检验的拒绝域。在$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$时，$F\sim F(n-1,m-1)$，故$c=F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$。从而检验问题(6.2.19)的水平为$\alpha$的检验的拒绝域为

$$W=\{F\geqslant F_{1-\alpha}(n-1,m-1)\} \tag{6.2.22}$$

同理可得检验问题

$$H_0:\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2 \tag{6.2.23}$$

与

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2 \tag{6.2.24}$$

的水平为α的拒绝域分别是

$$\{F\leqslant F_{\alpha}(n-1,m-1)\} \tag{6.2.25}$$

与

$$\{F\leqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\text{或}F\geqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\} \tag{6.2.26}$$

用(6.2.21)作检验统计量的检验称为 **F 检验**。有关结果列于表 6.2.3。

表 6.2.3　两个正态总体方差的假设检验

(μ_1,μ_2未知，显著性水平为α)

检验法	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域
F 检验	$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\frac{S_X^2}{S_Y^2}$	$\{F\geqslant F_{1-\alpha}(n-1,m-1)\}$
	$\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$\{F\leqslant F_{\alpha}(n-1,m-1)\}$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$		$\{F\leqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$或$F\geqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\}$

例 6.2.6　甲、乙两台机床分别加工某种轴，轴的直径分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$与$N(\mu_1,\sigma_2^2)$，为比较两台机床的加工精度有无显著差异。从各自加工的轴中分别抽取若干根轴测其直径，结果如下(取$\alpha=0.05$)：

总体	样本容量	直径							
X(机床甲)	8	20.5	19.8	19.7	20.4	20.1	20.0	19.0	19.9
Y(机床乙)	7	20.7	19.8	19.5	20.8	20.4	19.6	20.2	

解：首先建立假设：

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\qquad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

在 $n=8,m=7,\alpha=0.05$ 时

$$F_{0.025}(7,6)=\frac{1}{F_{0.975}(6,7)}=\frac{1}{5.12}=0.195,\quad F_{0.975}(7,6)=5.70$$

故拒绝域为

$$\{F\leqslant 0.195 \text{ 或 } F\geqslant 5.70\}$$

现由样本求得 $s_X^2=0.2164, s_Y^2=0.2729$，从而 $F=0.793$，未落入拒绝域，因而在 $\alpha=0.05$ 水平上可认为两台机床加工精度一致。

6.2.4 关于两个正态总体均值差的检验

如同 6.2.3 中所述的两个样本，讨论有关均值大小的检验问题。分几种情况讨论。

6.2.4.1 σ_1 与 σ_2 已知的场合

先考虑假设检验问题

$$H_0:\mu_1\leqslant\mu_2,\quad H_1:\mu_1>\mu_2 \tag{6.2.27}$$

这相当于考虑检验问题：

$$H_0:\mu_1-\mu_2\leqslant 0,\quad H_1:\mu_1-\mu_2>0 \tag{6.2.28}$$

由于可用 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 分别估计 μ_1 与 μ_2，因而考虑到 H_1，取拒绝域形为

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m):\overline{x}-\overline{y}\geqslant c\}$$

其中 c 是待定的临界值。

由于 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right)$，故对给定的显著性水平 α，c 应由下式决定

$$\begin{aligned}\alpha(\mu_1-\mu_2)&=P\{\overline{X}-\overline{Y}\geqslant c\}\\&=1-\Phi\left[\frac{c-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right]\leqslant\alpha,\qquad \mu_1-\mu_2\leqslant 0\end{aligned}$$

考虑到 $\alpha(\mu_1-\mu_2)$ 在 $\mu_1-\mu_2=0$ 时达到最大值，故可取 $\frac{c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}=u_{1-\alpha}$。即 $c=u_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}$，如同第六章 6.2.1 中的考虑，取检验统计量为

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \tag{6.2.29}$$

拒绝域$\{\bar{x}-\bar{y}\geqslant u_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\}$等价于

$$W=\{u\geqslant u_{1-\alpha}\} \tag{6.2.30}$$

从而检验问题(6.2.27)的水平为 α 的检验拒绝域为(6.2.30)。

同理可得检验问题

$$H_0:\mu_1\geqslant\mu_2,\qquad H_1:\mu_1<\mu_2 \tag{6.2.31}$$

与

$$H_0:\mu_1=\mu_2,\qquad H_1:\mu_1\neq\mu_2 \tag{6.2.32}$$

的 α 水平的拒绝域分别为

$$W=\{u\leqslant u_\alpha\} \tag{6.2.33}$$

与

$$W=\{|u|\geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \tag{6.2.34}$$

也称用统计量(6.2.29)的检验为 U 检验。

6.2.4.2 σ_1，σ_2 未知，但$\sigma_1=\sigma_2$ 的场合

在这种场合，记 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，$\sigma^2$ 可用

$$S_W^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2} \tag{6.2.35}$$

去估计，采用检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \tag{6.2.36}$$

其中 $S_W=\sqrt{S_W^2}$。

仍考虑检验问题(6.2.28)，此时拒绝域$\{\bar{x}-\bar{y}\geqslant c\}$中的 c 可由下式决定：

$$\alpha(\mu_1-\mu_2)=P\{\bar{x}-\bar{y}\geqslant c\}$$

$$=1-P\left\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\geqslant\frac{c-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\right\}\leqslant\alpha,\quad \mu_1-\mu_2\leqslant 0$$

当 $\mu_1-\mu_2=0$ 时，达到最大值，而在 $\mu_1=\mu_2$ 时，$t\sim t(n+m-2)$，故可取

$\dfrac{c}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}=t_{1-\alpha}(n+m-2)$，即 $c=t_{1-\alpha}(n+m-2)S_W\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}$，从而拒绝域为 $\{\bar{x}-\bar{y}\geqslant t_{1-\alpha}(n+m-2)S_W\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}\}$，这等价于

$$W=\{t\geqslant t_{1-\alpha}(n+m-2)\} \tag{6.2.37}$$

同理可得检验问题(6.2.31)与(6.2.32)的水平为 α 的检验的拒绝域分别为

$$W=\{t\leqslant t_{\alpha}(n+m-2)\} \tag{6.2.38}$$

与

$$W=\{|t|\geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\} \tag{6.2.39}$$

也称以(6.2.36)为检验统计量的检验为 t 检验。

例 6.2.7 设例 6.2.6 中两台机床加工的轴是同类的，其直径分别服从正态分布，经例 6.2.6 的 F 检验已确认其方差相等，即认为甲、乙两台机床加工的直径分别服从 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma^2)$，现进一步检验两台机床加工的轴的平均直径是否一致(取 $\alpha=0.05$)。

解：对此问题相当于检验

$$H_0:\mu_1=\mu_2,\qquad H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

由于两总体方差一致但未知，故用统计量(6.2.36)，在 $n=8,m=7,\alpha=0.05$ 时，$t_{0.975}(13)=2.1604$，从而拒绝域为

$$\{|t|>2.1604\}$$

现由样本求得 $\bar{x}=19.295,\bar{y}=20.143,s_W^2=0.2425,s_W=0.4924$，则 $t=-0.8554$，由于 $|t|<2.1604$，故可认为在 $\alpha=0.05$ 水平上，两台机床加工的轴的平均直径一致。

6.2.4.3 σ_1 与 σ_2 未知的一般场合

这里给出两种近似检验方法。

(1) n 与 m 不太大时：

这时 $\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n}\right)$，$\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{m}\right)$，且两者独立，从而 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}\right)$，故

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$$

当 σ_1^2 与 σ_2^2 分别用其相合估计 S_X^2, S_Y^2 代替后，记

$$t^* = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}} \tag{6.2.40}$$

这时 t^* 就不再服从 $N(0,1)$ 分布了，其形式很象 t 统计量。因此人们就设法用 t 统计量去拟合，结果发现，若取

$$l=\left(\frac{s_X^2}{n}+\frac{s_Y^2}{m}\right)^2 \Big/ \left(\frac{s_X^4}{n^2(n-1)}+\frac{s_Y^4}{m^2(m-1)}\right) \tag{6.2.41}$$

l 非整数时取最接近的整数，则 t^* 近似服从自由度是 l 的 t 分布，即 $t^* \sim t(l)$，于是可用 t^* 作为检验统计量，对如下三类检验问题

$$(1) H_0: \mu_1-\mu_2 \leqslant 0 \qquad H_1: \mu_1-\mu_2>0$$

$$(2) H_0: \mu_1-\mu_2 \geqslant 0 \qquad H_1: \mu_1-\mu_2<0$$

$$(3) H_0: \mu_1-\mu_2 = 0 \qquad H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$$

的拒绝域分别为

$$W_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): t^* \geqslant t_{1-\alpha}(l)\}$$

$$W_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): t^* \leqslant t_\alpha(l)\}$$

$$W_3=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): |t^*| \geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\}$$

(2)当 n 与 m 较大时：

当 n 与 m 较大时，(6.2.41)式中的 l 也将随之而增大，我们知道，当 $l \geqslant 30$ 时，自由度为 l 的 t 分布就很接近于正态分布 $N(0,1)$，故在 n 与 m 较大时，我们将(6.2.40)中的 t^* 改记为 U，并认为 U 近似服从 $N(0,1)$ 分布，对上述三类检验问题分别采用拒绝域：

$$W_1=\{u \geqslant u_{1-\alpha}\}$$

$$W_2=\{u \leqslant u_\alpha\}$$

$$W_3=\{|u| \geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

例 6.2.8 设甲、乙两种矿石中含铁量分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_1,\sigma_2^2)$，现分别从两种矿石中各取若干样品测其含铁量，其样本量、样本均值和样本无偏方差分别为：

甲矿石：$n=10, \bar{x}=16.01, s_X^2=10.80$

乙矿石：$m=5, \bar{y}=18.98, s_Y^2=0.27$

试在 $\alpha=0.01$ 水平上，检验下述假设：甲矿石含铁量不低于乙矿石的含铁量。

解：这里的检验问题为

$$H_0: \mu_1 \geqslant \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

由于这里 n, m 都不大，且 s_X^2 与 s_Y^2 又相差甚大。故拟采用(6.2.40)中的 t^* 统计量作检验。此时

$$l = \left(\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} \right)^2 \Bigg/ \left(\frac{s_X^4}{n(n-1)} + \frac{s_Y^4}{m(m-1)} \right) = 9.87$$

此时可取与其最接近的整数代替，故取 $l=10$。在 $\alpha=0.01$ 时，$t_{0.01}(10) = -2.7638$，则拒绝域为：

$$W = \{t^* \leqslant -2.7638\}$$

现由样本求得 $t^* = -2.789$，由于样本落入拒绝域，故在 $\alpha=0.01$ 水平上拒绝 H_0，认为甲矿石含铁量明显低于乙矿石的含铁量。

有关两个正态总体均值的假设检验的结果列于表 6.2.4。

表 6.2.4　两正态总体均值的假设检验

(显著性水平为 α)

检验法	条件	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域
U 检验	σ_1, σ_2 已知	$\mu_1 \leqslant \mu_2$ $\mu_1 \geqslant \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$	$\{u \geqslant u_{1-\alpha}\}$ $\{u \leqslant u_\alpha\}$ $\{\lvert u \rvert \geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$
t 检验	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 未知	$\mu_1 \leqslant \mu_2$ $\mu_1 \geqslant \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_W \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$	$\{t \geqslant t_{1-\alpha}(n+m-2)\}$ $\{t \leqslant t_\alpha(n+m-2)\}$ $\{\lvert t \rvert \geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\}$
近似 U 检验	σ_1, σ_2 未知 m, n 充分大	$\mu_1 \leqslant \mu_2$ $\mu_1 \geqslant \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}}}$	$\{u \geqslant u_{1-\alpha}\}$ $\{u \leqslant u_\alpha\}$ $\{\lvert u \rvert \geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$
近似 t 检验	σ_1, σ_2 未知 m, n 不太大	$\mu_1 \leqslant \mu_2$ $\mu_1 \geqslant \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$t^* = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}}}$	$\{t^* \geqslant t_{1-\alpha}(l)\}$ $\{t^* \leqslant t_\alpha(l)\}$ $\{\lvert t^* \rvert \geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\}$

其中 $S_W = \sqrt{\dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}$，$l = \left(\dfrac{s_X^2}{n} + \dfrac{s_Y^2}{m} \right)^2 \Bigg/ \left(\dfrac{s_X^4}{n^2(n-1)} + \dfrac{s_Y^4}{m^2(m-1)} \right)$。

§6.3 比率 p 的检验

在实际问题中，除了正态总体外还会遇到其它一些总体。本节讨论二点分布总体中参数 p 的检验问题。

6.3.1 关于比率 p 的检验

在例 6.1.2 中所给出的检验实际上便是关于 p 的一个检验问题。这里我们作一般叙述。

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自二点分布 $b(1,p)$。关于参数 p 的检验问题也有三种类型：

$$(1)H_0:p\leqslant p_0,\quad H_1:p>p_0 \tag{6.3.1}$$

$$(2)H_0:p\geqslant p_0,\quad H_1:p<p_0 \tag{6.3.2}$$

$$(3)H_0:p=p_0,\quad H_1:p\neq p_0 \tag{6.3.3}$$

在例 6.1.2 中已指出可用统计量

$$T=\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{6.3.4}$$

作检验，针对上述三个检验问题拒绝域应分别取如下形式：

$$W=\{T\geqslant c\} \tag{6.3.5}$$

$$W=\{T\leqslant c'\} \tag{6.3.6}$$

$$W=\{T\leqslant c_1 \text{ 或 } T\geqslant c_2\},\quad c_1<c_2 \tag{6.3.7}$$

为获得水平为 α 的检验，就需要定出各自拒绝域中的临界值 c,c',c_1,c_2。下面给出几种确定临界值的方法。

6.3.1.1 利用二项分布来决定临界值

在例 6.1.2 中已指出对检验问题(6.3.1)而言，犯第一类错误的概率 $\alpha(p)=P_p(T\geqslant c)$ 是 p 的增函数，因而只要求 $\alpha(p_0)\leqslant\alpha$，且拒绝域不能再扩大。由于 $p=p_0$ 时统计量 $T\sim b(n,p_0)$，故 c 是满足下式的最小整数：

$$\alpha(p_0)=P_{p_0}(T\geqslant c)=\sum_{i=c}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}\leqslant\alpha \tag{6.3.8}$$

同理可得其它检验问题的拒绝域。结果列于表 6.3.1。

6.3.1.2 用F 分布来决定临界值

在第五章§5.6 中指出了二项分布与 F 分布的关系，有

$$\sum_{i=c}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}=F\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{p_0}{1-p_0};\nu_1,\nu_2\right)$$

右端是自由度为 ν_1,ν_2 的 F 分布的分布函数在$\frac{\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{p_0}{1-p_0}$处的值，其中 $\nu_1=2c$，$\nu_2=2(n-c+1)$。为求出使(6.3.8)式成立的最小整数 c，便是要求使 $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)\geqslant\frac{\nu_2 p_0}{\nu_1(1-p_0)}\left(\text{或 } F_{1-\alpha}(\nu_2,\nu_1)\leqslant\frac{\nu_1(1-p_0)}{\nu_2 p_0}\right)$成立的最小整数。对其它检验问题由此决定的临界值也列于表 6.3.1 中。

6.3.1.3 大样本情况下由正态分布来近似确定临界值

在大样本情况下，(6.3.8)中的概率可用正态分布作近似计算，此时$\frac{T-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$近似 $N(0,1)$分布，从而

$$\sum_{i=c}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}\approx1-\Phi\left[\frac{c-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right]\leqslant\alpha \qquad (6.3.9)$$

则 c 是满足

$$c\geqslant np_0+u_{1-\alpha}\sqrt{np_0(1-p_0)} \qquad (6.3.10)$$

的最小整数。通常由于二项分布是离散的，正态分布是连续的，为此作一修正(见第二章)，将(6.3.10)改为：

$$c\geqslant np_0+0.5+u_{1-\alpha}\sqrt{np_0(1-p_0)} \qquad (6.3.11)$$

对其它检验问题也可用此方法来求临界值，结果也列在表 6.3.1 中。

例 6.3.1 某厂产品的优质品率一直保持在 40%，近期技监部门来厂抽查，共抽查了 12 件产品，其中优质品为 5 件，在 $\alpha=0.05$ 水平上能否认为其优质品率仍保持在 40%？

解：以 X 记检查一个产品时优质品的个数，则 $X\sim b(1,p)$。检验问题为：

$$H_0: p=0.4, \qquad H_1: p\neq0.4$$

拒绝域为

$$\{T\leqslant c_1 \text{ 或 } T\geqslant c_2\}, \quad c_1<c_2$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{12}X_i$。c_1 与 c_2 应满足：当 $p_0=0.4$ 时

使 $p(T\leqslant c_1)\leqslant\frac{\alpha}{2}$成立的最大整数；

使 $p(T\geqslant c_2)\leqslant\frac{\alpha}{2}$成立的最小整数。

表 6.3.1　比率 p 的检验（显著性水平 α）

检验统计量 $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$

H_0		$p\leqslant p_0$	$p\geqslant p_0$	$p=p_0$
H_1		$p>p_0$	$p<p_0$	$p\neq p_0$
拒绝域		$\{T\geqslant c\}$	$\{T\leqslant c\}$	$\{T\leqslant c_1$ 或 $T\geqslant c_2\}$
临界值确定方法	二项分布	c 为满足 $\sum_{i=c}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}\leqslant\alpha$ 的最小整数	c 为满足 $\sum_{i=0}^{c}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}\leqslant\alpha$ 的最大整数	c_1 为满足 $\sum_{i=0}^{c_1}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}\leqslant\frac{\alpha}{2}$ 的最大整数，c_2 为满足 $\sum_{i=c_2}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}\leqslant\frac{\alpha}{2}$ 的最小整数
	F 分布	c 为满足 $F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)\leqslant\frac{\nu_2(1-p_0)}{\nu_1 p_0}$ 的最小整数 其中 $\nu_2=2c$，$\nu_1=2(n-c+1)$	c 为满足 $F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)\leqslant\frac{\nu_2 p_0}{\nu_1(1-p_0)}$ 的最大整数 其中 $\nu_1=2(c+1)$，$\nu_2=2(n-c)$	c_1 为满足 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)\leqslant\frac{\nu_2 p_0}{\nu_1(1-p_0)}$ 的最大整数， 其中 $\nu_1=2(c_1+1)$，$\nu_2=2(n-c_1)$ c_2 为满足 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)\leqslant\frac{\nu_2(1-p_0)}{\nu_1 p_0}$ 的最小整数 其中 $\nu_1=2(n-c_2+1)$，$\nu_2=2c_2$
	正态近似	c 为满足 $c\geqslant np_0+0.5+u_{1-\alpha}\sqrt{np_0(1-p_0)}$ 的最小整数	c 为满足 $c\leqslant np_0-0.5-u_{1-\alpha}\sqrt{np_0(1-p_0)}$ 的最大整数	c_1 为满足 $c_1\leqslant np_0-0.5-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np_0(1-p_0)}$ 的最大整数， c_2 为满足 $c_2\geqslant np_0+0.5+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np_0(1-p_0)}$ 的最小整数

现用二项分布来求临界值，这里 $T\sim b(12,0.4)$。在 $n=12$，$p=0.4$ 时，T 取不同值的概率如下：

k	0	1	2	…	8	9	20
$p(T=k)$	0.0022	0.0174	0.0639	…	0.0420	0.012457	0.002491

现取 $\alpha=0.05$，由于 $p(T\leqslant 1)=0.0196<0.025$，$p(T\leqslant 2)=0.0835>0.025$，

故取 $c_1=1$，又由于 $p(T\geqslant 8)=0.0573>0.025$，$p(T\geqslant 9)=0.0153<0.025$，故取 $c_2=9$。从而拒绝域为

$$\{T\leqslant 1 \text{ 或 } T\geqslant 9\}$$

现 $T=5$，未落入拒绝域，因而在 $\alpha=0.05$ 水平上认为该厂优质品率无明显变化。

也可用 F 分布来求临界值。

为求 c_1，先设 $c_1=1$，则 $\nu_1=4$，$\nu_2=22$，$\dfrac{\nu_2 p_0}{\nu_1(1-p_0)}=3.67$，$F_{0.975}(4,22)$ 利用线性插值法来求，由附表 6 查得 $F_{0.975}(4,20)=3.51$，$F_{0.975}(4,24)=3.38$，故 $F_{0.975}(4,22)=3.445<3.67$。

再设 $c_1=2$，则 $\nu_1=6$，$\nu_2=20$，$\dfrac{\nu_2 p_0}{\nu_1(1-p_0)}=2.22$，而 $F_{0.975}(6,20)=3.13>2.22$。

由此知满足要求的 $c_1=1$。

同理可求 c_2。设 $c_2=8$，则 $\nu_1=10$，$\nu_2=16$，$\dfrac{\nu_2(1-p_0)}{\nu_1 p_0}=2.4$，由线性插值可知 $F_{0.975}(10,16)=3.006>2.4$。

再设 $c_2=9$，则 $\nu_1=8$，$\nu_2=18$，$\dfrac{\nu_2(1-p_0)}{\nu_1 p_0}=3.375$，由线性插值可知 $F_{0.975}(8,18)=3.060<3.375$。

由此知满足条件的 $c_2=9$。

综上可知拒绝域为

$$\{T\leqslant 1 \text{ 或 } T\geqslant 9\}$$

与用二项分布求得的结论一致，只是在计算上要简便一些。

例 6.3.2 如果在例 6.3.1 中抽检 50 件产品，那么该检验问题的拒绝域是什么？

解：这里样本容量较大，可用正态近似方法寻求临界值 c_1 与 c_2，由 $n=50$，$p_0=0.4$，$\alpha=0.05$ 时 $u_{0.975}=1.96$ 可知

$$np_0-0.5-u_{0.975}\sqrt{np_0(1-p_0)}=12.71$$

$$np_0+0.5+u_{0.975}\sqrt{np_0(1-p_0)}=27.29$$

故取 $c_1=12$，$c_2=28$，则水平为 0.05 的检验的拒绝域为

$$\{T\leqslant 12 \text{ 或 } T\geqslant 28\}$$

6.3.2 两个比率的比较

设从二点分布总体 $X\sim b(1,p_1)$ 中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，从另一二点分布总体 $Y\sim b(1,p_2)$ 中获得 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，两样本独立，需对 p_1 与 p_2 进行比较。

其检验问题也有三种：

(1)$H_0:p_1\leqslant p_2$，　$H_1:p_1>p_2$

(2)$H_0:p_1\geqslant p_2$，　$H_1:p_1<p_2$

(3)$H_0:p_1=p_2$，　$H_1:p_1\neq p_2$

通常 p_1,p_2 分别用

$$\hat{p}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad \hat{p}_2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$$

去估计，因而可采用

$$T=\hat{p}_1-\hat{p}_2$$

作为检验用统计量，拒绝域分别取：

①$W=\{\hat{p}_1-\hat{p}_2\geqslant c\}$

②$W=\{\hat{p}_1-\hat{p}_2\leqslant c\}$

③$W=\{|\hat{p}_1-\hat{p}_2|\geqslant c\}$

下面仅给出在大样本情况下 c 的近似确定法。

在 n,m 都比较大时，有

$$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}+\frac{p_2(1-p_2)}{m}}}\tag{6.3.12}$$

近似服从 $N(0,1)$，由于三种情况下都是在 $p_1=p_2$ 时犯第一类错误的概率达到最大，此时用

$$\hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{m}X_i}{n+m}\tag{6.3.13}$$

作为(6.3.12)分母中 p_1,p_2 的共同估计，将

$$U=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\hat{p}(1-\hat{p})}}\tag{6.3.14}$$

作为检验用统计量，有关的拒绝域列于表 6.3.2 中，

表 6.3.2 用正态近似作两个比例的检验

（显著性水平为 α）

H_0	H_1	检验统计量	拒绝域
$p_1 \leqslant p_2$	$p_1 > p_2$	$U=\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\hat{p}(1-\hat{p})}}$	$\{u \geqslant u_{1-\alpha}\}$
$p_1 \geqslant p_2$	$p_1 < p_2$		$\{u \leqslant u_\alpha\}$
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$		$\{\|u\| \geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

例 6.3.3 某高校随机抽取了 102 个男学生与 135 个女学生调查家中有无计算机，调查结果 23 个男学生与 25 个女学生家中有计算机。在 $\alpha=0.05$ 水平上，能否认为男、女学生家中拥有计算机的比率一致？

解：设一个男学生家中拥有计算机数为 X，$X\sim b(1,p_1)$；一个女学生家中拥有计算机数为 Y，$Y\sim b(1,p_2)$。现要检验的假设是：

$$H_0: p_1=p_2, \qquad H_1: p_1\neq p_2$$

由于这里 $n=102$，$m=135$ 均较大，故用正态近似作检验。在 $\alpha=0.05$ 时，拒绝域为 $\{|U|\geqslant u_{0.975}=1.96\}$。

现在 $\sum_{i=1}^{102} x_i=23$，$\sum_{i=1}^{135} y_i=25$，从而 $\hat{p}_1=22.54\%$，$\hat{p}_2=18.52\%$，$\hat{p}=\dfrac{23+25}{102+135}=20.25\%$，则

$$u=\frac{0.2254-0.1852}{\sqrt{\left(\frac{1}{102}+\frac{1}{135}\right)\times 0.2025\times(1-0.2025)}}=1.897$$

由于 $|u|<1.96$，所以在 $\alpha=0.05$ 上，认为男、女学生家庭拥有计算机的比率无显著差异。

* §6.4 泊松分布参数 λ 的检验

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自泊松分布总体 X，$X\sim P(\lambda)$，$EX=\lambda$，关于 λ 的检验问题也有三类：

(1) $H_0:\lambda\leqslant\lambda_0$，　$H_1:\lambda>\lambda_0$

(2) $H_0:\lambda\geqslant\lambda_0$，　$H_1:\lambda<\lambda_0$

(3) $H_0:\lambda=\lambda_0$，　$H_1:\lambda\neq\lambda_0$

通常 λ 是用样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 去估计的，从而也可用 $\overline{X}$ 作为检验统计量，

或用 $T=\sum_{i=-1}^{n}X_i$ 作检验统计量，其拒绝域形式分别为：

①$W=\{T\geqslant c\}$

②$W=\{T\leqslant c\}$

③$W=\{T\leqslant c_1$ 或 $T\geqslant c_2\}$

为获得水平为 α 的检验的拒绝域，需确定临界值 c 或 c_1,c_2。下面给出两种确定临界值的方法：

方法一：利用 χ^2 分布来确定临界值。

以检验问题

$$H_0:\lambda\leqslant\lambda_0,\qquad H_1:\lambda>\lambda_0$$

来讲，犯第一类错误的概率

$$\alpha(\lambda)=P(T\geqslant c),\qquad \lambda\leqslant\lambda_0$$

对给定的 λ，$T\sim P(n\lambda)$，又由 § 5.5 知

$$P(T\geqslant c)=\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(n\lambda)^k e^{-n\lambda}}{k!}=k_\nu(2n\lambda)$$

其中 $k_\nu(2n\lambda)$ 表示自由度为 ν 的 χ^2 分布的分布函数在 $2n\lambda$ 处的值，$\nu=2c$，$P(T\geqslant c)$ 是 λ 的增函数，在 $\lambda=\lambda_0$ 时 $\alpha(\lambda)$ 会达到最大值，因而 c 是满足

$$\alpha(\lambda_0)\leqslant\alpha$$

的最小的整数，也即要求 c 是满足

$$2n\lambda_0\leqslant\chi_\alpha^2(2c)$$

的最小整数，其余检验问题可类似求出，结果列于表 6.4.1。

方法二：大样本场合利用正态近似。

当 n 充分大时，有

$$\frac{T-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$$

近似 $N(0,1)$，当 $\lambda=\lambda_0$ 时

$$U=\frac{T-n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}$$

近似 $N(0,1)$，此时

$$\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(n\lambda)^k e^{-n\lambda}}{k!}\approx 1-\Phi\left[\frac{c-n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}\right]\leqslant\alpha$$

故要求 $\frac{c-n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}\geqslant u_{1-\alpha}$，则 c 为满足

$$c \geqslant n\lambda_0 + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{n\lambda_0}$$

的最小整数，其余有关结果也列于表 6.4.1 中。

表 6.4.1 泊松分布数 λ 的检验（显著性水平为 α）

检验统计量 $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$

H_0		$\lambda \leqslant \lambda_0$	$\lambda \geqslant \lambda_0$	$\lambda = \lambda_0$
H_1		$\lambda > \lambda_0$	$\lambda < \lambda_0$	$\lambda \neq \lambda_0$
拒绝域		$\{T \geqslant c\}$	$\{T \leqslant c\}$	$\{T \leqslant c_1$ 或 $T \geqslant c_2\}$
临界值确定方法	χ^2 分布	c 为满足 $2n\lambda_0 \leqslant \chi^2_{\alpha}(2c)$ 的最小整数	c 为满足 $2n\lambda_0 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(2c+2)$ 的最大整数	c_1 为满足 $2n\lambda_0 \geqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2c_1+2)$ 的最大整数，c_2 为满足 $2n\lambda_0 \leqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2c_2)$ 的最小整数
	正态分布	c 为满足 $c \geqslant n\lambda_0 + u_{1-\alpha}\sqrt{n\lambda_0}$ 的最小整数	c 为满足 $c \leqslant n\lambda_0 - u_{1-\alpha}\sqrt{n\lambda_0}$ 的最大整数	c_1 为满足 $c_1 \leqslant n\lambda_0 - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0}$ 的最大整数，c_2 为满足 $c_2 \geqslant n\lambda_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0}$ 的最小整数

例 6.4.1 放射性物质在某固定长度的时间内放射的 α 粒子数 X 服从泊松分布。现设每次观测时间长度为 90 分钟，共观测 15 次，记录观测到的 α 粒子数如下：

粒子数 a_i	0	1	2	3	4	合计
频数 n_i	4	7	2	1	1	15

试在 $\alpha=0.1$ 水平上检验该泊松分布参数 λ 是否为 0.6。

解：此问题可归结为检验问题：

$$H_0: \lambda = 0.6, \quad H_1: \lambda \neq 0.6$$

现用 χ^2 分布来确定临界值。这里 $n=15$，$\lambda_0=0.6$，$2n\lambda_0=18$，取 $\alpha=0.10$，由于

$\chi^2_{0.95}(8)=15.597<18$，$\chi^2_{0.95}(10)=18.307>18$，故取 $2c_1+2=8$，即 $c_1=3$。

$\chi^2_{0.05}(28)=16.928<18$，$\chi^2_{0.05}(30)=18.493>18$，故取 $2c_2=30$，即 $c_2=15$。

因而 $\alpha=0.10$ 水平的拒绝域为

$$W=\{T \leqslant 3 \text{ 或 } T \geqslant 15\}$$

在本例中

$$T=\sum_{i=0}^{4} n_i a_i = 18 > 15$$

样本落入拒绝域，因而拒绝 $\lambda=0.6$ 的假设。

若本例用正态近似求，则在 $\alpha=0.10$ 时，$u_{0.95}=1.645$，$n\lambda_0=9$，从而

$$c_1 \leqslant n\lambda_0 - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0}=4.065，则取 c_1=4；$$

$$c_2 \geqslant n\lambda_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0}=13.935，则取 c_2=14。$$

则拒绝域为

$$W=\{T\leqslant 4 \text{ 或 } T\geqslant 14\}$$

与 χ^2 分布所得有小的差异，原因在于这里 n 不够大，所以正态近似应在 n 足够大时才能用。

§6.5 检验的 p 值

一个假设检验问题的结论是简单的，在给定的显著性水平下，不是拒绝原假设 H_0，就是保留原假设 H_0。然而有可能发生如下情况：在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝原假设 H_0，可是在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下保留原假设。因为降低显著性水平 α 会导致拒绝域缩小，这样原来落在 $\alpha=0.05$ 的拒绝域中的检验统计量的观测值就有可能落在 $\alpha=0.01$ 的接受域中，假如这时一个人主张选显著性水平 $\alpha=0.05$，而另一个人主张选 $\alpha=0.01$，那么前一个人的结论是拒绝 H_0，而后一个人的结论是保留 H_0，两个人的结论就完全相反。我们该如何对待这一问题呢？为讨论这一问题，先看一个例子。

例 6.5.1 一支香烟中的尼古丁含量 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，合格标准规定 μ 不能超过 1.5mg。为对一批香烟的尼古丁含量是否合格作判断，则可建立如下假设：

$$H_0: \mu\leqslant 1.5, \quad H_1: \mu>1.5$$

这是在方差已知情况下对正态分布的均值作单边检验，所用的检验统计量为

$$U=\frac{\overline{X}-1.5}{1/\sqrt{n}}$$

拒绝域是

$$W=\{u\geqslant u_{1-\alpha}\}$$

现随机抽取一盒（20 支）香烟，测得平均每支香烟的尼古丁含量为 $\bar{x}=1.97$mg，则可求得检验统计量的值为 $u=2.10$。下表对四个不同的显著性水平 α 分别列出相应的拒绝域和所下的结论：

表 6.5.1　例 6.5.1 下不同 α 的拒绝域与结论

显著性水平 α	拒绝域	$u=2.10$ 时的结论
0.05	$\{u \geqslant 1.645\}$	拒绝 H_0
0.025	$\{u \geqslant 1.96\}$	拒绝 H_0
0.01	$\{u \geqslant 2.33\}$	保留 H_0
0.005	$\{u \geqslant 2.58\}$	保留 H_0

从上表可看出，当 α 相对大一些时，U 的临界值就小，从而 2.10 超过了临界值，故应拒绝 H_0；而当 α 减小时，临界值便增大，2.10 就可能不超过临界值，这时便保留 H_0。

现在，我们换一个角度来看这一问题。用 $\mu=\mu_0=1.5$ 时检验统计量 U 的分布 $N(0,1)$ 可求得

$$P_{\mu_0}(U \geqslant 2.10)=0.0179$$

这一概率便是图 6.5.1(a)中标准正态分布右边尾部阴影区域的面积，当选定的显著性水平 $\alpha>0.0179$ 时，阴影区域扩大（见图 6.5.1(b)），临界值向

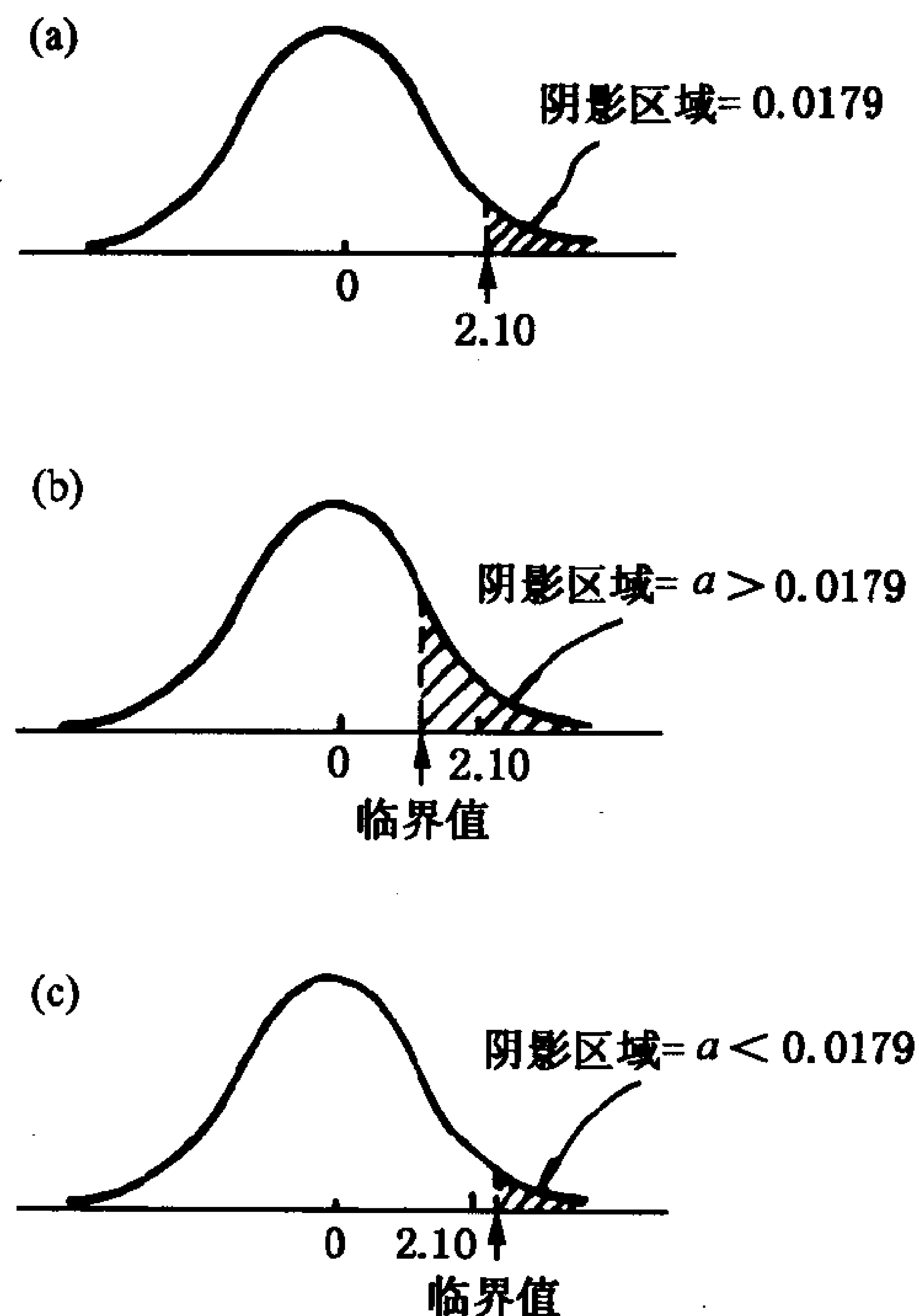


图 6.5.1　α 与尾部区域间的关系

左移，从而 2.10 落入拒绝域；若 $\alpha<0.0179$，则阴影区域缩小（见图 6.5.1(c)），临界值向右移，从而 2.10 落在接受域中。从这里可以看出，0.0179 是这个问题中拒绝 H_0 的最小的显著性水平，比它稍大一点便会导致保留 H_0，这种"拒绝 H_0 的最小的显著性水平"就称为 p 值。在一个检验问题中附带给出 p 值对人们作决策是很有好处的。

在一般场合，p 值的定义是：

定义 6.5.1 在一个假设检验问题中，拒绝假设 H_0 的最小显著性水平称为 p 值。

在现代计算机的统计软件中都会在一个检验问题中给出相应的 p 值，那么对任意指定的显著水平 α，我们便可以根据 p 值来下结论。

仍来看一下例 6.5.1。如果指定显著性水平为 α，则拒绝域为 $\{u\geqslant u_{1-\alpha}\}$，现在由样本求得 $u=2.10$，$P\{U\geqslant u\}=0.0179=p$，如果 $\alpha=P\{U\geqslant u_{1-\alpha}\}\geqslant P\{U\geqslant u\}=p$，则 $u\geqslant u_{1-\alpha}$，从而 u 落在拒绝域中，故结论是 α 水平下拒绝 H_0，譬如 $\alpha=0.05$；如果 $\alpha=P\{U\geqslant u_{1-\alpha}\}<P\{U\geqslant u\}=p$，则 $u<u_{1-\alpha}$，即 u 未落在拒绝域中，故在 α 水平下应保留 H_0，譬如 $\alpha=0.01$（见图 6.5.2）。

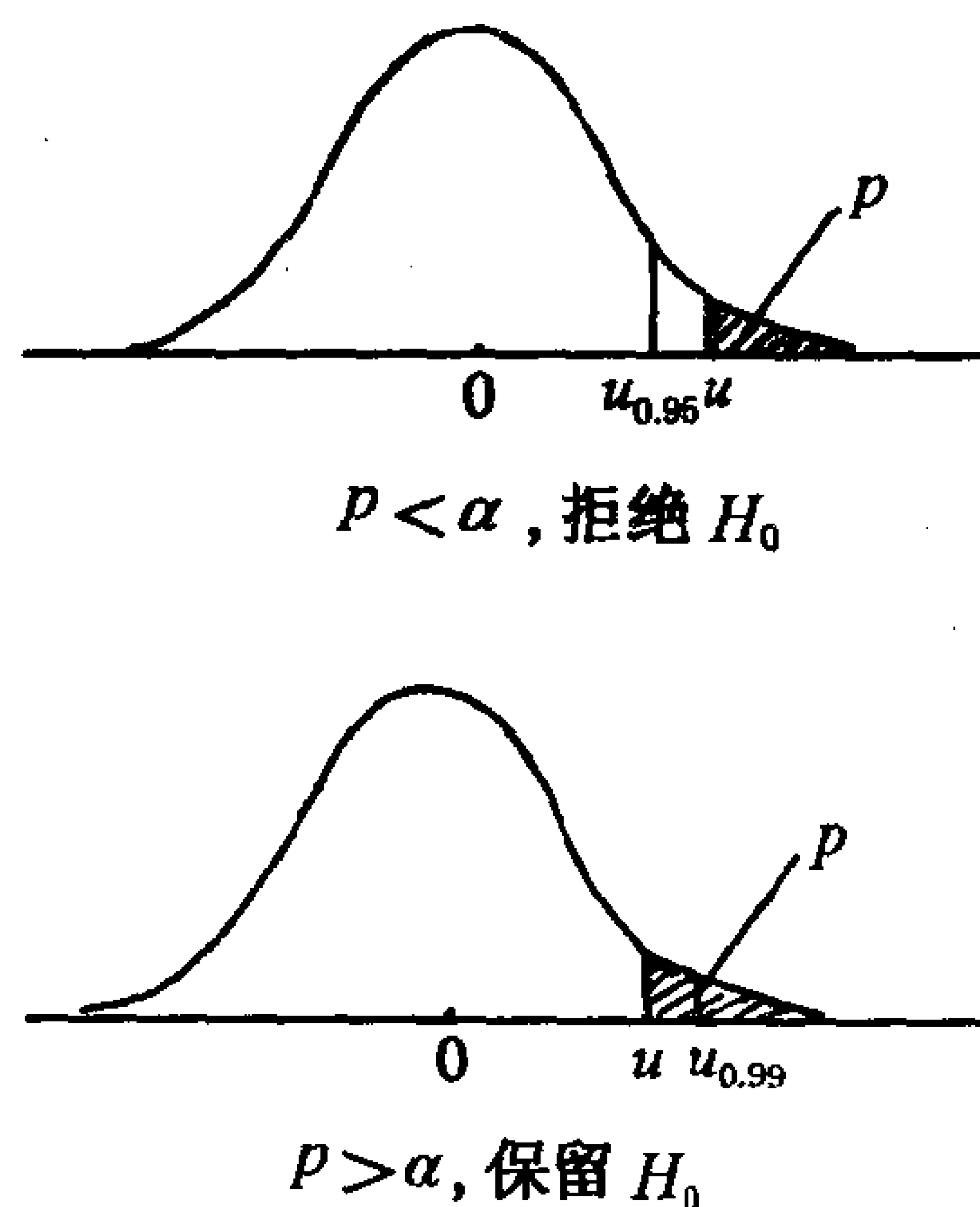


图 6.5.2 比较 p 与 α 下判断

对任意指定的显著性水平 α，在与 p 值比较后可以得到如下结论：

结论一：如果 $\alpha\geqslant p$ 值，则在显著性水平 α 下拒绝 H_0；

结论二：如果 $\alpha<p$ 值，则在显著性水平 α 下保留 H_0。

任一检验问题的 p 值可以根据检验统计量的样本观察值和检验统计量在 H_0 下一个特定的参数值对应的分布求出。例如在正态总体均值检验中，当

σ 未知时，可采用检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，这里 n 是样本容量，$\overline{X}$、S 分别为样本均值和样本标准差，在下述三种检验问题中，当 $\mu=\mu_0$ 时，t 服从自由度是 $n-1$ 的 t 分布。如果由样本求得 t 统计量的观察值为 t_0，那么三种检验问题对应的 p 值可分别求出：

(1)在 $H_0:\mu\leqslant\mu_0$ 对 $H_1:\mu>\mu_0$ 的检验中，$p=P_{\mu_0}(t\geqslant t_0)$；

(2)在 $H_0:\mu\geqslant\mu_0$ 对 $H_1:\mu<\mu_0$ 的检验中，$p=P_{\mu_0}(t\leqslant t_0)$；

(3)在 $H_0:\mu=\mu_0$ 对 $H_1:\mu\neq\mu_0$ 的检验中，$p=P_{\mu_0}(|t|\geqslant t_0)$。

类似地，对前三节所涉及的各种检验问题可分别给出 p 值的计算公式。

例 6.5.2 在例 6.1.2 中，我们的检验问题是

$$H_0:\theta\leqslant 0.01,\quad H_1:\theta>0.01$$

在那里采用了检验统计量 $T=\sum_{i=1}^{100}X_i$，拒绝域为

$$\{T\geqslant 3\}$$

现求得的样本观察值 $t_0=2$，则从表 6.1.2 知 p 值为

$$p=P_{0.01}(T\geqslant 2)=0.264$$

因此，当显著性水平 $\alpha\geqslant 0.264$ 时拒绝 H_0，而当 $\alpha<0.264$ 时保留 H_0。

§6.6 广义似然比检验

前面几节讨论的有关总体参数的检验方法是针对总体分布的具体类型给出的。这一节将给出分布类型已知时构造检验统计量的一般方法，称为广义似然比方法。

设总体 X 的密度函数(或分布列)为 $p(x;\theta)$，其中 θ 是未知参数，$\theta\in\Theta$，现考虑如下的检验问题：

$$H_0:\theta\in\Theta_0,\quad H_1:\theta\in\Theta_1 \tag{6.6.1}$$

Θ_0,Θ_1 均为 Θ 的非空子集，且 Θ_0 与 Θ_1 不相交，下面为方便起见，讨论 Θ_0 与 Θ_1 之并为 Θ 的情况。

广义似然比检验的基本想法如下：

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，记其似然函数为 $L(\theta)$，$\hat{\theta}_0$ 与 $\hat{\theta}$ 分别是 θ 在参数空间 Θ_0 与 Θ 上的极大似然估计，似然函数在 Θ_0 与 Θ 上的极大值分别记为 $L(\hat{\theta}_0)$ 与 $L(\hat{\theta})$，即 $L(\hat{\theta}_0)=\max\limits_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)$，$L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)$，记其比值为

$$\lambda=\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})} \tag{6.6.2}$$

λ 是一个统计量，由于范围越大，L 的最大值总不会减小，故总有 $L(\hat{\theta}_0)\leqslant L(\hat{\theta})$，这意味着 $0\leqslant\lambda\leqslant1$。由于似然函数可以看成是给出样本后，$\theta$ 出现可能性的一种度量。因而当 H_0 为真时，$L(\hat{\theta}_0)$ 应取较大的值；当 H_0 不真时，$L(\hat{\theta}_0)$ 的取值较小。所以将(6.6.2)作为检验问题(6.6.1)的检验统计量时，拒绝域应取：

$$W=\{\lambda\leqslant c\} \tag{6.6.3}$$

其中 c 应满足如下条件，使

$$P_\theta\{\lambda\leqslant c\}\leqslant\alpha,\quad \theta\in\Theta_0 \tag{6.6.4}$$

且尽可能接近 α。今后我们称统计量(6.6.2)为**似然比统计量**，由此获得的检验称为水平是 α 的**广义似然比检验**。

有时根据(6.6.4)不易求出 c，但如果存在另一个统计量 $G=G(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，且 λ 随 G 严格上升(或严格下降)，而 G 的分位数容易得到的话，那么根据 G 可定出拒绝域

$$W=\{G\leqslant c'\}(\text{或 } W=\{G\geqslant c'\}) \tag{6.6.5}$$

其中 c' 满足如下条件，使

$$P_\theta(G\leqslant c')\leqslant\alpha(\text{或 } P_\theta(G\geqslant c')\leqslant\alpha),\qquad \theta\in\Theta_0$$

且尽可能接近于 α，则基于 G 的拒绝域(6.6.5)与(6.6.3)等价，这样构造的检验也是广义似然比检验，只是所用的统计量不同，前者用 λ，后者用 G。

例 6.6.1 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，参数空间为 $\Theta=\{(\mu,\sigma^2):-\infty<\mu<\infty,\sigma^2>0\}$，从中获得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，下面考虑检验问题

$$H_0:\mu=\mu_0,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$$

的广义似然比检验。

解：在这一检验问题中

$$\Theta_0=\{(\mu,\sigma^2):\mu=\mu_0,\sigma^2>0\}$$

似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\} \tag{6.6.6}$$

在 Θ 上 μ 与 σ^2 的 MLE 分别为 $\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\sigma}^2=S_n^2$。在 Θ_0 上，$\mu=\mu_0$，σ^2 的 MLE 为 $\hat{\sigma}_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$，将它们代入似然函数(6.6.6)，得

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$$

$$L(\mu,\hat{\sigma}_0^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_0}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$$

则似然比统计量

$$\begin{aligned}\lambda &=\frac{L(\mu_0,\hat{\sigma}_0^2)}{L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)}=\left(\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}}\right)^{-n}=\left(\frac{\sum(X_i-\mu_0)^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}\right)^{-n/2}\\ &=\left[\frac{\sum(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu_0)^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}\right]^{-n/2}\\ &=\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}\end{aligned}$$

这里 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$。$\lambda$ 是 t^2 的严减函数，故拒绝域 $W=\{\lambda\leqslant c\}$ 等价于 $W=\{t^2\geqslant c'\}$，也等价于 $W=\{|t|\geqslant c''\}$。

由于在 $\mu=\mu_0$ 时，$t\sim t(n-1)$，故 c'' 满足

$$P_{\mu_0}(|t|\geqslant c'')=\alpha$$

即 $c''=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$。这与§6.2中所得到的检验相同，即水平为 α 的检验的拒绝域是

$$W=\{|t|\geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

这一例子也从一个侧面说明了广义似然比检验的合理性。

§6.7 χ^2 拟合优度检验

前几节所讨论的检验问题是在分布形式已知的前提下对分布的参数进行的，它们都属于参数假设检验问题。当我们对总体分布知之甚少时，就要采用非参数检验，从本节开始介绍几种常用的非参数检验方法。我们首先讨论 χ^2 拟合优度检验。

假定一个总体可分为 r 类，现从该总体获得了一个样本——这是一批分类数据，现在需要我们从这些分类数据出发，去判断总体各类出现的概率是否与已知的概率相符。譬如要检验一颗骰子是否是均匀的，那么我们可以将该骰子抛掷若干次，记录每一面出现的次数，从这批数据出发去检验各面出现的概

率是否都是 1/6，χ^2 拟合优度检验就是用来检验一批分类数据所来自的总体的分布是否与某种理论分布相一致。在实际问题中常会遇到这种分类数据，本节就讨论这类数据的有关检验问题。

6.7.1 总体可分为有限类，且总体分布不含未知参数

设总体 X 可以分成 r 类，记为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，如今要检验的假设为：

$$H_0:p(A_i)=p_i \quad , \quad i=1,2,\cdots,r$$

其中各 p_i 已知，$p_i\geqslant0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{r}p_i=1$，现对总体作了 n 次观察，各类出现的频数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$，且 $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$。若 H_0 为真，则各概率 p_i 与频率 n_i/n 应相差不大，或各观察频数 n_i 与理论频数 np_i 应相差不大。据此想法，英国统计学家 K. Pearson 提出了一个检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i} \tag{6.7.1}$$

并指出，当样本容量 n 充分大且 H_0 为真时，χ^2 近似服从自由度为 $r-1$ 的 χ^2 分布。

从 χ^2 统计量(6.7.1)的结构看，当 H_0 为真时，和式中每一项的分子 $(n_i-np_i)^2$ 都不应太大，从而总和也不会太大，若 χ^2 过大，人们就会认为原假设 H_0 不真。基于此想法，检验的拒绝域应有如下形式：

$$W=\{\chi^2\geqslant c\}$$

对于给定的显著性水平 α，由分布 $\chi^2(r-1)$ 可定出 $c=\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$。

例 6.7.1 某大公司的人事部门希望了解公司职工的病假是否均匀分布在周一到周五，以便合理安排工作。如今抽取了 100 名病假职工，其病假日分布如下：

工作日	周一	周二	周三	周四	周五
频数	17	27	10	28	18

试问该公司职工病假是否均匀分布在一周五个工作日中($\alpha=0.05$)？

解：若病假是均匀分布在五个工作日内，则应有 $p_i=\frac{1}{5}$，$i=1,2,\cdots,5$，以 A_i 表示"病假在周 i"，则要检验假设

$$H_0:P(A_i)=\frac{1}{5} \quad , \quad i=1,2,\cdots,5$$

采用统计量(6.7.1)，由于 $r=5$，在 $\alpha=0.05$ 时，$\chi^2_{0.95}(4)=9.49$，因而拒绝域为

$$W=\{\chi^2\geqslant 9.49\}$$

为计算统计量 χ^2 的值，可列成如下计算表格：

表 6.7.1 χ^2 值计算表

工作日	n_i	np_i	$(n_i-np_i)^2/(np_i)$
周一	17	20	0.45
周二	27	20	2.45
周三	10	20	5.00
周四	28	20	3.20
周五	18	20	0.20
合计	100		11.30

由上表知

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}=11.30>9.49$$

这表明样本落在拒绝域中，因而在 $\alpha=0.05$ 水平上拒绝原假设 H_0，认为该公司职工病假在五个工作日中不是均匀分布的。

6.7.2 总体可分为有限类，但总体分布含有未知参数

先看一个例子。

例 6.7.2 在某交叉路口记录每 15 秒钟内通过的汽车数量，共观察了 25 分钟，得 100 个记录，经整理得：

通过的汽车数量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
频数	1	5	15	17	26	11	9	8	3	2	2	1

在 $\alpha=0.05$ 水平上检验如下假设：通过该交叉路口的汽车数量服从泊松分布 $P(\lambda)$。

在本例中，要检验总体是否服从泊松分布。大家知道服从泊松分布的随机变量可取所有的非负整数，然而尽管它可取可数个值，但取大量值的概率是非常之小，因而可以忽略不计，另一方面，在对该随机变量进行实际观察时也只能观察到有限个不同值，譬如在本例中，只观察到 0,1,…,11 等 12 个值。这相当于把总体分成 12 类，每一类出现的概率分别为：

$$p_i=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \qquad i=0,1,\cdots,10$$

$$p_{11}=\sum_{i=11}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \tag{6.7.2}$$

从而把所要检验的原假设记为：

$$H_0:P(A_i)=p_i, \qquad i=0,1,\cdots,11$$

其中 A_i 表示 15 秒钟内通过交叉路口的汽车为 i 辆，$i=0,1,\cdots,10$，A_{11}表示 15 秒钟内通过交叉路口的汽车超过 10 辆，各 p_i 如(6.7.2)所示。

这里还遇到另一个麻烦，即总体分布中含有未知参数 λ，当然这个 λ 可以用样本均值 $\bar{x}=4.28$ 去估计。当时 K. Pearson 仍采用统计量(6.7.1)，并认为其在 H_0 为真时服从 $\chi^2(r-1)$，直到 1924 年英国统计学家 R. A. Fisher 纠正了这一错误，他证明了在总体分布中含有 k 个独立的未知参数时，若这 k 个参数用极大似然估计代替，则(6.7.1)中的 p_i 用 $\hat{p}_i$ 代替，当样本容量 n 充分大时

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \tag{6.7.3}$$

近似服从自由度为 $r-k-1$ 的 χ^2 分布。

基于这一关键的修正，我们来完成例 6.7.2 的检验问题。

首先在(6.7.2)中含有一个未知参数 λ，用其极大似然估计 $\bar{x}=4.28$ 代替，从而有

$$\hat{p}_i=\frac{4.28^i e^{-4.28}}{i!}, \qquad i=0,1\cdots,10$$

$$\hat{p}_{11}=\sum_{i=11}^{\infty}\frac{4.28^i e^{-4.28}}{i!}$$

其次，由于我们要采用检验统计量(6.7.3)的近似分布来确定拒绝域，因而要求各 n_i 不能过少，通常要求 $n_i\geqslant5$，当某些频数小于 5 时，通常的做法是将邻近若干组合并。在本例中，$n_0=1<5$，因而可将 $i=0$ 与 $i=1$ 的两组合并，同样，由于 $i\geqslant8$ 时各组频数亦小于 5，因而也将它们合并，从而这里组数 $r=8$，未知参数个数 $k=1$，采用统计量(6.7.3)，在 $\alpha=0.05$ 时，$\chi^2_{0.95}(8-1-1)=\chi^2_{0.95}(6)=12.592$，拒绝域为

$$W=\{\chi^2\geqslant12.592\}$$

统计量 χ^2 值的计算见表 6.7.2。由于 $\chi^2=5.7897<12.592$，故在 $\alpha=0.05$ 水平上，可保留 H_0，即认为 15 秒钟内通过交叉路口的汽车数量服从参数 $\lambda=4.28$ 的泊松分布。

表 6.7.2 χ^2 值计算表

i	n_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
≤1	6	0.0730	7.30	0.2315
2	15	0.1268	12.68	0.4245
3	17	0.1809	18.09	0.0657
4	26	0.1935	19.35	2.2854
5	11	0.1657	16.57	1.8724
6	9	0.1182	11.82	0.6728
7	8	0.0723	7.23	0.0820
≥8	8	0.0696	6.96	0.1554
合计	100			5.7897

6.7.3 总体为连续分布的情况

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，要检验的假设是：

$$H_0: X \text{ 服从分布 } F(x)$$

其中 $F(x)$中可以含有 k 个未知参数，若 $k=0$，那 $F(x)$就完全已知。

在这种情况下检验 H_0 的做法如下：

(1)把 X 的取值范围分成 r 个区间，为确定起见，不妨设为：

$$-\infty=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{r-1}<a_r=\infty$$

设各区间为 $A_1=(a_0,a_1],A_2=(a_1,a_2],\cdots,A_{r-1}=(a_{r-2},a_{r-1}],A_r=(a_{r-1},a_r)$；

(2)统计样本落入这 r 个区间的频数，分别记为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$。这里要求各 $n_i\geqslant5$；

(3)当 $k\neq0$ 时，对 k 个未知参数给出其极大似然估计，记

$$p_i=P(a_{i-1}<X\leqslant a_i)=F(a_i)-F(a_{i-1})$$

从而用未知参数的极大似然估计代替后可算得各 $\hat{p}_i$。

这样就把检验问题转化为分类数据的检验问题，以后的计算同 6.7.1 或 6.7.2 小节，视未知参数个数 $k=0$ 或 $k\neq0$ 而定。

例 6.7.3 为研究混凝土抗压强度的分布，抽取了 200 件混凝土制件测定其抗压强度，经整理得频数分布表如下见表。

试在 $\alpha=0.05$ 水平上检验抗压强度的分布是否为正态分布。

解：若用 $F(x)$表示 $N(\mu,\sigma^2)$的分布函数，则本例便要检验假设：

$$H_0: \text{抗压强度的分布为 } F(x)$$

抗压强度区间 $(a_{i-1},a_i]$	频数 n_i
(190,200]	10
(200,210]	26
(210,220]	56
(220,230]	64
(230,240]	30
(240,250]	14
合计	200

又由于$F(x)$中含有两个未知参数μ与σ^2，因而需用它们的极大似然估计去替代。这里仅给出了样本的分组数据，因此只能用组中值(即区间中点)去代替原始数据，然后求μ与σ^2的MLE。现在6个组中值分别为$x_1=195$，$x_2=205$，$x_3=215$，$x_4=225$，$x_5=235$，$x_6=245$，于是

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{6}n_ix_i=221$$

$$\hat{\sigma}^2=s_n^2=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{6}n_i(x_i-\bar{x})^2=152,\quad \hat{\sigma}=s_n=12.33$$

在$N(221,152)$分布下，求出落在区间$(a_{i-1},a_i]$内的概率的估计值：

$$\hat{p}_i=\Phi\left(\frac{a_i-221}{\sqrt{152}}\right)-\Phi\left(\frac{a_{i-1}-221}{\sqrt{152}}\right),\quad i=1,2,\cdots,r$$

不过常将a_0定为$-\infty$，将a_r定为$+\infty$。本例中$r=6$。采用(6.7.3)作为检验统计量，在$\alpha=0.05$时，$\chi^2_{0.95}(6-2-1)=\chi^2_{0.95}(3)=7.815$，因而拒绝域为

表 6.7.3　χ^2值计算表

区间	n_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
$(-\infty,200]$	10	0.045	9.0	0.111
(200,210]	26	0.142	28.4	0.203
(210,220]	56	0.281	56.2	0.001
(220,230]	64	0.299	59.8	0.295
(230,240]	30	0.171	34.2	0.516
$(240,\infty)$	14	0.062	12.4	0.206
合计	200			1.332

$$W=\{\chi^2\geqslant 7.815\}$$

由样本计算 χ^2 值的过程列于表 6.7.3 中。由此可知 $\chi^2=1.332<7.815$，这表明样本落入接受域，可接受抗压强度服从正态分布的假定。

由本例可见，当 $F_0(x)$ 为连续分布时需将取值区间进行分组，从而检验结论依赖于分组，分组不同有可能得出不同的结论，这便是在连续分布场合 χ^2 拟合优度检验的不足之处。对正态分布的检验将在§6.8中专门介绍一些检验方法，然而在其它分布场合尚缺少专门的检验方法，故不得不用此 χ^2 拟合优度检验。

6.7.4 列联表的独立性检验

在有些实际问题中，当我们抽取了一个容量为 n 的样本后，对样本中每一样品可按不同特性进行分类。例如在进行失业人员情况调查时，对抽取的每一位失业人员可按其性别分类，也可按其年龄分类，当然还可按其它特征分类。又如在工厂中调查某类产品的质量时，可按该产品的生产小组分类，也可按其是否合格分类等等。当我们用两特性对样品分类时，记这两个特性分别为 X_1 与 X_2，不妨设 X_1 有 r 个类别，X_2 有 c 个类别，则可把被调查的 n 个样品按其所属类别进行分类，列成如下一张 $r\times c$ 的二维表，这张表也称为(二维)列联表。

		X_2				合计
		B_1	B_2	…	B_c	
X_1	A_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1c}	$n_{1\cdot}$
	A_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2c}	$n_{2\cdot}$
	⋮	⋮		…		
	A_r	n_{r1}	n_{r2}	…	n_{rc}	$n_{r\cdot}$
合计		$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	…	$n_{\cdot c}$	n

其中 n_{ij} 表示特性 X_1 属 A_i 类、特性 X_2 属 B_j 类的样品数，即频数。通常在二维表中还按行、按列分别求出其合计数：

$$n_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{c}n_{ij},\qquad i=1,2,\cdots,r$$

$$n_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{r}n_{ij},\qquad i=1,2,\cdots,c$$

$$\sum_{i=1}^{r}n_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{c}n_{\cdot j}=n$$

在这种列联表中，人们关心的问题是两个特性是否独立，称这类问题为列联表的独立性检验。为明确写出检验问题，记总体为 X，它是二维变量(X_1，

X_2)，这里 X_1 被分成 r 类 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，X_2 被分成 c 类 $B_1,B_2,\cdots,B_c$，并设

$$P(X\in A_i\cap B_j)=P(\text{“}X_1\in A_i\text{”}\cap\text{“}X_2\in B_j\text{”})=p_{ij}$$

其中 $i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,c$。又记

$$p_{i\cdot}=P(X_1\in A_i)=\sum_{j=1}^{c}p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots,r$$

$$p_{\cdot j}=P(X_2\in B_j)=\sum_{i=1}^{r}p_{ij},\qquad j=1,2,\cdots,c$$

这里必有 $\sum_{i=1}^{r}p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{c}p_{\cdot j}=1$。那么当 X_1 与 X_2 两个特性独立时，应对一切 i，j 有

$$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

因此我们的检验问题为

$$H_0:p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\qquad\forall i,j \tag{6.7.4}$$

$$H_1:\text{至少一对}(i,j),p_{ij}\neq p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

它也可采用(6.7.1)那种统计量，在这一问题中统计量 χ^2 可改写为：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(n_{ij}-np_{ij})^2/(np_{ij})$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(n_{ij}-np_{i\cdot}p_{\cdot j})^2/(np_{i\cdot}p_{\cdot j})$$

最后一个等式是在(6.7.4)中原假设 H_0 为真时导出的，在最后一个式子中有 $r+c$ 个未知参数 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,c)$需要估计，又由于 $\sum_{j=1}^{r}p_{i\cdot}=1$，$\sum_{j=1}^{c}p_{\cdot j}=1$，因而只有 $r+c-2$ 个独立参数需要估计。各 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$的极大似然估计分别为：

$$\hat{p}_{i\cdot}=\frac{n_{i\cdot}}{n},\qquad i=1,2,\cdots,r$$

$$\hat{p}_{\cdot j}=\frac{n_{\cdot j}}{n},\qquad j=1,2,\cdots,c$$

因而对检验问题(6.7.4)，可采用检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})^2}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}} \tag{6.7.5}$$

在 H_0 为真，n 较大时，χ^2 近似服从自由度是 $n-(r+c-2)-1=(r-1)(c-1)$ 的 χ^2 分布。对给定的显著性水平 α，拒绝域为

$$W=\{\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha}((r-1)(c-1))\} \tag{6.7.6}$$

例 6.7.4 某地调查了 3000 名失业人员，按性别文化程度分类如下：

性别＼文化程度	大专以上	中专技校	高中	初中及以下	合　计
男	40	138	620	1 043	1 841
女	20	72	442	625	1 159
合　计	60	210	1 062	1 668	3 000

试在 $\alpha=0.05$ 水平上检验失业人员的性别与文化程度是否有关。

解：这是列联表的独立性检验问题。在本例中 $r=2,c=4$，在 $\alpha=0.05$ 下，$\chi^2_{0.95}((r-1)(c-1))=\chi^2_{0.95}(3)=7.815$，因而拒绝域为：

$$W=\{\chi^2\geqslant 7.815\}$$

为了计算统计量(6.7.5)，可列成如下表格计算 $n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}=\dfrac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}$：

$n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}$	大专以上	中专技校	高中	初中及以下	合　计
男	36.8	128.9	651.7	1 023.6	1 841
女	23.2	81.1	410.3	644.4	1 159
合　计	60	210	1 062	1 668	3 000

从而得

$$\chi^2=\frac{(40-36.8)^2}{36.8}+\frac{(20-23.2)^2}{23.2}+\cdots$$
$$+\frac{(1043-1023.6)^2}{1023.6}+\frac{(625-644.4)^2}{644.4}=7.236$$

由于 $\chi^2=7.326<7.815$，样本落入接受域，从而在 $\alpha=0.05$ 水平上可认为失业人员的性别与文化程度无关。

例 6.7.5 目前有的零售商店开展上门服务的业务，有的不开展此项业务。为了解这项业务的开展与否与其月销售额是否有关，调查了 363 个商店，结果如下：

服务方式＼月销售额	≤1 000	(1 000,5 000]	(5 000,10 000]	(10 000,20 000]	>20 000	合计
上门服务	32	111	104	40	14	301
不上门服务	29	24	6	2	1	62
合计	61	135	110	42	15	363

试在 $\alpha=0.01$ 水平上检验服务方式与月销售额是否有关。

解：这也是列联表的独立性检验问题，在本例中 $r=2, c=5$，在 $\alpha=0.01$ 时，$\chi^2_{0.99}(4)=13.277$，故拒绝域为

$$W=\{\chi^2\geqslant 13.277\}$$

为计算统计量(6.7.5)，先在独立性假设下求出各 $n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}=\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}$ 如下：

$n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}$	≤1 000	(1 000,5 000]	(5 000,10 000]	(10 000,20 000]	>20 000	合计
上门服务	50.6	111.9	91.2	34.8	12.4	301
不上门服务	10.4	23.1	18.8	7.2	2.6	62
合计	61	135	110	42	15	363

由此可得 $\chi^2=56.38>13.277$，样本落在拒绝域中，这说明是否开展上门服务这项业务与月销售额有关。从各 n_{ij} 与 $n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}$ 的比较中可见，在月销售额超过5000 元的情况下，开展上门服务的实际频数 n_{ij} 高于理论频数 $n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}$，这便说明上门服务有利于提高月销售额。

§6.8* 正态性检验

用于判断总体分布是否为正态分布的检验称为**正态性检验**。由于正态分布在实际中频繁使用，迫使统计学家去寻找专门的正态性检验，至今已有几十种正态检验方法，国际标准化组织统计标准分委员会组织统计学家对这些正态性检验方法进行比较，最后认为 Wilk－Shapiro 的 W 检验和 Dagustino 的 D 检验是最好的，它们犯第二类错误的概率最小，故该委员会向世界各国推荐这两个正态性检验。我国统计方法标准化委员会经过研究和比较，接受此项建议，把这两个正态性检验列为国家标准，编号为 GB488—85。下面我们介绍这两个检验的操作方法，原理请参阅茆诗松、王静龙编的《数理统计》§5.5。

6.8.1 小样本($3\leqslant n\leqslant 50$)场合的 W 检验

设从总体 X 中抽取了容量为 n 的样本 X_1、$X_2,\cdots,X_n$。现要检验如下假设：

$$H_0: X\text{ 服从正态分布}$$

在 $3\leqslant n\leqslant 50$ 时，Wilk 与 Shapiro 提出用如下的 W 统计量：

$$W=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})(X_{(i)}-\overline{X})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \tag{6.8.1}$$

它可以看成是数对 $(a_i,x_{(i)})\ i=1,2,\cdots,n$ 的相关系数的平方，故统计量 W 在 $[0,1]$ 取值。

(6.8.1)式中的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 具有如下性质

$$a_i=-a_{n+1-i},\qquad i=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=0,\qquad \sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=1$$

对不同的 n，系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 已制成表格供查用(附表 8)。利用系数 a_i 的性质，统计量(6.8.1)可简化为

$$W=\frac{\left[\sum_{i=1}^{[n/2]}a_i(X_{(n+1-i)}-X_{(i)})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \tag{6.8.2}$$

可以证明，在 H_0 为真时，W 的取值应接近于 1，因而检验的拒绝域取下述形式是合理的：

$$\{W\leqslant c\}$$

对给定的显著性水平 α，在正态分布假定下，使 $P(W\leqslant c)=\alpha$ 的临界值 c 可从附表 9 查得，记 $c=W_\alpha$，从而拒绝域为

$$\{W\leqslant W_\alpha\} \tag{6.8.3}$$

例 6.8.1 抽查用克矽平治疗的矽肺患者 10 人，得到他们治疗前后的血红蛋白差(单位:克%)如下：

2.7　−1.2　−1.0　0　0.7　2.0　3.7　−0.6　0.8　−0.3

现要检验治疗前后血红蛋白的差是否服从正态分布(取 $\alpha=0.05$)。

解:这里 $n=10$，在 $\alpha=0.05$ 时，查附表 9 知，$W_{0.05}=0.842$，故用统计量(6.8.2)作正态性检验的拒绝域为

$$\{W\leqslant 0.842\}$$

为计算统计量(6.8.2)，常列成如表 6.8.1 的计算表，其中第二列 $x_{(i)}$ 为小的一半观测值按升序排列的，第三列 $x_{(n+1-i)}$ 为大的一半观测值按降序排列的，第五列 a_i 由附表 8 查得。

表 6.8.1 W 统计量的计算表

i	$x_{(i)}$	$x_{(n+1-i)}$	$x_{(n+1-i)}-x_{(i)}$	a_i
1	−1.2	3.7	4.9	0.5739
2	−1.0	2.7	3.7	0.3291
3	−0.6	2.0	2.6	0.2141
4	−0.3	0.8	1.1	0.1224
5	0	0.7	0.7	0.0399

$$\sum_{i=1}^{5} a_i(x_{(n+1-i)}-x_{(i)})=4.74901$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2=24.376$$

从而

$$W=\frac{4.74901^2}{24.376}=0.9252>0.842$$

由于样本落入接受域,故在 $\alpha=0.05$ 水平上不拒绝正态性假设。

6.8.2 大样本场合($n>50$)的 D 检验

在样本容量 $n>50$ 时,附表 8 与附表 9 中的值难以计算,因而 Dagustino 建议用以下统计量

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)X_{(i)}}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \tag{6.8.4}$$

在 H_0 为真时,$E(D)\approx 0.28209479$,$\sqrt{\mathrm{Var}(D)}=0.02998598/\sqrt{n}$,且

$$Y=\frac{(D-0.28209479)\sqrt{n}}{0.02998598} \tag{6.8.5}$$

的渐近分布为 $N(0,1)$,但由于其接近 $N(0,1)$的速度十分慢,因而 Dagustino 用随机模拟法得到了 Y 的分位数表(附表 10)。在给定了显著性水平 α 后,用统计量 Y 作检验的拒绝域为

$$\{Y\leqslant Y_{\alpha/2}\text{或 } Y\geqslant Y_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \tag{6.8.6}$$

例 6.8.2 上海中心气象台测定的上海市 1884～1982 年间的年降雨量数据如下(单位:mm):

1 184.4	1 113.4	1 203.9	1 170.7	975.4	1 462.3	947.8	1 416.0	709.2
1 147.5	935.0	1 016.3	1 031.6	1 105.7	849.9	1 233.4	1 008.6	1 063.8

1 004.9	1 086.2	1 022.5	1 330.9	1 439.4	1 236.5	1 088.1	1 288.7	1 115.8
1 217.5	1 320.7	1 078.1	1 203.4	1 480.0	1 269.9	1 049.2	1 318.4	1 192.0
1 016.0	1 508.2	1 159.6	1 021.3	986.1	794.7	1 318.3	1 171.2	1 161.7
791.2	1 143.8	1 602.0	951.4	1 003.2	840.4	1 061.4	958.0	1 025.2
1 265.0	1 196.5	1 120.7	1 659.3	942.7	1 123.3	910.2	1 398.5	1 208.6
1 305.5	1 242.3	1 572.3	1 416.9	1 256.1	1 285.9	984.8	1 390.3	1 062.2
1 287.3	1 477.0	1 017.9	1 217.7	1 197.1	1 143.0	1 018.8	1 243.7	909.3
1 030.3	1 124.4	811.4	820.9	1 184.1	1 107.5	991.4	901.7	1 176.5
1 113.5	1 272.9	1 200.3	1 508.7	772.3	813.0	1 392.3	1 006.2	1 108.8

试在 $\alpha=0.05$ 水平上检验年降雨量是否服从正态分布。

解：由于 $n=99$，故用统计量 D 作检验，在 $\alpha=0.05$ 时，由附表 10 查得 $Y_{0.025}=-2.543$，$Y_{0.975}=1.307$，故拒绝域为

$$\{Y\leqslant -2.543 \text{ 或 } Y\geqslant 1.307\}$$

现经计算有

$$D=0.2816,\qquad Y=-0.15242226$$

由于样本未落入拒绝域，故在 $\alpha=0.05$ 时可认为年降雨量服从正态分布。

第七章 方差分析和回归分析

§7.1 单因子方差分析

7.1.1 问题的提出

在实际工作中常会遇到比较多个总体均值是否相等的问题。例如某工厂的原料来自四个不同地区，那么用不同地区的原料生产的产品的质量是否一致？又如某工厂有三个联营厂，生产同一产品，生产工艺也相同，那么这几个联营厂的产品质量有无明显差异？再如某厂有五个检验员，他们检验同一产品的检验技术水平是否一致？类似问题有许多。它们都是同时比较多个均值是否相等的问题。今后我们称所要比较的地区、联营厂、检验员等为**因子**，因子所处的状态称为**水平**，如四个地区便是地区这一因子的四个水平，三个联营厂便是联营厂这一因子的三个水平，五个检验员便是检验员这一因子的五个水平。

为方便起见，今后用大写字母 A、B、C 等表示因子，用大写字母加下标表

示该因子的水平，如 A 的水平用 $A_1, A_2, \cdots$ 等表示。

下面用一个例子来说明问题的提法。

例 7.1.1 某食品公司对一种食品设计了四种新包装。为了考察哪种包装最受欢迎，选了十个有近似相同销售量的商店作试验，其中两种包装各指定两个商店销售，另两种包装各指定三个商店销售。在试验期中各商店的货架排放位置、空间都尽量一致，营业员的促销方法也基本相同。观察在一定时期的销售量，数据如表 7.1.1 所示：

表 7.1.1 销售量

包装类型	商店			商店数 n_i
	1	2	3	
A_1	12	18		2
A_2	14	12	13	3
A_3	19	17	21	3
A_4	24	30		2

在本例中，我们要比较的是四种包装的销售量是否一致，为此把包装类型看成是一个因子，记为因子 A，它有四种不同的包装，就看成是因子 A 的四个水平，记为 A_1, A_2, A_3, A_4。一般将第 i 种包装在第 j 个商店的销售量记为 y_{ij}，$i=1,2,3,4; j=1,2,\cdots,m_i$（在本例中，$m_1=2, m_2=3, m_3=3, m_4=2$）。

由于商店间的差异已被控制在最小的范围内，因此一种包装在不同商店里的销售量被看作为一种包装的若干次重复观察，所以可以把一种包装看作一个总体。为比较四种包装的销售量是否相同，相当于要比较的四个总体的均值是否一致。为简化起见，需要给出若干假定，把所要回答的问题归结为一个统计问题，然后设法解决它。

7.1.2 单因子方差分析的统计模型

在例 7.1.1 中所考察的因子只有一个，称其为单因子试验。通常在单因子试验中，设因子 A 有 r 个水平 $A_1, A_2, \cdots, A_r$，在每一水平下考察的指标可以看成一个总体，现有 r 个水平，故有 r 个总体，并假定：

(1) 每一总体均服从正态分布；

(2) 每一总体的方差相同；

(3) 从每一总体中抽取的样本相互独立。

那么我们要比较各个总体的均值是否一致，就是要检验各总体的均值是

否相同，设第 i 个总体的均值为 μ_i，那么就要检验如下假设：

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r \tag{7.1.1}$$

其备择假设为：

$$H_1: \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r \text{ 不全相同。}$$

通常 H_1 可以省略不写。

当 H_0 为真时，A 的 r 个水平的均值相同，这时称因子 A 的各水平间无显著差异，简称**因子 A 不显著**；反之，当 H_0 不真时，各 μ_i 不全相同，这时称因子 A 的各水平间有显著差异，简称**因子 A 显著**。图 7.1.1 示意了这两种说法的含义。

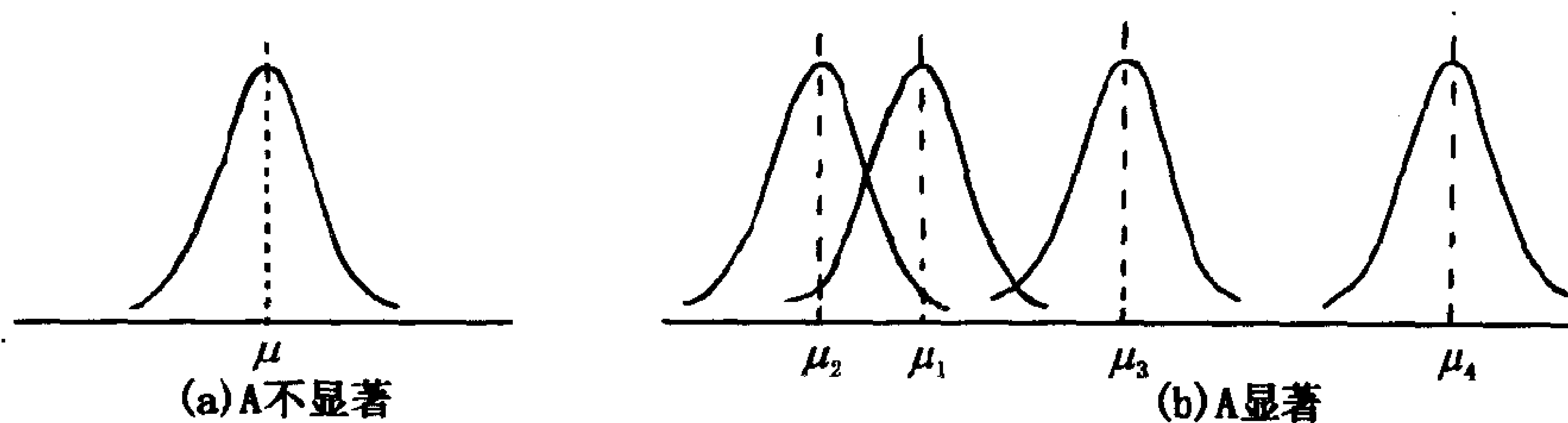


图 7.1.1　两种说法的示意图

用于检验假设(7.1.1)的统计方法称为**方差分析法**，其实质是检验若干个具有相同方差的正态总体的均值是否相等的一种统计方法。在所考察的因子仅有一个的场合，称为单因子方差分析。

为检验假设(7.1.1)需要从每一总体中抽取样本。设从第 i 个总体获得容量为 m_i 的样本 $y_{i1}, \cdots, y_{im_i}, i = 1, 2, \cdots, r$，各样本间还是相互独立的。这些样本可以通过试验或某种观察获得。为方便起见，本章对样本及其观察值都用同一符号 y 加下标表示，其含义可从上下文理解。

在 A_i 水平下获得的 y_{ij} 与 μ_i 不会总是一致的，记

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \mu_i$$

称 ε_{ij} 为随机误差，从而有

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \tag{7.1.2}$$

称(7.1.2)为 y_{ij} 的**数据结构式**，即来自均值为 μ_i 的总体的观察值 y_{ij} 可以看成是其均值 μ_i 与随机误差迭加而产生的。在假定 A_i 下的指标 y_{ij} 服从 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 分布时，则有 $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$。

综上，我们有单因子方差分析的统计模型：

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, & i = 1, 2, \cdots, r, \quad j = 1, 2, \cdots, m_i \\ \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立，且都服从 } N(0, \sigma^2) \end{cases} \tag{7.1.3}$$

可在此模型下检验假设(7.1.1)。

为了能更仔细地描述数据，常在方差分析模型中引入一般平均与效应的概念。称诸 μ_i 的加权平均

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} m_i\mu_i \tag{7.1.4}$$

为**一般平均**，其中 $n = \sum_{i=1}^{r} m_i$。称

$$a_i = \mu_i - \mu, \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{7.1.5}$$

为因子 A 第 i 水平的**主效应**，也简称为 A_i 的效应，容易看出效应间有如下关系式：

$$\sum_{i=1}^{r} m_i a_i = 0 \tag{7.1.6}$$

在记号(7.1.5)下，有

$$\mu_i = \mu + a_i \tag{7.1.7}$$

这表明第 i 个总体的均值是一般平均与其效应的迭加。此时单因子方差分析的统计模型可改写成：

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}, & i = 1,2,\cdots,r, \quad j = 1,2,\cdots,m_i \\ \sum_{i=1}^{r} m_i a_i = 0 \\ \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立，且都服从 } N(0,\sigma^2) \end{cases} \tag{7.1.8}$$

它由数据结构式、关于效应的约束条件及关于误差的假定三部分组成。在模型(7.1.8)下，所要检验的假设(7.1.1)可改写成：

$$H_0: a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0 \tag{7.1.9}$$

7.1.3 检验方法

通常在单因子方差分析中所得数据可列成如下形式：

试验数据				
A_1	y_{11}	y_{12}	……	y_{1m_1}
A_2	y_{21}	y_{22}	……	y_{2m_2}
⋮				
A_r	y_{r1}	y_{r2}	……	y_{rm_r}

其中各 y_{ij} 是有差异的，我们从考察数据间的差异着手来给出检验方法。

造成各 y_{ij} 间差异的原因可能有两个：一个可能是假设 H_0 不真，即各水平

下总体均值 μ_i(或水平效应 a_i) 不同,因此从各总体中获得的样本观测值也有差异。另一可能是 H_0 为真,差异是由于随机误差引起的。

为使这些差异的大小能定量表示出来,先引入若干记号:

把 A_i 水平下数据和记为 $y_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}$,其平均值记为 $\bar{y}_{i\cdot}=\frac{1}{m_i}y_{i\cdot}$,由(7.1.2)可知,$\bar{y}_{i\cdot}$ 具有如下结构式:

$$\bar{y}_{i\cdot}=\mu_i+\bar{\varepsilon}_{i\cdot} \tag{7.1.10}$$

其中 $\bar{\varepsilon}_{i\cdot}=\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\varepsilon_{ij}$。

把所有数据之和记为 $y_{\cdot\cdot}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}$,其平均值记为 $\bar{y}=\frac{y_{\cdot\cdot}}{n}$,由(7.1.8)知,$\bar{y}$ 具有如下结构式:

$$\bar{y}=\mu+\bar{\varepsilon} \tag{7.1.11}$$

其中 $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\varepsilon_{ij}$。

每一数据 y_{ij} 与总平均 $\bar{y}$ 的偏差可以分解成两部分(见图 7.1.2):

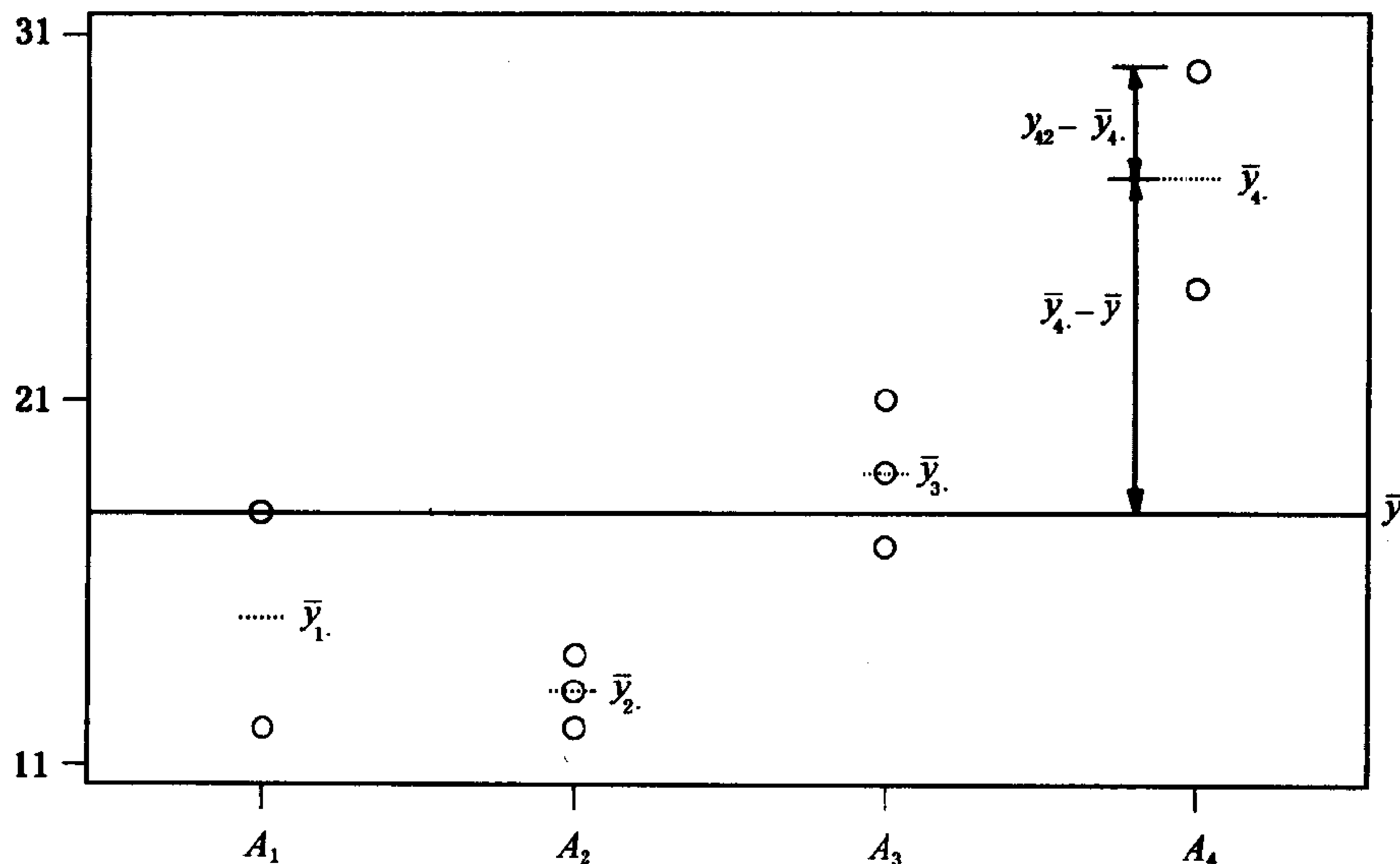


图 7.1.2 例 7.1.1 数据图及偏差分解示意图

$$y_{ij} - \bar{y} = (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) + (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}) \tag{7.1.12}$$

其中 $y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}$ 称为组内偏差，仅反映随机误差：

$$y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} = (\mu_i + \varepsilon_{ij}) - (\mu_i + \bar{\varepsilon}_{i\cdot}) = \varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot} \tag{7.1.13}$$

而 $\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}$ 称为组间偏差，除了反映随机误差外还反映了第 i 个水平效应：

$$\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y} = (\mu_i + \bar{\varepsilon}_{i\cdot}) - (\mu + \bar{\varepsilon}) = a_i + \bar{\varepsilon}_{i\cdot} - \bar{\varepsilon} \tag{7.1.14}$$

7.1.3.1　平方和分解式

各 y_{ij} 间总的差异大小可用总偏差平方和 S_T 表示：

$$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y})^2 \tag{7.1.15}$$

由随机误差引起的数据间的差异可以用组内偏差平方和表示，由于(7.1.13)说明组内偏差仅反映随机误差，故也把组内偏差平方和称为**误差偏差平方和**，记为 S_e：

$$S_e = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 \tag{7.1.16}$$

由于组间偏差除了随机误差外，还反映了效应间的差异，故由效应不同引起的数据差异可用组间偏差平方和表示，也称为**因子 A 的偏差平方和**，记为 S_A：

$$S_A = \sum_{i=1}^{r} m_i(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 \tag{7.1.17}$$

这里每一项上乘上 m_i 是因为第 i 水平有 m_i 个试验数据。

可以证明上述三个偏差平方和间有如下关系式：

$$S_T = S_A + S_e \tag{7.1.18}$$

(7.1.18) 式常称为**平方和分解式**。这是因为

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} + \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}) \\ &= S_e + S_A \end{aligned}$$

由于 $\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) = 0$，故上述第三项为 0。

7.1.3.2　检验统计量及拒绝域

为了给出检验方法，拟从比较 S_A 与 S_e 着手给出检验用的统计量与合适的拒绝域形式。为解决这一比较问题，先看看 S_A 与 S_e 的期望值。

由模型(7.1.8)可知各 ε_{ij} 相互独立，且 $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$，$i = 1, 2, \cdots, r$，

$j=1,2,\cdots,m_i$,故

$$\bar{\varepsilon}_i \sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{m_i}\right), \quad i=1,2,\cdots,r$$

$$\bar{\varepsilon} \sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$$

(1) 求 ES_e:由于

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{m_i}(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2(m_i-1)$$

又由 χ^2 分布的可加性可知

$$\frac{S_e}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{r}[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2] \sim \chi^2(\sum_{i=1}^{r}(m_i-1))=\chi^2(n-r)$$

由 χ^2 分布的性质知

$$E(\frac{S_e}{\sigma^2})=n-r$$

即

$$E(Se)=(n-r)\sigma^2 \tag{7.1.19}$$

(2) 求 ES_A:由于

$$S_A=\sum_{i=1}^{r}m_i(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{r}m_i(a_i+\bar{\varepsilon}_{i\cdot}-\bar{\varepsilon})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}m_ia_i^2+\sum_{i=1}^{r}m_i\bar{\varepsilon}_{i\cdot}^2-n\bar{\varepsilon}^2+2\sum_{i=1}^{r}m_ia_i(\bar{\varepsilon}_{i\cdot}-\bar{\varepsilon})$$

由于 $E\bar{\varepsilon}_{i\cdot}=0, E\bar{\varepsilon}=0$,故

$$ES_A=\sum_{i=1}^{r}m_ia_i^2+\sum_{i=1}^{r}m_iE(\bar{\varepsilon}_{i\cdot}^2)-nE(\bar{\varepsilon}^2)=\sum_{i=1}^{r}m_ia_i^2+\sum_{i=1}^{r}m_i\frac{\sigma^2}{m_i}-n\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}m_ia_i^2+(r-1)\sigma^2 \tag{7.1.20}$$

由(7.1.19)与(7.1.20)可得:

$$E\left(\frac{S_e}{n-r}\right)=\sigma^2, \quad E\left(\frac{S_A}{r-1}\right)=\sigma^2+\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}m_ia_i^2 \geqslant \sigma^2$$

在假设(7.1.9)为真时,各 a_i 均相等,且为 0,故有

$$E(\frac{S_A}{r-1})=\sigma^2$$

因此可采用统计量

$$F = \frac{S_A/(r-1)}{S_e/(n-r)} \tag{7.1.21}$$

来检验假设(7.1.9)。当 H_0 不真时，分子的均值要比分母的均值来得大，因而取如下拒绝域是合理的：

$$W = \{F \geqslant c\}$$

对给定的显著性水平 α，c 应满足

$$P(F \geqslant c) = \alpha$$

7.1.3.3　临界值 c 的确定

我们有如下事实：上一小段已证明了 $\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-r)$，还可证明，在 H_0 为真时，$\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(r-1)$，且与 S_e 相互独立。

因而，由 F 分布的构造可知，在 H_0 为真时，(7.1.21)给出的检验统计量 $F \sim F(r-1, n-r)$，当取 $c = F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$，便有 $P(F \geqslant c) = \alpha$，故得拒绝域为

$$W = \{F \geqslant F_{1-\alpha}(r-1, n-r)\} \tag{7.1.22}$$

通常把以上求统计量(7.1.21)的计算列成一张表格，称为方差分析表(见表 7.1.2)，这里简称偏差平方和为平方和，相应的 χ^2 分布中的自由度记在自由度这一列中，偏差平方和与自由度的比称为均方和。

表 7.1.2　单因子方差分析表

来　源	平方和	自由度	均方和	F 比
A	S_A	$f_A = r-1$	$V_A = S_A/f_A$	$F = V_A/V_e$
e	S_e	$f_e = n-r$	$V_e = S_e/f_e$	
T	S_T	$f_T = n-1$		

通过代数运算，上述方差分析表中的各平方和可如下计算：

$$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{n} \tag{7.1.23}$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{r} m_i(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{r}\frac{y_{i\cdot}^2}{m_i} - \frac{y_{..}^2}{n} \tag{7.1.24}$$

$$S_e = S_T - S_A \tag{7.1.25}$$

其中 $y_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}$，$y_{..} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}$。

综上，作方差分析的步骤如下：

(1) 计算各水平下数据和 $y_{i\cdot}, i=1,2,\cdots,r$ 及总和 $y_{\cdot\cdot}$；

(2) 计算各类平方和 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}^2, \sum_{i=1}^{r}y_{i\cdot}^2/m_i, y_{\cdot\cdot}^2/n$；

(3) 按公式(7.1.23)，(7.1.24)，(7.1.25) 计算各类偏差平方和；

(4) 填写方差分析表 7.1.2；

(5) 对给定的显著性水平 α，查 F 分布表得 $F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$，并与 F 值比较大小，然后作出是否拒绝原假设 H_0 的结论。

下面对例 7.1.1 作方差分析。

(1) 由表 7.1.1 求得各水平下数据和与总和分别为：

$$y_{1\cdot}=30,\quad y_{2\cdot}=39,\quad y_{3\cdot}=57,\quad y_{4\cdot}=54,\quad y_{\cdot\cdot}=180$$

(2) 求各类平方和

$$\sum_i\sum_j y_{ij}^2=3544 \qquad \sum_i\frac{y_{i\cdot}^2}{m_i}=3498 \qquad \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{n}=3240$$

以上计算均列在表 7.1.3 中。

表 7.1.3　例 7.1.1 的计算表

水　平	数　据	m_i	$y_{i\cdot}$	$y_{i\cdot}^2/m_i$	$\sum_j y_{ij}^2$
A_1	12　18	2	30	450	468
A_2	14　12　13	3	39	507	509
A_3	19　17　21	3	57	1 083	1 091
A_4	24　30	2	54	1 458	1 476
和		$n=10$	$y_{\cdot\cdot}=180$	$\sum_i\frac{y_{i\cdot}^2}{m_i}=3498$	$\sum_i\sum_j y_{ij}^2=3544$

(3) 由(7.1.23)～(7.1.25) 求得各类偏差平方和为：

$$S_T=3544-3240=304$$
$$S_A=3498-3240=258$$
$$S_e=304-258=46$$

(4) 填写方差分析表，见表 7.1.4。

表 7.1.4　例 7.1.1 的方差分析表

来　源	平方和	自由度	均方和	F 比
A	258	3	86	11.22
e	46	6	7.67	
T	304	9		

(5) 在 $i=0.05$ 时，查得 $F_{0.95}(3,6)=4.76$，故拒绝域为 $\{F\geqslant 4.76\}$，现 F

$=11.22>4.76$，故样本落入拒绝域，即认为四种包装的销售量有显著差异，这说明不同包装受欢迎的程度不同。

7.1.4 效应与误差方差的估计

7.1.4.1 效应与误差方差的点估计

由模型(7.1.8)知各 y_{ij} 相互独立，且 $y_{ij}\sim N(\mu+a_i,\sigma^2)$，因而可用极大似然法求出各效应与 σ^2 的估计。

首先可写出似然函数

$$L(\mu,a_1,a_2,\cdots,a_r,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(y_{ij}-\mu-a_i)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

其对数似然函数为

$$l(\mu,a_1,a_2,\cdots,a_r,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\mu-a_i)^2$$

似然方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial l}{\partial\mu}=\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\mu-a_i)=0\\[2ex]\dfrac{\partial l}{\partial a_i}=\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\mu-a_i)=0\qquad i=1,2,\cdots,r\\[2ex]\dfrac{\partial l}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\mu-a_i)^2=0\end{cases}$$

注意到约束条件 $\sum_{i=1}^{r}m_ia_i=0$，则得 MLE 为：

$$\begin{aligned}&\hat{\mu}=\bar{y}\\&\hat{a}_i=\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y},\quad i=1,2,\cdots,r\\&\hat{\sigma}_M^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2=\frac{S_e}{n}\end{aligned}\tag{7.1.26}$$

由(7.1.26)可知 $\mu_i=\mu+a_i$ 的 MLE 为

$$\hat{\mu}_i=\bar{y}_i\tag{7.1.27}$$

由于 $E\bar{y}=\mu,E\bar{y}_i=\mu_i=\mu+a_i$，故 $E\hat{a}_i=a_i$，从而(7.1.26)、(7.1.27)两式中各个估计均为相应参数的无偏估计。

但由(7.1.19)可知 $E\hat{\sigma}_M^2=\frac{n-r}{n}\sigma^2$，不是 σ^2 的无偏估计，将它作一修改可

知，$\frac{S_e}{n-r}$ 是 σ^2 的无偏估计，因而常用的 σ^2 的无偏估计是

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_e}{n-r} \tag{7.1.28}$$

7.4.1.2　μ_i 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

利用第五章的枢轴量法，可以构造 μ_i 的置信区间。

从 μ_i 的点估计 $\bar{y}_{i\cdot}$ 出发，由于前已证明 $\bar{y}_i \sim N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{m_i})$，又 $\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(f_e)$（这里 $f_e = n-r$），且 $\bar{y}_{i\cdot}$ 与 S_e 相互独立，因而可以构造一个服从 t 分布的枢轴量

$$t_i = \frac{\frac{\bar{y}_{i\cdot} - \mu_i}{\sigma/\sqrt{m_i}}}{\sqrt{\frac{S_e}{\sigma^2}/f_e}} = \frac{\bar{y}_{i\cdot} - \mu_i}{\hat{\sigma}/\sqrt{m_i}} \sim t(f_e)$$

因而从

$$P(|t_i| \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_e)) = 1-\alpha$$

可得 μ_i 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{y}_{i\cdot} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_e)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m_i}},\quad \bar{y}_{i\cdot} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_e)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m_i}}\right] \tag{7.1.29}$$

这里 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S_e}{f_e}}$。

例 7.1.2　对例 7.1.1 各种包装的销售量的均值分别求置信水平为 0.95 的置信区间。

解：首先求得各种包装下销售量均值的点估计分别为：

$\hat{\mu}_1 = \bar{y}_{1\cdot} = 15$，　$\hat{\mu}_2 = \bar{y}_{2\cdot} = 13$，　$\hat{\mu}_3 = \bar{y}_{3\cdot} = 19$，　$\hat{\mu}_4 = \bar{y}_{4\cdot} = 27$

现 $f_e = 6$，在 $i = 0.05$ 时，$t_{0.975}(6) = 2.4469$，又由表 7.1.4 知 $\hat{\sigma}^2 = 7.67$，故 $\hat{\sigma} = 2.77$。当 $m_i = 2$ 时，$t_{0.975}(6)\hat{\sigma}/\sqrt{m_i} = 4.8$，$m_i = 3$ 时，$t_{0.975}(6)\hat{\sigma}/\sqrt{m_i} = 3.9$。因此各种包装下销售量均值的 0.95 的置信区间分别为：

$$\mu_1: [15-4.8, 15+4.8] = [10.2, 19.8]$$
$$\mu_2: [13-3.9, 13+3.9] = [9.1, 16.9]$$
$$\mu_3: [19-3.9, 19+3.9] = [15.1, 22.9]$$
$$\mu_4: [27-4.8, 27+4.8] = [22.2, 31.8]$$

为直观起见，常将各水平下指标均值画成一张主效应图，例 7.1.1 的主效应图见图 7.1.3（图中各点为对应水平上的 $\bar{y}_{i\cdot}$）。从图上看出第四种包装的效

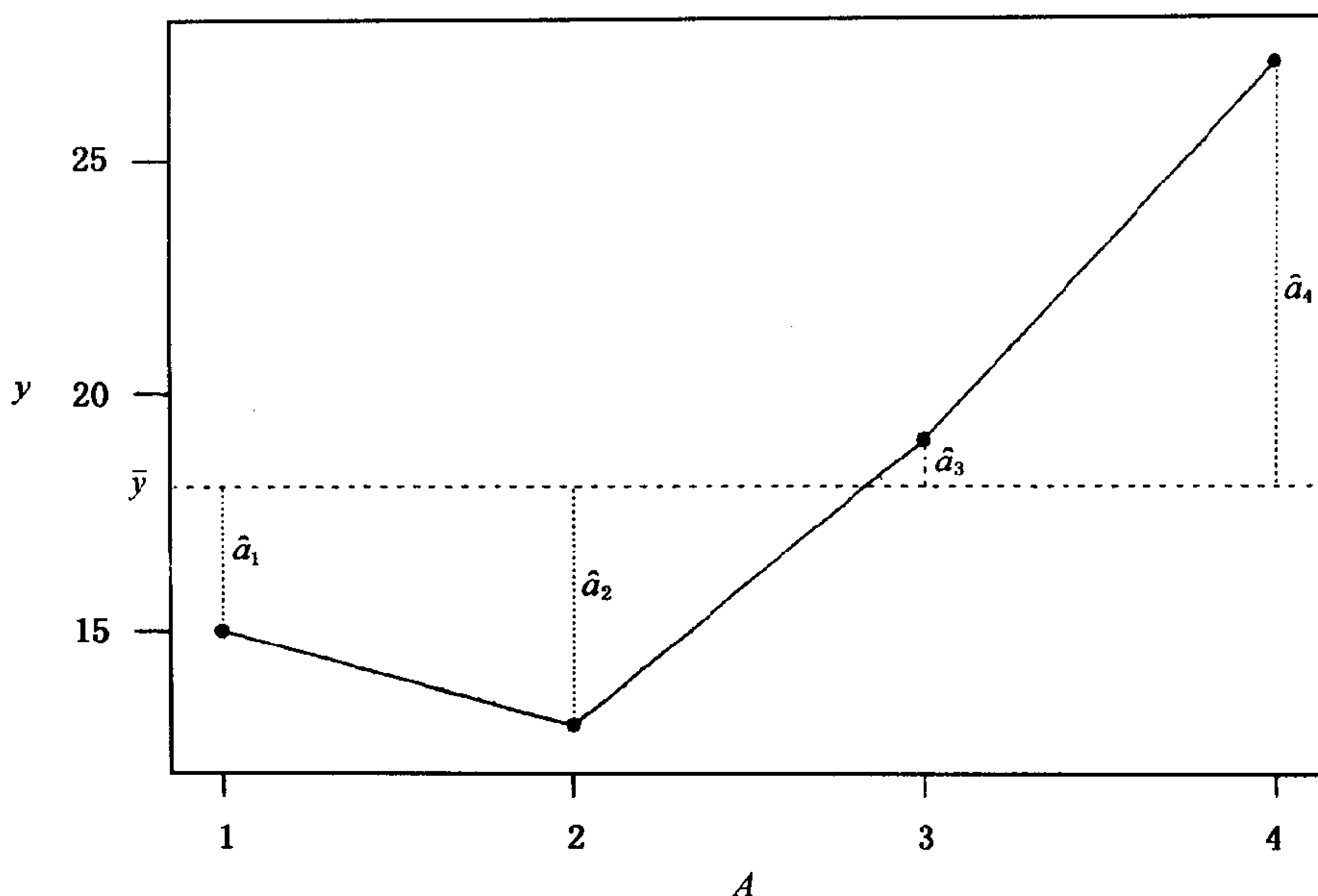


图 7.1.3　例 7.1.1 的主效应图

应最高，第二种包装的效应最低。

7.1.5　重复数相同的方差分析

当在因子 A 的每一水平下重复试验次数相同时，即当 $m_1 = m_2 = \cdots = m_r$ 时，上述一些表达式可简化。若记每一水平下重复次数为 m，则：

效应约束条件(7.1.6)可简化为 $\sum_{i=1}^{r} a_i = 0$；

S_A 的计算公式(7.1.24)可简化为 $S_A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} y_{i\cdot}^2 - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{n}$；

μ_i 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间(7.1.29)可改为：

$$\left[y_{i\cdot}^2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_e)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}},\ y_{i\cdot}^2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_e)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}\right]$$

其它一切都不变，下面看一例子。

例 7.1.3　今有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度有无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，经测试所得的强度数据列于表 7.1.5 中。

表 7.1.5　锻件的强度　　单位：100kg

工厂	强度数据			
A_1	115	116	98	93
A_2	103	107	118	116
A_3	73	89	85	97

假定第 i 个厂的强度 $\sim N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,3$，试作如下分析：

(1) 检验三个厂的强度有无显著差异；

(2) 求每一个厂平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：(1) 首先计算各水平下的数据和、各类平方和，它们都列在表 7.1.6 中。

这里 $r=3,m=4,n=rm=12$。

表 7.1.6　例 7.1.3 的计算表

水平	数据				$y_{i\cdot}$	$y_{i\cdot}^2$	$\sum_j y_{ij}^2$
A_1	115	116	98	93	422	178 084	44 934
A_2	103	107	118	116	444	197 136	49 438
A_3	73	89	85	97	344	118 336	29 884
和					1 210	493 556	124 256

各类偏差平方和如下：

$$S_T = 124256 - \frac{1210^2}{12} = 2247.7$$

$$S_A = \frac{1}{4} \times 493556 - \frac{1210^2}{12} = 1380.7$$

$$S_e = 2247.7 - 1380.7 = 867.0$$

方差分析表见表 7.1.7。

表 7.1.7　例 7.1.3 的方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 比
A	1 380.7	2	690.35	7.166
e	867.0	9	96.33	
T	2 247.7	11		

在 $a=0.05$ 时，$F_{0.95}(2,9)=4.26$，故拒绝域为

$$W=\{F \geqslant 4.26\}$$

现在 $F = 7.166 > 4.26$，因而在 $i = 0.05$ 水平下拒绝 H_0，认为三个厂的锻件强度有显著差异。

(2) 为求各厂平均强度的置信区间，首先求得各厂锻件平均强度的点估计：

$$\hat{\mu}_1 = \overline{y}_{1\cdot} = 105.5, \quad \hat{\mu}_2 = \overline{y}_{2\cdot} = 111, \quad \hat{\mu}_3 = \overline{y}_{3\cdot} = 86$$

现 $f_e = 9$，在 $i = 0.05$ 时，$t_{0.975}(9) = 2.2622$，又由表 7.1.3 知 $\hat{\sigma}^2 = 96.33$，故 $\hat{\sigma} = 9.815$，从而

$$t_{0.975}(9) \cdot \hat{\sigma}/\sqrt{m} = 2.2622 \times 9.815/\sqrt{4} = 11.1$$

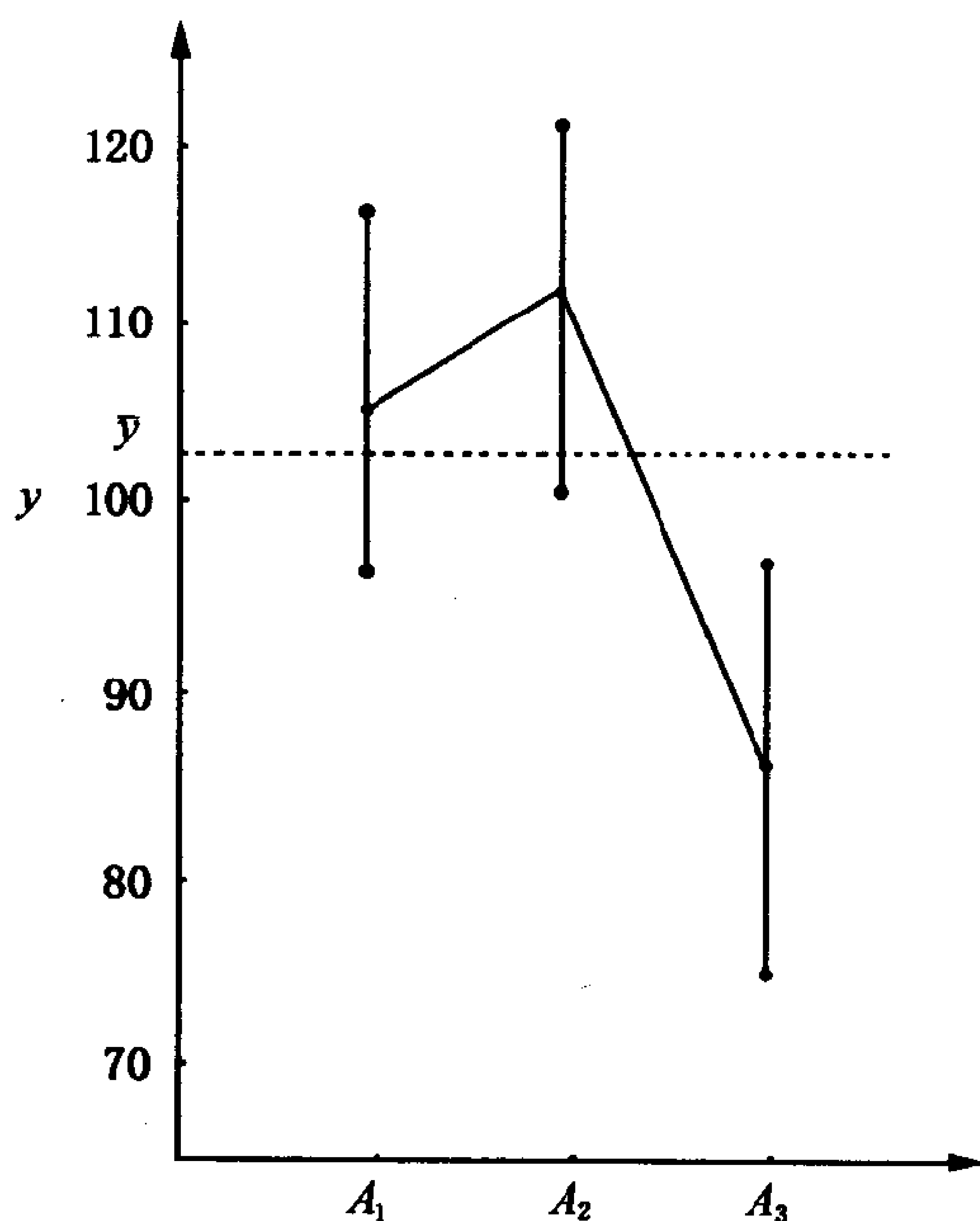


图 7.1.4　例 7.1.3 各水平的均值图

(图中 · 为 $\overline{y}_i$，线段表示 μ_i 的 0.95 置信区间)

则各厂锻件强度均值的置信水平为 0.95 的置信区间分别为：

$$\mu_1: [105.5 - 11.1,\ 105.5 + 11.1] = [94.4, 116.6]$$

$$\mu_2: [111 - 11.1,\ 111 + 11.1] = [99.9, 122.1]$$

$$\mu_3: [86 - 11.1,\ 86 + 11.1] = [74.9, 97.1]$$

其各水平的均值图见图 7.1.4。

从图中可见 A_2 厂的平均强度最高，A_3 厂的平均强度最低。

§7.2 多重比较

在方差分析中,如果经过 F 检验拒绝原假设(7.1.9),这表明因子 A 是显著的,即 r 个水平对应的指标均值不全相等,但不一定两两之间都有差异。譬如在例 7.1.3 中,经检验三个工厂生产的同一种机械锻件的强度有显著差异,从图 7.1.4 看 A_2 厂的平均强度最高,A_3 厂的平均强度最低,μ_2 与 μ_3 的 95% 的置信区间没有相交,这从直观上表明这两个工厂的平均强度确有明显差异,那么 A_1 厂生产的锻件强度与 A_2 厂生产的锻件强度间有无显著差异呢?若两者有显著差异,那么当我们需要高强度的锻件时应向 A_2 厂购买,如果两者间无显著差异,那么当 A_2 厂无货供应时也可向 A_1 厂购买。所以在一些实际问题中,当方差分析的结论是因子 A 显著时,还需要我们进一步去确认哪些水平间是确有差异的,哪些水平间无显著差异。

同时比较任意两个水平均值间有无显著差异的问题称为**多重比较**,即要以显著性水平 α,同时检验以下 $\binom{r}{2}$ 个假设:

$$H_0^{ij}: \mu_i = \mu_j \qquad i < j, \quad i,j = 1,2,\cdots,r \tag{7.2.1}$$

直观考虑,当 H_0^{ij} 为真时,$|\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}|$ 不应过大,因此考虑如下形式的拒绝域:

$$W = \bigcup_{i<j} \{ |\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}| > c' \}$$

这里 $\bar{y}_{i\cdot}$ 表示 A_i 水平下数据的平均值,$i = 1,2,\cdots,r$。如果给定了显著性水平 α,就要求在 $\binom{r}{2}$ 个假设 H_0^{ij} 为真时

$$P(W) = \alpha$$

下面分两种情况来讨论临界值 c 的确定方法,以下涉及的符号都与 §7.1 相同。

7.2.1 重复数相等场合的 T 法

在因子 A 的每一水平下获得容量为 m 的样本,则样本均值 $\bar{y}_{i\cdot} \sim N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{m})$,$i = 1,2,\cdots,r$,且它们间相互独立,而且 $\bar{y}_{i\cdot}$ 与 S_e 亦独立,因而用 $\hat{\sigma}^2 = S_e/f_e$ 去估计 σ^2 时,有

$$t_i = \frac{\bar{y}_{i\cdot} - \mu_i}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}} \sim t(f_e)$$

那么当一切 H_0^{ij} 为真时，有

$$\begin{aligned} P(W) &= P(\bigcup_{i<j}\{|\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{j\cdot}| > c\}) \\ &= 1 - P(\bigcap_{i<j}\{|\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{j\cdot}| \leqslant c\}) \\ &= 1 - P(\max_{i<j}\{|\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{j\cdot}| \leqslant c\}) \\ &= P(\max_{i<j}|\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{j\cdot}| > c) \\ &= P\left(\max_{i<j}\left|\frac{\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{j\cdot}}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right| > \frac{c}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right) \\ &= P\left(\max_{i<j}\left|\frac{(\overline{y}_{i\cdot} - \mu_i) - (\overline{y}_{j\cdot} - \mu_j)}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right| > \frac{c}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right) \\ &= P\left(\max_i\left(\frac{\overline{y}_{i\cdot} - \mu_i}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right) - \min_j\left(\frac{\overline{y}_{j\cdot} - \mu_j}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right) > \frac{c}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right) \\ &= P\left(t_{(r)} - t_{(1)} > \frac{c}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}}\right) = \alpha \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

记

$$q(r, f_e) = t_{(r)} - t_{(1)}$$

这里的 $t_{(r)}$ 与 $t_{(1)}$ 分别是来自 $t(f_e)$ 的容量为 r 的样本的最大次序统计量与最小次序统计量，所以 $q(r,f_e)$ 就是自由度为 f_e 的 t 分布的容量为 r 的样本极差，称它为 **t 化极差变量**，其分布与因子的水平数 r 及误差平方和的自由度 f_e 有关，该分布的分位数表已算出，列在附表 11 中。为使(7.2.2) 所示的概率为 α，可取

$$\frac{c}{\hat{\sigma}/\sqrt{m}} = q_{1-\alpha}(r, f_e)$$

从而

$$c = q_{1-\alpha}(r, f_e)\hat{\sigma}/\sqrt{m}$$

综上可知检验问题(7.2.1) 的水平为 α 的拒绝域为

$$\{|\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{j\cdot}| \geq q_{1-\alpha}(r, f_e)\hat{\sigma}/\sqrt{m}\} \tag{7.2.3}$$

这一方法最早是由 Tukey 研究的，因而称此法为 T 法。

例 7.2.1　在 $i = 0.05$ 水平下对例 7.1.3 作多重比较。

解：在本例中，$r = 3, m = 4, f_e = 9$，在 $i = 0.05$ 水平下，查附表 11 可得 $q_{0.95}(3,9) = 3.95$。又由例 7.1.3 求得 $\hat{\sigma}^2 = S_e/f_e = 96.33$，故 $\hat{\sigma} = 9.815$，从而临界值

$$c = q_{0.95}(3,9)\hat{\sigma}/\sqrt{m} = 19.38$$

因而当 $i < j$ 时，如果 $|\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{j\cdot}| > 19.38$ 则拒绝 $\mu_i = \mu_j$ 这一假设，否则就保

留这一假设。现从例 7.1.3 得

$|\bar{y}_{1}.-\bar{y}_{2}.|=|105.5-111|=5.5<19.38$,保留假设 $H_0^{12}:\mu_1=\mu_2$;

$|\bar{y}_{1}.-\bar{y}_{3}.|=|105.5-86|=19.5>19.35$,拒绝假设 $H_0^{13}:\mu_1=\mu_3$;

$|\bar{y}_{2}.-\bar{y}_{3}.|=|111-86|=25>19.38$,拒绝假设 $H_0^{23}:\mu_2=\mu_3$。

综上可知,在 $i=0.05$ 水平下 μ_1 与 μ_2 间无显著差异,而 μ_1、μ_2 与 μ_3 间有显著差异。

7.2.2 重复数不等场合的 S 法

为叙述 S 法,先给出对比的定义。

定义 7.2.1 设 $c_1,c_1,\cdots,c_r$ 为 r 个常数,且满足 $\sum_{i=1}^{r}c_i=0$,则称 $L=\sum_{i=1}^{r}c_i\mu_i$ 为一个**对比**。

我们现在讨论的假设 H_0^{ij} 中的 $\mu_i=\mu_j$ 也可以看成是一种特殊的对比。譬如 $\mu_1=\mu_2$ 可看成 $c_1=1,c_2=-1,c_3=\cdots=c_r=0$ 的一个对比。

对比就不限于上述的两两均值的比较,譬如在例 7.1.3 中我们要检验 $H_0:\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}=\mu_3$,这也是一个对比:

$$\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2-\mu_3=0$$

即 $c_1=c_2=\dfrac{1}{2},c_3=-1$。

检验一切对比是否为 0,即检验

$$H_0:L=0 \qquad 对一切\ c_1,c_2,\cdots,c_r,\sum_{i=1}^{r}c_i=0$$

的方法是由 Scheffe 提出的,故称 S 法。下面叙述 S 法中临界值 c 值的确定方法。

在重复数 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 不等的场合,

$$(\bar{y}_{i}.-\bar{y}_{j}.)-(\mu_i-\mu_j)\sim N\left(0,\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\sigma^2\right)$$

又由于 $\bar{y}_{i}.,\bar{y}_{j}.$ 与 S_e 独立,因而有

$$\frac{(\bar{y}_{i}.-\bar{y}_{j}.)-(\mu_i-\mu_j)}{\sqrt{\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}}\hat{\sigma}}\sim t(f_e)$$

在 H_0^{ij} 为真时,

$$\frac{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}}{\sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}}\hat{\sigma}} \sim t(f_e)$$

或

$$F_{ij} = \frac{(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot})^2}{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2} \sim F(1, f_e)$$

当一切 H_0^{ij} 为真时，如同(7.2.2)的推导，有

$$\begin{aligned} P(W) &= P\left\{\max_{i<j}\left|\frac{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}}{\sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}}\hat{\sigma}}\right| > c'\right\} \\ &= P\left\{\max_{i<j}\frac{(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot})^2}{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2} > c'^2\right\} \\ &= P(\max_{i<j} F_{ij} > c'^2) = \alpha \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

若令 $F' = \max\limits_{i<j} F_{ij}$，可证明 $\frac{F'}{(r-1)} \sim F(r-1, f_e)$（参阅文献[17]），为使(7.2.4)所示的概率为 α，可取

$$c'^2 = (r-1)\, F_{1-\alpha}(r-1, f_e)$$

这表明当

$$\left|\frac{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}}{\sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}}\hat{\sigma}}\right| > \sqrt{(r-1)F_{1-\alpha}(r-1, f_e)}$$

时拒绝假设 $\mu_i = \mu_j$，亦即当

$$|\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}| > \sqrt{(r-1)F_{1-\alpha}(r-1, f_e)\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}$$

时拒绝 H_0^{ij}。若记

$$c_{ij} = \sqrt{(r-1)F_{1-\alpha}(r-1, f_e)\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}$$

则检验 $H_0^{ij}: \mu_i = \mu_j$ 的水平为 α 的拒绝域为

$$\{|\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}| > c_{ij}\} \tag{7.2.5}$$

例 7.2.2 在显著性水平 $i = 0.05$ 下对例 7.1.1 作多重比较。

解：在本例中，$r = 4, f_e = 6, \hat{\sigma}^2 = 7.67$，在 $i = 0.05$ 时，$F_{0.95}(3,6) = 4.76$。

由于 $m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 3, m_4 = 2$，所以对不同的 i, j，检验假设 H_0^{ij} 的拒绝域不同。

当 $m_i=2, m_j=2$ 时，$c_{(1)}=\sqrt{3\times 4.76\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\times 7.67}=10.5$，因而检验 H_0^{14} 的拒绝域为 $\{|\bar{y}_{1\cdot}-\bar{y}_{4\cdot}|>10.5\}$，现 $|\bar{y}_{1\cdot}-\bar{y}_{4\cdot}|=12>10.5$，故拒绝 H_0^{14}，认为 μ_1 与 μ_4 有显著差异。

当 $m_i=2, m_j=3$ 时，$c_{(2)}=\sqrt{3\times 4.76\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\times 7.67}=9.6$，因而检验 $H_0^{12}, H_0^{13}, H_0^{24}, H_0^{34}$ 的拒绝域为 $\{|\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{j\cdot}|>9.6\}$，现 $|\bar{y}_{1\cdot}-\bar{y}_{2\cdot}|=2<9.6$，$|\bar{y}_{1\cdot}-\bar{y}_{3\cdot}|=4<9.6$，$|\bar{y}_{2\cdot}-\bar{y}_{4\cdot}|=14>9.6$，$|\bar{y}_{3\cdot}-\bar{y}_{4\cdot}|=8<9.6$，因此仅 μ_2 与 μ_4 间有显著差异，其它无显著差异。

当 $m_i=3, m_j=3$ 时，$c_{(3)}=\sqrt{3\times 4.76\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\times 7.67}=8.5$，因而检验 H_0^{23} 的拒绝域为 $\{|\bar{y}_{2\cdot}-\bar{y}_{3\cdot}|>8.5\}$，现 $|\bar{y}_{2\cdot}-\bar{y}_{3\cdot}|=6<8.5$，故 μ_2 与 μ_3 间无显著差异。

综上，A_4 这种包装的销售量明显高于 A_1、A_2 这两种包装的销售量，与 A_3 包装间的差异尚未达到显著水平，这说明 A_4 是最受欢迎的包装。

* §7.3 方差齐性检验

在方差分析中要求所涉及的 r 个正态总体的方差相等，这一要求被简称为**方差齐性**，这里 r 是因子的水平数。如何检验方差齐性？这便是本节要讨论的方差齐性检验。

设有 r 个正态总体 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,r$，从第 i 个总体中抽取了容量为 m_i 的样本 $y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{im_i}$，设样本均值为 $\bar{y}_i=\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}$，样本无偏方差为 $s_i^2=\frac{1}{m_i-1}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$，现要检验的假设为

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_r^2 \tag{7.3.1}$$

备择假设 $H_1:\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_r^2$ 不全相等，它常略去不写。

下面分两种情况介绍检验方法。

7.3.1 样本容量相等场合

记 $m_1=m_2=\cdots=m_r=m$，常用的有两种检验方法。

(1) 最大 F 检验(Hartley 检验)

检验用的统计量为

$$F_{\max} = \frac{\max\{s_1^2, s_2^2, \cdots, s_r^2\}}{\min\{s_1^2, s_2^2, \cdots, s_r^2\}} \tag{7.3.2}$$

从直观考虑，当假设(7.3.1)为真时，$s_1^2, s_2^2, \cdots, s_r^2$ 中的最大值与最小值不应相差过大，因而取下列拒绝域是合理的：

$$\{F_{\max} \geqslant c\}$$

在假设(7.3.1)为真时，对给定的显著水平 α，c 应满足 $P(F_{\max} > c) = \alpha$。为确定临界值 c，需要求当 $\sigma_1^2 = \sigma_1^2 = \cdots = \sigma_r^2 \triangleq \sigma^2$ 时 $F_{\max}$ 的分布，注意到此时，$(m-1)s_i^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m-1)$，$i = 1, 2, \cdots, r$，且它们间还相互独立，从而 $F_{\max}$ 变成 r 个相互独立的自由度为 $m-1$ 的 χ^2 变量的最大值与最小值之比，其分布与 $r, m-1$ 有关，其临界值 c 在附表 12 中给出。通常记 $c = F_{\max, 1-\alpha}(r, m-1)$，从而检验问题(7.3.1)的水平为 α 的拒绝域为

$$W = \{F_{\max} \geqslant F_{\max, 1-\alpha}(r, m-1)\} \tag{7.3.3}$$

例 7.3.1 在显著性水平 $i = 0.05$ 时检验例 7.1.3 中三个总体方差是否相等。

解：这里 $r = 3, m = 4$，在 $i = 0.05$ 时，由附表 12 查得：

$$F_{\max, 0.95}(3, 3) = 27.8$$

因此用统计量(7.3.2)作检验的水平为 0.05 的拒绝域是

$$W = \{F_{\max} \geqslant 27.8\}$$

现由样本求得各总体的样本无偏方差为

$$s_1^2 = 137.7, \quad s_2^2 = 51.3, \quad s_3^3 = 100$$

$$\max\{s_i^2\} = 137.7, \quad \min\{s_i^2\} = 51.3$$

由此求得 $F_{\max} = 137.7/51.3 = 2.68 < 27.8$，样本落入接受域，故在 $i = 0.05$ 水平上可认为三个总体方差之间无显著差异。

(2) 最大方差检验(Cochran 检验)

当 $\min\{s_i^2\} \approx 0$ 时，用检验统计量(7.3.2)将会导致犯第二类错误的概率很大，Cochran 提出了另一种检验统计量：

$$G_{\max} = \frac{\max\{s_1^2, s_2^2, \cdots, s_r^2\}}{\sum_{i=1}^{r} s_i^2} \tag{7.3.4}$$

同样，从直观上考虑，当假设(7.3.1)为真时，$\max\{s_i^2\}$ 在 $\sum_{i=1}^{r} s_i^2$ 中所占比例不

会太大，因而取下面的拒绝域是合理的：

$$W = \{G_{max} \geqslant c\}$$

在 H_0 为真时，c 值使 $P(G_{max} \geqslant c) = \alpha$，$G_{max}$ 的分布也与 $r, m-1$ 有关，其临界值 c 可从附表 13 中查出，常记 $c = G_{max,1-\alpha}(r,f)$，$f = m-1$，从而检验问题(7.3.1)的水平为 α 的拒绝域为

$$W = \{G_{max} \geqslant G_{max,1-\alpha}(r, m-1)\} \tag{7.3.5}$$

若对例 7.1.3 用 G_{max} 统计量去检验三个总体方差是否相等，则由 $r=3, m=4$，在 $i=0.05$ 时，从附表 13 可查得 $G_{max,0.95}(3,3) = 0.7977$，其拒绝域为 $\{G_{max} \geqslant 0.7977\}$。由例 7.3.1 中的数据可知 $\max\{s_i^2\} = 137.7$，$\sum_{i=1}^{3} s_i^2 = 289$，从而得 $G_{max} = 137.7/289 = 0.476 < 0.7977$，样本落入接受域，因此在 $i = 0.05$ 水平上可认为三个总体方差相等。

7.3.2 样本容量不等场合

在样本容量不等时可采用下面的 Bartlett 检验。它是从广义似然比导出的。

如本节开头所述，各 y_{ij} 独立，$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,r$，$j=1,2,\cdots,m_i$，那么我们可写出似然函数：

$$L(\mu_1,\cdots,\mu_r,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(y_{ij}-\mu_i)^2\}$$

$$= \prod_{i=1}^{r}(2\pi\sigma_i^2)^{-\frac{m_i}{2}}\exp\{-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{(y_{ij}-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\}$$

在参数空间 $\Theta = \{(\mu_1,\cdots,\mu_r,\sigma_1^2\cdots,\sigma_r^2): -\infty < \mu_i < \infty, \sigma_i^2 > 0, i=1,\cdots,r\}$ 上，可求得各 μ_i, σ_i^2 的 MLE 为

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_i, \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 = \frac{m_i-1}{m_i}s_i^2$$

此时似然函数的极大值为

$$L_{max} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{r}(\hat{\sigma}_i^2)^{-\frac{m_i}{2}}e^{-\frac{n}{2}}$$

其中 $n = \sum_{i=1}^{r} m_i$。在 H_0 为真时，参数空间 $\Theta_0 = \{\mu_1,\cdots,\mu_r,\sigma^2): -\infty < \mu_i < \infty$，$i=1,2,\cdots,r, \sigma^2 > 0\}$，这时各 μ_i 及 σ^2 的 MLE 为

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 = \frac{1}{n}S_e$$

似然函数的极大值为

$$L_{0\max} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}$$

从而似然比为

$$\lambda = \frac{L_{0\max}}{L_{\max}} = \frac{\prod_{i=1}^{r}(\hat{\sigma}_i^2)^{\frac{m_i}{2}}}{(\hat{\sigma}^2)^{\frac{n}{2}}}$$

其拒绝域形为$\{\lambda < \lambda_0\}$。如果将λ作一变换，令

$$\lambda' = -2\ln\lambda = -2[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}m_i\ln\hat{\sigma}_i^2 - \frac{n}{2}\ln\hat{\sigma}^2]$$

$$= n\ln\hat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{r}m_i\ln\hat{\sigma}_i^2$$

则拒绝域为$\{\lambda' > \lambda'_0\}$。统计学家证明了

$$\chi^2 = \frac{1}{c}[f_e\ln\frac{S_e}{f_e} - \sum_{i=1}^{r}(m_i - 1)\ln s_i^2] \stackrel{\cdot}{\sim} \chi^2(r-1) \qquad (7.3.6)$$

其中$c = \frac{1}{3(r-1)}[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{m_i - 1} - \frac{1}{f_e}] + 1$。从而对给定的显著性水平$\alpha$，拒绝域为

$$W = \{\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)\} \qquad (7.3.7)$$

这一检验在样本容量相等场合也可用。

例 7.3.2 在显著性水平$i = 0.05$时检验例 7.1.1 中四个总体的方差是否一致。

解：这里$m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 3, m_4 = 2$，各$m_i$不全相等，故用统计量(7.3.6)作检验。

由于$r = 4$，在$i = 0.05$时查χ^2分布表得$\chi^2_{0.95}(3) = 7.815$，从而拒绝域为

$$W = \{\chi^2 \geqslant 7.815\}$$

现由样本求得各自的无偏方差分别为：

$$s_1^2 = 18, \quad s_2^2 = 1, \quad s_3^2 = 4, \quad s_4^2 = 18$$

又由例 7.1.1 知$S_e = 46, f_e = 6$，则可求得

$$c = [\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{6}]\frac{1}{(3\times 3)} + 1 = 1.3148$$

$$\chi^2 = \frac{1}{1.3148}[6\times\ln\frac{46}{6} - \ln 18 - 2\ln 1 - 2\ln 4 - \ln 18] = 2.79$$

由于$\chi^2 = 2.79 < 7.815$，这表明样本落在接受域内，因此在$i = 0.05$水平上可以认为四个总体的方差相同。

§7.4 一元线性回归

在一些实际问题中，经常需要我们从定量的角度去研究某些变量间的关系。一般讲，变量间的关系有两类：

一类变量间具有完全确定的关系，它们可以用函数形式去表达。例如圆的面积 S 与半径 R 有关，一旦半径 R 确定，则面积 S 可通过函数 $f(R) = \pi R^2$ 求出，即 $S = \pi R^2$。

另一类变量间有关系，但不能用函数形式表达。例如人的体重 y 与身高 x 有关，一般而言，较高的人体重较重，但同样身高的人体重却不会都相同；又如居民的储蓄存款额 y 与他的收入 x 有关，但同样收入的人储蓄存款额也不会相同。这样的变量间的关系在统计上称为**相关关系**。

回归分析便是研究变量间相关关系的一种统计方法。

7.4.1 一元线性回归模型

为了讨论简便起见，假定有两个变量：x 是自变量，其值是可以控制或精确测量的，认为它是非随机变量；y 是因变量，对给定的 x 值，y 的取值事先不能确定，故 y 是随机变量。为了研究 y 与 x 间的关系，首先就要收集数据，下面通过一个例子来说明。

例7.4.1 我们知道营业税税收总额 y 与社会商品零售总额 x 有关。为能从社会商品零售总额去预测税收总额，需要了解两者的关系。现收集了如下九组数据(表 7.4.1)：

表 7.4.1 社会商品零售总额与税收总额 单位：亿元

序号	社会商品零售总额 x	营业税税收总额 y
1	142.08	3.93
2	177.30	5.96
3	204.68	7.85
4	242.88	9.82
5	316.24	12.50
6	341.99	15.55
7	332.69	15.79
8	389.29	16.39
9	453.40	18.45

通常将上述数据记为(x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，本例$n=9$。为了直观起见，可将这n对数据作为平面直角坐标系中n个点，将它们点在$x-y$平面上得到一张"散点图"。本例的散点图见图7.4.1。

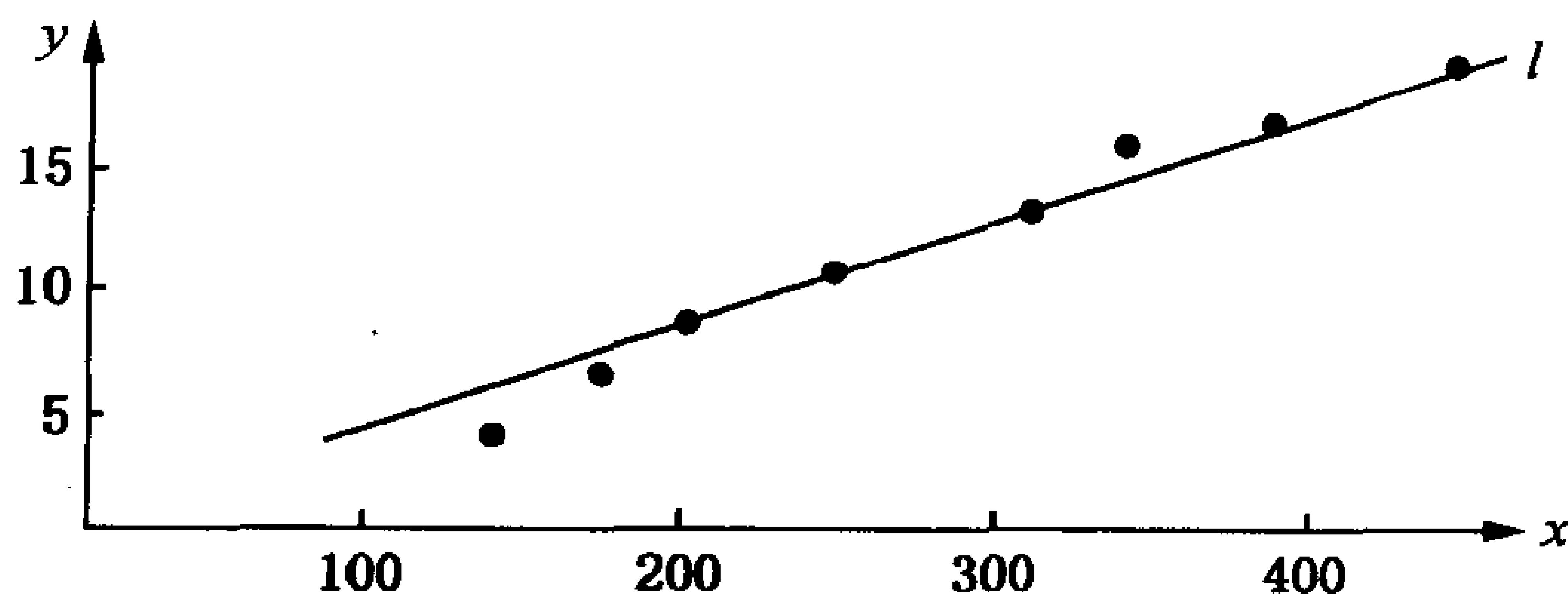


图7.4.1　例7.4.1的散点图

观察n个点在图中的散布情况，发现本例的9个点散布在某直线l附近。从而我们可以认为观测值y由两部分迭加而成：一是随x的变化而呈线性变化的趋势，用$\beta_0+\beta_1x$表示；二是其它随机因素影响的总和，用ε表示，故有y_i的数据结构式：

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中β_0,β_1为未知参数，称它们为回归系数，有时还专称β_0为回归常数，各ε_i是不可观测其值的随机误差，通常假定$\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)$，且$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$相互独立。综上所述，可得如下一元线性回归模型

$$\begin{cases}y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n\\ \text{各 }\varepsilon_i\text{ 相互独立，且都服从 }N(0,\sigma^2)\end{cases}\tag{7.4.1}$$

由(7.4.1)可知，$y_i\sim N(\beta_0+\beta_1x_i,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，且$y_1,y_2,\cdots,y_n$相互独立。这里$y_i$既表示随机变量，又表示其观察值，本节都是这样。

略去下标i，则

$$E(y)=\beta_0+\beta_1x\tag{7.4.2}$$

这便是y关于x的一元**线性回归函数**，其在$x-y$平面上的图象便是一条直线(如图7.4.1中记为l的直线)，β_1是直线的斜率，表示x增加一个单位时$E(y)$的增加量，β_0是直线l在y轴上的截距。由于(7.4.2)中β_0,β_1未知，故需要我们从收集到的数据出发进行估计。若记$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$为其估计，则称

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x\tag{7.4.3}$$

为y关于x的一元**线性回归方程**。有了$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$可将图7.4.1中的直线$l$画出来，它实际上是作为(7.4.2)图象的一种估计。

7.4.2 回归系数的最小二乘估计

估计回归系数 β_0,β_1 的一个直观想法便是要求观测值 y_i 与其均值 $\beta_0+\beta_1x_i$ 的偏离越小越好，为避免正负偏差抵销，可要求如下的偏差平方和 Q 达到最小：

$$Q(\beta_0,\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2 \qquad (7.4.4)$$

即要求估计 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$ 满足

$$Q(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\min_{\beta_0,\beta_1}Q(\beta_0,\beta_1)$$

由于 $Q(\beta_0,\beta_1)$ 是一个非负二次型，对 β_0,β_1 的偏导存在，因而可通过令 Q 对 β_0,β_1 的偏导为零来求。现有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial\beta_0}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\beta_1}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)x_i=0\end{cases} \qquad (7.4.5)$$

经整理有

$$\begin{cases}n\beta_0+n\overline{x}\cdot\beta_1=n\overline{y}\\ n\overline{x}\beta_0+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\beta_1=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\end{cases} \qquad (7.4.6)$$

称(7.4.5)为**正规方程组**。由(7.4.6)的第一式可得

$$\hat{\beta}_0=\overline{y}-\hat{\beta}_1\overline{x}$$

将其代入(7.4.6)的第二式，有

$$(\sum_i x_i^2-n\overline{x}^2)\hat{\beta}_1=\sum_i x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}$$

(以后“$\sum\limits_{i=1}^{n}$”常简记为“$\sum\limits_{i}$”) 记

$$\begin{aligned}l_{xx}&=\sum_i x_i^2-n\overline{x}^2=\sum_i(x_i-\overline{x})^2=\sum_i x_i^2-\frac{1}{n}(\sum_i x_i)^2\\ l_{xy}&=\sum_i x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}=\sum_i(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\\ &=\sum_i x_iy_i-\frac{1}{n}(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)\end{aligned} \qquad (7.4.7)$$

只要 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等，则 $l_{xx}\neq0$，便可解得

$$\begin{cases}\hat{\beta}_1=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}\\ \hat{\beta}=\overline{y}-\hat{\beta}_1\overline{x}\end{cases} \qquad (7.4.8)$$

可验证(7.4.8)使(7.4.4)达到最小，故称(7.4.8)为 β_1,β_0 的最小二乘估计，也常简记为 LSE。

从(7.4.8)可知，求 β_0,β_1 的最小二乘估计可按如下步骤进行：

(1) 求出 $\sum_i x_i$，$\sum_i y_i$ 及 $\bar{x},\bar{y}$；

(2) 求出 $\sum_i x_i^2$，$\sum_i x_i y_i$，按(7.4.7)求出 l_{xx} 与 l_{xy}；

(3) 按(7.4.8)求出 $\hat{\beta}_1$ 与 $\hat{\beta}_0$，并写出回归方程

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

例 7.4.1 的计算常列成如表 7.4.2 那样的计算表格，其中 $l_{yy} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_i y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_i y_i)^2$ 是为了后面的需要而求的。

表 7.4.2　例 7.4.1 的计算表

$\sum_i x_i = 2600.55$	$n = 9$	$\sum_i y_i = 106.24$
$\bar{x} = 288.95$		$\bar{y} = 11.8044$
$\sum_i x_i^2 = 837272.4111$	$\sum_i x_i y_i = 34876.7147$	$\sum_i y_i^2 = 1465.4326$
$\frac{1}{n}(\sum_i x_i)^2 = 751428.9225$	$\frac{1}{n}(\sum_i x_i)(\sum_i y_i) = 30698.0480$	$\frac{1}{n}(\sum_i y_i)^2 = 1254.1042$
$l_{xx} = 85843.4886$	$l_{xy} = 4178.6667$	$l_{yy} = 211.3284$
	$\hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 0.0487$	
	$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} = -2.2675$	
	$\therefore \hat{y} = -2.2675 + 0.0487x$	(7.4.9)

从回归方程(7.4.9)可知，当社会零售总额增加 1 亿元时，营业税税收总额增加0.0487亿元，这便是 $\hat{\beta}_1$ 的含义。对本例来讲 $\hat{\beta}_0 < 0$ 不能作出实际解释。因为 $x = 0$ 时该方程是无意义的。故要注意(7.4.9)仅在 x 的某一范围内成立，通常在$[x_{(1)},x_{(n)}]$和附近区域内方程有意义的，而超出这范围要具体分析，其中 $x_{(1)},x_{(n)}$ 分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最小值与最大值。

求出 β_0,β_1 的最小二乘估计后，应写出回归方程，它常有两种表示方式：

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x - \bar{x})$$

这表明回归直线必过两点$(0,\hat{\beta}_0)$与$(\bar{x},\bar{y})$。

7.4.3 最小二乘估计的性质

设由数据$(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$求得模型(7.4.1)中β_0、β_1的最小二乘估计$\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$，由此建立了回归方程$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$，称$\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_i$为在$x=x_i$处的**拟合值**(或**回归值**)，称$e_i=y_i-\hat{y}_i$为**残差**，$i=1,2,\cdots,n$，$S_E=\sum\limits_i(y_i-\hat{y}_i)^2$称为**残差平方和**。我们有以下一些性质：

定理 7.4.1 在模型(7.4.1)下，有

$$(1)\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1,\frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right) \tag{7.4.10}$$

$$(2)\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0,\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2\right) \tag{7.4.11}$$

$$(3)\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=-\frac{\overline{x}}{l_{xx}}\sigma^2 \tag{7.4.12}$$

证：利用$\sum\limits_i(x_i-\overline{x})=0$，可把$\hat{\beta}_1$改写成诸$y_i$的线性函数形式，即

$$\hat{\beta}_1=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\sum_i\frac{x_i-\overline{x}}{l_{xx}}y_i$$

可见，$\hat{\beta}_1$是独立正态变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$的线性组合，因此$\hat{\beta}_1$仍服从正态分布，由于正态分布仅由其均值与方差决定，故由

$$E\hat{\beta}_1=\sum_i\frac{x_i-\overline{x}}{l_{xx}}Ey_i=\sum_i\frac{x_i-\overline{x}}{l_{xx}}(\beta_0+\beta_1 x_i)$$

$$=\beta_1\cdot\sum_i\frac{x_i-\overline{x}}{l_{xx}}x_i=\beta_1$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)=\sum_i\left(\frac{x_i-\overline{x}}{l_{xx}}\right)^2\mathrm{Var}(y_i)=\frac{\sigma^2}{l_{xx}}$$

因而有(7.4.10)。同样也可改写$\hat{\beta}_0$，

$$\hat{\beta}_0=\overline{y}-\hat{\beta}_1\overline{x}=\sum_i\left(\frac{1}{n}-\frac{x_i-\overline{x}}{l_{xx}}\cdot\overline{x}\right)y_i$$

可见，$\hat{\beta}_0$也是正态变量的线性组合，故由

$$E\hat{\beta}_0=E\overline{y}-E\hat{\beta}_1\cdot\overline{x}=\beta_0+\beta_1\overline{x}-\beta_1\overline{x}=\beta_0$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_0)=\sum_i\left(\frac{1}{n}-\frac{x_i-\overline{x}}{l_{xx}}\overline{x}\right)^2\mathrm{Var}(y_i)$$

$$=\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2$$

因而有(7.4.11)。利用协方差的运算性质有

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) &= \text{Cov}\left(\sum_i\left(\frac{1}{n}-\frac{x_i-\bar{x}}{l_{xx}}\bar{x}\right)y_i,\sum_i\frac{x_i-\bar{x}}{l_{xx}}y_i\right)\\ &= \sum_i\left(\frac{1}{n}-\frac{x_i-\bar{x}}{l_{xx}}\cdot\bar{x}\right)\times\frac{x_i-\bar{x}}{l_{xx}}\cdot\text{Var}(y_i)\\ &= -\frac{\bar{x}}{l_{xx}}\sigma^2\end{aligned}$$

故(7.4.12)得证。

由以上三点可知 $\hat{\beta}_1$、$\hat{\beta}_0$ 分别是 β_1、β_0 的无偏估计，但除了 $\bar{x}=0$ 外，通常估计量 $\hat{\beta}_0$ 与 $\hat{\beta}_1$ 是相关的，当 $\bar{x}>0$ 时，$\hat{\beta}_0$ 与 $\hat{\beta}_1$ 负相关，当 $\bar{x}<0$ 时，$\hat{\beta}_0$ 与 $\hat{\beta}_1$ 正相关。

定理 7.4.2 在模型(7.4.1)下，有

(1)$S_E/\sigma^2\sim\chi^2(n-2)$； (7.4.13)

(2)$S_E,\hat{\beta}_1,\bar{y}$ 相互独立。 (7.4.14)

证明：首先考察残差平方和 S_E，考虑到(7.4.1)和(7.4.8)，我们有：

$$\begin{aligned}S_E &= \sum_i(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_i(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i)^2=\sum_i[y_i-\bar{y}-\hat{\beta}_1(x_i-\bar{x})]^2\\ &= \sum_i(y_i-\bar{y})^2-2\hat{\beta}_1\sum_i(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})+\hat{\beta}_1^2\sum_i(x_i-\bar{x})^2\\ &= \sum_i y_i^2-n\bar{y}^2-2\frac{l_{xy}^2}{l_{xx}}+\frac{l_{xy}^2}{l_{xx}}\\ &= \sum_i y_i^2-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i y_i\right)^2-\left(\sum_i\frac{x_i-\bar{x}}{\sqrt{l_{xx}}}y_i\right)^2\end{aligned}$$

对 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 作线性变换，令

$$\begin{cases}Z_i=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n \qquad i=1,2,\cdots,n-2\\ Z_{n-1}=\dfrac{x_1-\bar{x}}{\sqrt{l_{xx}}}y_1+\dfrac{x_2-\bar{x}}{\sqrt{l_{xx}}}y_2+\cdots+\dfrac{x_n-\bar{x}}{\sqrt{l_{xx}}}y_n\\ Z_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}y_2+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}y_n\end{cases}\tag{7.4.15}$$

其中各 $a_{ij},i=1,2,\cdots,n-2,j=1,2,\cdots,n$ 满足如下条件：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^n a_{ij}=0,\sum_{j=1}^n a_{ij}^2=1,\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=0 \qquad i=1,2,\cdots,n-2\\ \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{kj}=0 \qquad i\neq k,\quad i,k=1,2,\cdots,n-2\end{cases}$$

(7.4.16)

则

$$\sum_i y_i^2 = \sum_i Z_i^2, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i y_i\right)^2 = Z_n^2, \quad \left[\sum_i \frac{x_i - \overline{x}}{\sqrt{l_{xx}}} y_i\right]^2 = Z_{n-1}^2$$

从而

$$S_E = \sum_i Z_i^2 - Z_n^2 - Z_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$$

由于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 相互独立,都服从正态分布,所以各 Z_i 也都服从正态分布,计算各 Z_i 的期望、方差及协方差,利用(7.4.16)有:

$$E(Z_i) = 0, \quad \mathrm{Var}(Z_i) = \sigma^2, \quad i = 1,2,\cdots,n-2$$

$$E(Z_{n-1}) = \beta_1\sqrt{l_{xx}}, \quad \mathrm{Var}(Z_{n-1}) = \sigma^2$$

$$E(Z_n) = \sqrt{n}(\beta_0 + \beta_1\overline{x}), \quad \mathrm{Var}(Z_n) = \sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = 0 \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,\cdots,n$$

这表明 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 相应独立,且 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{n-2}$ 都服从 $N(0,\sigma^2)$,从而$\frac{Z_1}{\sigma}$,$\frac{Z_2}{\sigma},\cdots,\frac{Z_{n-2}}{\sigma}$ 独立同分布,故有

$$S_E/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{Z_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-2)$$

又 $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i y_i = \sqrt{n}\,\overline{y}, \quad Z_{n-1} = \sum_i \frac{x_i - \overline{x}}{\sqrt{l_{xx}}} y_i = \hat{\beta}_1\sqrt{l_{xx}}$,这表明 $\overline{y}$ 是 Z_n 的函数,$\hat{\beta}_1$ 是 Z_{n-1} 的函数,S_E 是 $Z_1,\cdots,Z_{n-2}$ 的函数,由 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 的独立性知 $S_E, \hat{\beta}_1, \overline{y}$ 三者相互独立。

由这一定理的(7.4.13),可知 $E(S_E/\sigma^2) = n-2$,从而

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n-2} \tag{7.4.17}$$

是 σ^2 的无偏估计。

7.4.4 回归方程的显著性检验

从最小二乘估计表达式(7.4.8)知,只要给出了 n 组数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n$,总可将它们代入(7.4.8)获得 β_0 与 β_1 的估计,从而写出回归方程。但这个回归方程是否有意义呢?当然可以从散点图去观察,当 n 个点散布在某直线附近时认为方程是有意义的。然而什么叫在某直线“附近”呢?用眼睛看会因人而异,为此需要有个检验准则。

为作检验,首先要建立假设。我们求回归方程的目的是要去反映 y 随 x 变

化的一种统计规律，那么如果 $\beta_1=0$，从(7.4.2)可知，不管 x 如何变化，Ey 不会随之而改变，在这种情况下求出的回归方程(7.4.3)是无意义的。所以检验回归方程是否有意义的问题转化为检验下列假设是否为真：

$$H_0: \beta_1 = 0 \tag{7.4.18}$$

下面介绍三种常用的检验方法，使用时可选择其中之一。

7.4.4.1 **F 检验**

这一方法类似于 §7.1 介绍的方差分析的想法，也是从观察值的偏差平方和分解入手。

(1) 平方和分解

我们观测到的 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的差异可以用总偏差平方和表示：

$$S_T = \sum_i (y_i - \overline{y})^2, \quad f_T = n-1 \tag{7.4.19}$$

其中 $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i$。造成这一差异的原因有如下两个方面：

一是由于假设 $\beta_1=0$ 不真，从而对不同的 x 值，Ey 随 x 而变化。我们可以用下列偏差平方和来表示由此引起的差异：

$$S_R = \sum_i (\hat{y}_i - \overline{y})^2 \tag{7.4.20}$$

其中 $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \overline{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \overline{x}), i = 1,2,\cdots,n$。由于

$$S_R = \sum_i (\hat{y}_i - \overline{y})^2 = \sum_\alpha [\hat{\beta}_1(x_i - \overline{x})]^2 = \hat{\beta}_1^2 l_{xx} \tag{7.4.21}$$

从(7.4.10)可知，其期望值

$$\begin{aligned} ES_R &= E\hat{\beta}_1^2 \cdot l_{xx} = [(E\hat{\beta}_1)^2 + \mathrm{Var}(\hat{\beta})]l_{xx} \\ &= \beta_1^2 l_{xx} + \sigma^2 \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

这便表明 S_R 中除了误差波动外，反映了由 $\beta_1 \neq 0$ 所引起的数据间的差异，称(7.4.20)为**回归平方和**，其自由度 $f_R = 1$。

二是由其它一切随机因素引起的差异，它可用残差平方和

$$S_E = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{7.4.23}$$

表示。由定理 7.4.2 知 $S_E/\sigma^2 \sim x^2(n-2)$，于是

$$E(S_E) = (n-2)\sigma^2 \tag{7.4.24}$$

残差平方和也称**剩余平方和**，其自由度 $f_E = n-2$。

利用(7.4.5)有 $\sum_i (y_i - \hat{y}_i) = 0$，$\sum_i (y_i - \hat{y}_i)x_i = 0$，从而有下列平方和分解式：

$$S_T = \sum_i (y_i - \overline{y})^2 = \sum_i (y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i - \overline{y})^2$$
$$= \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_i (\hat{y}_i - \overline{y})^2$$
$$= S_E + S_R \tag{7.4.25}$$

（2）检验统计量与拒绝域

从（7.4.22）与（7.4.24）可知，在 $\beta_1 = 0$ 为真时，S_R 与 $S_E/(n-2)$ 都是 σ^2 的无偏估计，而在 $\beta_1 \neq 0$ 时，

$$E(S_R) = \beta_1^2 l_{xx} + \sigma^2 \geqslant \sigma^2 = E\left(\frac{S_E}{n-2}\right)$$

因而采用检验统计量

$$F = \frac{S_R}{S_E/(n-2)} \tag{7.4.26}$$

检验假设（7.4.18）时，取如下拒绝域是合适的：

$$\{F \geqslant c\}$$

对给定的显著性水平 α，在 $\beta_1 = 0$ 的假定下，c 应满足

$$P(F \geqslant c) = \alpha \tag{7.4.27}$$

（3）临界值的确定

由定理 7.4.1 知 $\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right)$，在 $\beta_1 = 0$ 时有

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma/\sqrt{l_{xx}}} \sim N(0,1)$$

即

$$\frac{\hat{\beta}_1^2 l_{xx}}{\sigma^2} = \frac{S_R}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

又由定理 7.4.2 知 $S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$，且由 S_E 与 $\hat{\beta}_1$ 的独立性可知 S_E 与 S_R 相互独立，从 F 分布的构造可知，在 $\beta_1 = 0$ 时有

$$\frac{\frac{S_R}{\sigma^2}}{\frac{S_E}{\sigma^2}/(n-2)} = \frac{S_R}{S_E/(n-2)} = F \sim F(1, n-2)$$

从而（7.4.27）中的 $c = F_{1-\alpha}(1, n-2)$。由此可得检验假设（7.4.18）的 α 水平的拒绝域为

$$\{F \geqslant F_{1-\alpha}(1, n-2)\} \tag{7.4.28}$$

以上求检验统计量 F 的值的过程也常常列成一张方差分析表（表 7.4.3）。

表 7.4.3　方差分析表

来　源	平方和	自由度	均方和	F　比
回　归	S_R	$f_R=1$	$V_R=S_R/f_R$	$F=\frac{V_R}{V_E}$
残　差	S_E	$f_E=n-2$	$V_E=S_E/f_E$	
总　计	S_T	$f_T=n-1$		

其中 f_R,f_E,f_T 分别称为 S_R,S_E,S_T 的自由度。其中各偏差平方和的计算可如下进行：

$$S_T=l_{yy}=\sum_i(y_i-\overline{y})^2=\sum_i y_i^2-\frac{1}{n}(\sum_i y_i)^2$$

$$S_R=\hat{\beta}_1^2 l_{xx}=\hat{\beta}_1 l_{xy}=\frac{l_{xy}^2}{l_{xx}}$$

$$S_E=S_T-S_R$$

下面我们对例 7.4.1 作回归方程的显著性检验。

由表 7.4.2 知

$$S_T=l_{yy}=211.3284$$

$$S_R=\hat{\beta}_1 l_{xy}=0.0487\times4178.6667=203.5011$$

$$S_E=211.3284-203.5011=7.8273$$

其方差分析表见表 7.4.4。

表 7.4.4　例 7.4.1 的方差分析表

来　源	平方和	自由度	均方和	F　比
回　归	203.5011	1	203.5011	181.99
残　差	7.8273	7	1.1182	
总　计	211.3284	8		

在 $\alpha=0.05$ 时，$F_{0.95}(1,7)=5.59$。故拒绝域为 $\{F\geqslant5.59\}$，现样本落入拒绝域，故拒绝 $\beta_1=0$ 的假设，即认为回归方程有显著意义。

7.4.4.2　**t 检验**

由定理 7.4.1 知 $\hat{\beta}_1\sim N\left(\beta_1,\frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right)$，假设(7.4.18) 相当于检验正态分布的均值是否为 0。在 $\beta_1=0$ 时，$\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma/\sqrt{l_{xx}}}\sim N(0,1)$，但其中 σ 未知，常用估计 $\hat{\sigma}^2=S_E/(n-2)$ 去代替，则根据定理 7.4.2 知 $S_E/\sigma^2\sim\chi^2(n-2)$，又与 $\hat{\beta}$ 独立，从而在 $\beta_1=0$ 时

$$t=\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}/\sqrt{l_{xx}}}=\frac{\dfrac{\hat{\beta}_1}{\sigma/\sqrt{l_{xx}}}}{\sqrt{\dfrac{S_E}{\sigma^2}/(n-2)}}\sim t(n-2) \tag{7.4.29}$$

因此我们也可采用(7.4.29)的 t 统计量作检验，对给定的显著性水平 α，拒绝域为

$$|t| \geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \tag{7.4.30}$$

实质上 t 检验与 F 检验是等价的，这里 $t^2 = F$。

对例 7.4.1 来讲，若采用 t 检验，则在 $i = 0.05$ 水平上，$t_{0.975}(7) = 2.365$，则拒绝域为 $\{|t| \geqslant 2.365\}$。现由表 7.4.2 知：$\hat{\beta}_1 = 0.0487$，$l_{xx} = 85843.4886$，由表 7.4.4 知 $\hat{\sigma} = \sqrt{1.1182} = 1.0574$，则

$$t = \frac{0.0487}{1.0574/\sqrt{85843.4886}} = 13.49$$

由于 $|t| > 2.365$，故样本落入拒绝域，因此拒绝 $\beta_1 = 0$ 的假设，认为回归方程是显著的。

7.4.4.3 **相关系数检验**

二维样本 (x_i, y_i)，$i = 1,2,\cdots,n$ 的相关系数定义为

$$r = \frac{\sum\limits_{\alpha}(x_0 - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i}(x_i - \bar{x})^2\sum\limits_{i}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}$$

这是一个统计量，我们也可以用 r 来检验假设 $H_0: \beta_1 = 0$。

由于 r 与 $\hat{\beta}_1$ 间有如下关系：

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \cdot \sqrt{\frac{l_{xx}}{l_{yy}}} = \hat{\beta}_1 \cdot \sqrt{\frac{l_{xx}}{l_{yy}}}$$

从直观上可知，当 H_0 为真时，$|\hat{\beta}_1|$ 应较小，从而 $|r|$ 应较小，当 $|r|$ 较大时，就应拒绝 H_0，因而可取如下形式的拒绝域：

$$\{|r| \geqslant c\}$$

在给定的显著性水平 α 下，c 应满足 $P(|r| \geqslant c) = \alpha$。

由于统计量 r 与(7.4.26)中给出的统计量 F 有如下关系：

$$r^2 = \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}l_{yy}} = \frac{S_R}{S_T} = \frac{1}{\dfrac{S_R + S_E}{S_R}} = \frac{1}{1 + \dfrac{S_E/(n-2)}{S_R} \cdot (n-2)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{n-2}{F}}$$

可见，r^2 是 F 的严增函数，因而临界值 c 可以 $F(1, n-2)$ 的分位数获得，它与 $n-2$ 有关。为方便起见，已将 r 分布的分位数制成了表（附表 14），记 $c = r_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$。

因而检验（7.4.18）的水平为 α 的拒绝域是

$$\{|r| \geqslant r_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\} \tag{7.4.32}$$

对例 7.4.1 来讲，用 r 作检验时，在 $\alpha = 0.05$ 水平上，$r_{0.975}(7) = 0.6664$，故拒绝域是 $\{|r| \geqslant 0.6664\}$，这表明：9 对数据间的相关系数若不低于 0.6664，那就在 $\alpha = 0.05$ 水平上，认为它们之间存在线性关系。现由表 7.4.2 可求得

$$r = \frac{4178.6667}{\sqrt{85843.4866 \times 211.3284}} = 0.98$$

由于 $0.98 > 0.6664$，故样本落入拒绝域，拒绝 $\beta_1 = 0$ 的假设，认为回归方程是显著的。

从上述叙述可以看出，检验 $H_0: \beta_1 = 0$ 的三种方法，彼此是等价的，使用时看哪一种方法计算量少，就用哪一个。

7.4.5 利用回归方程作预测

当求得了回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$，并经检验，方程是显著的，则可将该回归方程用于预测。

所谓预测是指当 $x = x_0$ 时对相应的 y 的取值 y_0 所作的推断。由模型知，$y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0$ 是一个随机变量，要预测随机变量的取值是不可能的，只能预测其期望值 $E(y_0)$。譬如在例 7.4.1 中，当社会商品零售总额 $x = 300$ 亿元时营业税的税收总额是多少难以预测，但平均税收总额是可以预测的。这种统计推断有两类：一是给出 $E(y_0)$ 的估计值，也称为**预测值**；另一个是给出 y_0 的一个预测区间。

由（7.4.10）～（7.4.12）可知，在 $x = x_0$ 处的回归值是 $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$，且

$$\hat{y}_0 \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2\right) \tag{7.4.33}$$

因而 $\hat{y}_0$ 是相应的期望值 $E(y_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0$ 的一个无偏估计，它就是预测值。

然而在 $x = x_0$ 时，随机变量 y_0 的取值与预测值 $\hat{y}_0$ 总会有一定的偏离，可

要求这种绝对偏差 $|y_0 - \hat{y}_0|$ 不超过某个 δ 的概率为 $1-\alpha$，其中 α 是事先给定的 $(0 < \alpha < 1)$，即

$$P(|y_0 - \hat{y}_0| \leqslant \delta) = 1 - \alpha$$

或

$$P(\hat{y}_0 - \delta \leqslant y_0 \leqslant \hat{y}_0 + \delta) = 1 - \alpha$$

则称 $[\hat{y}_0 - \delta, \hat{y}_0 + \delta]$ 为 y_0 的概率为 $1-\alpha$ 的**预测区间**。在给定 α 后，如何来求 δ 呢？首先注意到 y_0 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是相互独立、同方差的正态变量，并且还有

(1) 由(7.4.33)知 $y_0 - \hat{y}_0 \sim N\left(0, \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 + \bar{x})^2}{l_{xx}}\right]\sigma^2\right)$；

(2) $S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$；

(3) 由于 $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{x})$，由前所证可知，$S_E$ 与 $\hat{y}_0$ 独立，从而 S_E 与 $y_0 - \hat{y}_0$ 亦独立。

由此可构造一个 t 变量：

$$\frac{\dfrac{y_0 - \hat{y}_0}{\sigma\sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}}}{\sqrt{\dfrac{S_E}{\sigma^2}/(n-2)}} = \frac{y_0 - \hat{y}_0}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}} \sim t(n-2)$$

其中 $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n-2}$，由(7.4.17)知，它是 σ^2 的无偏估计，记 $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$，从而由

$$P(|y_0 - \hat{y}_0| \leqslant \delta) = P\left[\left|\frac{y_0 - \hat{y}_0}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}}\right| \leqslant \frac{\delta}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}}\right] = 1 - \alpha$$

查 t 分布表可得

$$\frac{\delta}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

故
$$\delta = \delta(x_0) = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}} \qquad (7.4.34)$$

由(7.4.34)知，y_0 的概率为 $1-\alpha$ 的预测区间的长度 2δ 与样本量 n、x 的偏差平方和 l_{xx}、x_0 到 $\bar{x}$ 的距离 $|x_0 - \bar{x}|$ 有关。当 n 较大，l_{xx} 较大(这表示各 x_1，

$x_2,\cdots,x_n$较为分散)，$|x_0-\bar{x}|$较小时，δ也较小，此时预测的精度较高，当x_0越远离$\bar{x}$，预测精度就越差，当x_0在$[x_{(1)},x_{(n)}]$区间外时，预测精度可能变得很差，在这种情况做外推，需要特别小心。另外，若各$x_1,x_2,\cdots,x_n$较为集中时，那么l_{xx}就较小，从而也会导致预测精度的降低，从这里可见，若要用回归方程作预测，在收集数据时要使各$x_1,x_2,\cdots,x_n$尽量分散，这对提高预测精度有利。在不同的x值上预测区间的示意图见图7.4.2。从图7.4.2可见，在$x=\bar{x}$处预测区间长度最短，远离$\bar{x}$的预测区间愈来愈长，其预测区域两头呈喇叭状。

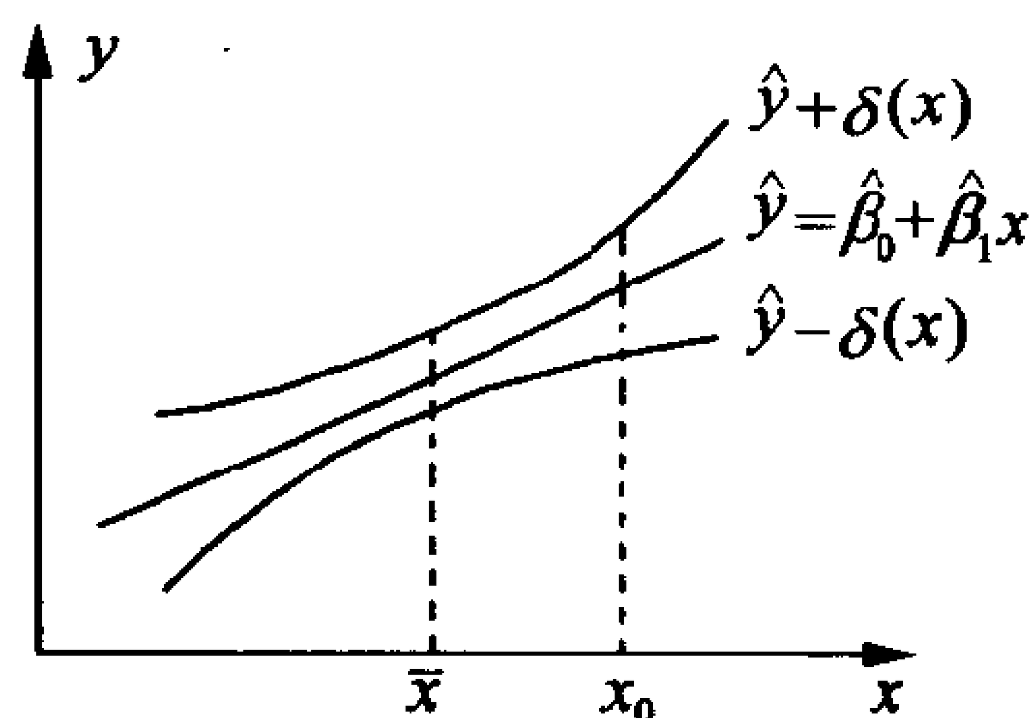


图 7.4.2　预测区间

当n较大时，$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$可用标准正态分布分位数$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$近似，若$|x_0-\bar{x}|$也较小，则此时在不同的$x_0$上有

$$\delta \approx u_{1-\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma} \tag{7.4.35}$$

此时y_0的概率为$1-\alpha$的预测区间的示意图见图7.4.3，其预测区域呈带状。

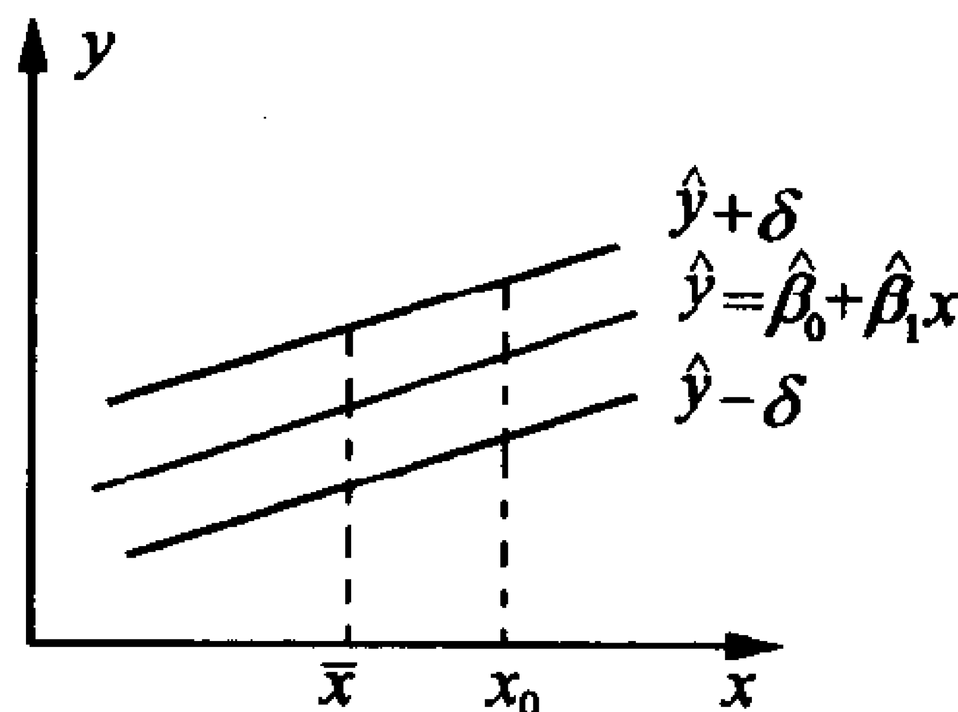


图 7.4.3　近似预测区间

现对例7.4.1预测社会商品零售总额$x=300$亿元时的营业税的平均税收总额。由(7.4.9)可知预测值为

$$\hat{y}_0=-2.2675+0.0487\times300=12.3425(\text{亿元})$$

在$i=0.05$时，由t分布表查得$t_{0.975}(7)=2.365$，由表7.4.2知$n=9$，$l_{xx}=85843.4886$，$\bar{x}=288.95$，由表7.4.4知$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{S_E}{f_E}}=\sqrt{1.1182}=1.0574$，将它

们代入(7.4.34)有

$$\delta = 2.365 \times 1.0574 \times \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(300 - 288.95)^2}{85843.4886}}$$
$$= 2.6377$$

则在 $x = 300$ 时平均税收总额的概率为 0.95 的预测区间是

$$[12.3425 - 2.6377, 12.3425 + 2.6377] = [9.7048, 14.9802]$$

如按(7.4.35)亦可求出近似的预测区间，在 $i = 0.05$ 时，$u_{0.975} = 1.96$，则 $\delta \approx 1.96 \times 1.0574 = 2.0725$，从而概率为 0.95 的近似预测区间为

$$[10.270,\ 14.415]$$

在本例中由于 $n = 9$ 较小，故用近似的方法求得的概率为 0.95 的预测区间与精确的预测区间相差较大。

7.4.6 重复观察(试验)的情况

前面在检验回归方程的显著性时，仅仅告诉我们 x 的一次项对 y 的影响是重要的，但它并没有告诉我们 x^2，x^{-1} 或 e^{-x} 等是否对 y 的影响就不重要了。从这个意义上讲，回归方程是显著的还不等于讲用 y 关于 x 的一元线性回归方程拟合这 n 组数据已是最好的了。因而希望进一步检验假设

$$H_0: Ey = \beta_0 + \beta_1 x \tag{7.4.36}$$

当 H_0 为真时，可认为一元线性回归方程是拟合得好的，否则需要进一步去分析原因，或许要进一步去寻找 y 与 x 之间更合适的回归方程的形式，譬如 $E(y) = a + bx + cx^2$ 等。

为检验假设(7.4.36)需要在同一 x 下对 y 作重复试验或重复观测，记所得数据为

$$(x_i, y_{ij}) \qquad i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,m_i$$

其中至少有一个 $m_i \geqslant 2$。又记 $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$。

此时在假设 H_0 为真时模型为

$$\begin{cases} y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{ij}, & i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m_i \\ \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立，且都服从 } N(0,\sigma^2) \end{cases}$$

为讨论假设 H_0 是否可接受，我们还是从平方和分解入手。各 y_{ij} 间的差异可以用总偏差平方和 S_T 表示：

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y})^2, \quad f_T = \sum_{i=1}^{n} m_i - 1 = N - 1 \tag{7.4.37}$$

其中$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}$。可以将它作如下分解：

(1) 反映 x 在变动时引起各 y_{ij} 随它作线性变化的部分，记为 S_R：

$$S_R=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(\hat{y}_i-\bar{y})^2 \tag{7.4.38}$$

其中 $\hat{y}_i$ 是根据这 N 组数据求得一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$ 后得到的拟合值：$\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_i, i=1,2,\cdots,n$

(2) 残差平方和 $S_E=S_T-S_R$ 中包含了除 y 随 x 线性变化以外一切原因引起的波动，有真正的误差，也有 x 对 y 的非线性部分的影响，如 x^2,x^3,x^{-1},e^x 等。为此我们将 S_E 再进行分解。由于在同一 x 下有重复数据，故组内偏差平方和反映了随机误差，记为 S_e：

$$S_e=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2,\quad f_e=\sum_{i=1}^{n}(m_i-1)=N-n \tag{7.4.39}$$

其中$\bar{y}_i=\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}, i=1,2,\cdots,n$，称$S_e$为误差平方和。在残差平方和中扣除了 S_e 后剩下的记为 S_{Lf}：

$$S_{Lf}=S_E-S_e,\quad f_{Lf}=f_E-f_e=n-2 \tag{7.4.40}$$

它反映了 x 对 y 可能存在的非线性的影响部分，称 S_{Lf} 为**失拟平方和**，它表示用 y 关于 x 的一元线性回归方程去拟合这些数据拟合得不够的部分。

可采用检验统计量

$$F_1=\frac{S_{Lf}/f_{Lf}}{S_e/f_e} \tag{7.4.41}$$

其中 $f_e=N-n, f_{Lf}=f_E-f_e$。仍从直观考虑，当用线性回归拟合数据不好时，S_{Lf}必定相对于S_e来讲要大，故拒绝域取$\{F_1\geqslant c\}$是合理的。在H_0为真时，对给定的显著性水平 α，c 应满足 $P(F_1\geqslant c)=\alpha$。可以证明在 H_0 为真时，$F_1\sim F(f_{Lf},f_e)$，因而可取 $c=F_{1-\alpha}(f_{Lf},f_e)$，从而检验(7.4.36) 的 α 水平的拒绝域为

$$\{F_1\geqslant F_{1-\alpha}(f_{Lf},f_e)\} \tag{7.4.42}$$

当样本落入拒绝域时，拒绝假设(7.4.36)，这表明 Ey 与 x 的关系不是线性的，应进一步去寻找更合适的回归模型。当样本落入接受域时，表明对 y 的影响除了 x 的线性函数外，没有其它非线性项或其它因子的影响，然后把S_e与 S_{Lf} 合并为 S_E，再用统计量(7.4.26) 检验回归方程的显著性，若是显著的，则认为回归方程是拟合得好的。

例 7.4.2 某办公设备公司销售一种台式计算器，并对计算器实行维修

业务。为了进行常规维修业务，需了解维修所花费的时间。现收集了 18 次服务记录，x 表示每次维修的计算器数量(单位：只)，y 表示维修人员花费的时间(单位：分)，数据如表 7.4.5 所列，试就 y 关于 x 的一元线性回归方程对数据的拟合好坏作出评价。

表 7.4.5　计算器维修数据

i	x	y	i	x	y	i	x	y
1	7	97	7	7	101	13	2	95
2	6	86	8	3	39	14	5	71
3	5	78	9	4	53	15	7	105
4	1	10	10	2	33	16	1	17
5	5	75	11	8	118	17	4	49
6	4	62	12	5	65	18	5	68

解：(1) 先用这 18 组数据建立 y 关于 x 的一元线性回归方程，计算过程见表 7.4.6。

表 7.4.6　计算表

$\sum_n x_i = 81$	$N = 18$	$\sum_i y_i = 1152$
$\bar{x} = 4.5$		$\bar{y} = 64$
$\sum_i x_i^2 = 439$	$\sum_i x_i y_i = 6.282$	$\sum_i y_i^2 = 90232$
$\frac{1}{n}(\sum_i x_i)^2 = 364.5$	$\frac{1}{n}(\sum_i x_i)(\sum_i y_i) = 5184$	$\frac{1}{n}(\sum_i y_i)^2 = 73728$
$l_{xx} = 74.5$	$l_{xy} = 1098$	$l_{yy} = 16504$
	$\hat{\beta} = \frac{1098}{74.5} = 14.74$	
	$\hat{\beta}_0 = 64 - 14.74 \times 4.5 = -2.33$	
	$\therefore \hat{y} = -2.33 + 14.74x$	(7.443)

(2) 求出回归方程(7.4.43)对应的残差平方和。由表 7.4.6 知：

$$S_T = l_{yy} = 16504, \qquad f_T = 17$$

$$S_R = \hat{\beta}_1 l_{xx} = \frac{l_{xx}{}^2}{l_{xx}} = 16182.6, \qquad f_T = 17$$

$$S_E = S_T - S_R = 321.4, \qquad f_E = 16$$

(3) 观察数据表 7.4.5，发现在同一 x 下有多次观测，为作拟合检验需计算误差平方和 S_e 和失拟平方和 S_{Lf}，为此将数据作一重新整理，并计算 S_e(见表 7.4.7)，得 $S_e = 286.4$，$S_{Lf} = S_E - S_e = 35.0$，其自由度 $f_e = N - n = 18 - 8 = 10$，$f_{Lf} = f_E - f_e = 16 - 10 = 6$。用 S_e 去检验 S_{Lf} 得 $F_1 = \frac{35.0/6}{286.4/10} = 0.20$。

(4) 在 $i = 0.05$ 水平下，$F_{0.95}(6,10) = 3.22$，检验假设(7.4.36)的拒绝域为 $\{F_1 \geqslant 3.22\}$，现 $F_1 = 0.20 < 3.22$，落入接受域，故接受假设(7.4.36)，认为 Ey 是 x 的线性函数。

(5) 把 S_e 与 S_{Lf} 合并再对方程作显著性检验，在 $i = 0.05$ 时，$F_{0.95}(1,16) = 4.49$，故检验 $\beta_1 = 0$ 的拒绝域为 $\{F \geqslant 4.49\}$。现由样本求得

$$F = \frac{16182.6}{321.4/16} = 805.6 > 4.49$$

故样本落入拒绝域，认为 $\beta_1 \neq 0$。

表 7.4.7　S_e 的计算表

x_i	y_{ij}	m_i	$\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y})^2$
1	10，17	2	24.5
2	33，25	2	32.0
3	39	1	—
4	62，53，49	3	88.7
5	78，75，65，71，68	5	109.2
6	86	1	—
7	97，101，105	3	32.0
8	118	1	—
	合　计	$N = 18$	$S_e = 286.4$

综上可知，方程(7.4.43)是拟合得好的。由于这里 x 在[1,8]内取值，故方程在这一范围内是适合的，$x = 0$ 不能用此方程，当 $x = 9$ 时，y 的预测值是 130 分；当 $x = 10$ 时，y 的预测值是 145 分；当 $x > 10$ 时，能否用此回归方程作预测，要看实际情况而定，因为此时的误差已不小了。

§ 7.5 可化为一元线性回归的曲线回归

在一些实际问题中，变量间的关系并不都是线性的，那时就应该用曲线去进行拟合。

7.5.1 模型的确定

例 7.5.1 为了解百货商店销售额 x 与流通费率(这是反映商业活动的一个质量指标，指每元商品流转额所分摊的流通费用) y 之间的关系，收集了九个商店的有关数据(见表 7.5.1)。

为了解两者的关系，先画一张散点图(见图 7.5.1)。观察这张散点图发现，这 9 个点在一条曲线附近，因而宜用曲线去拟合这批数据。

表 7.5.1 销售额与流通费率数据

i	x：销售额(万元)	y：流通费率(%)
1	1.5	7.0
2	4.5	4.8
3	7.5	3.6
4	10.5	3.1
5	13.5	2.7
6	16.5	2.5
7	19.5	2.4
8	22.5	2.3
9	25.5	2.2

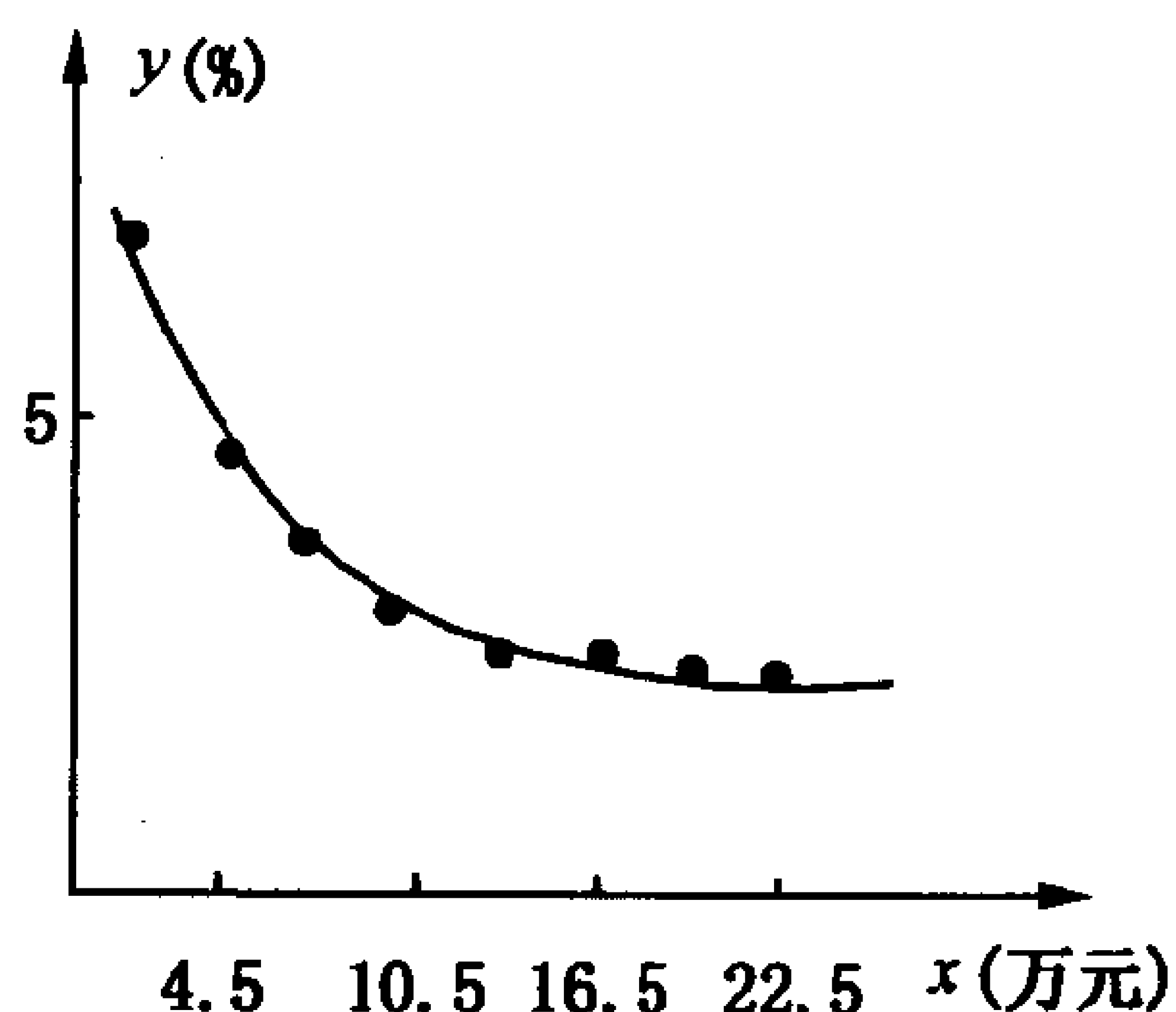


图 7.5.1 例 7.5.1 的散点图

表 7.5.2　典型的函数图形及线性化方法

函数名称	函数表达式	图　象	线性化方法
双曲线函数	$\frac{1}{y}=a+\frac{b}{x}$	$a>0,\ b<0$；$a>0,\ b>0$	$v=\frac{1}{y}$ $u=\frac{1}{x}$
幂函数	$y=ax^{b}$	$b>1$，$b=1$，$0<b<1$；$-1<b<0$，$b=-1$，$b<-1$	$v=\ln y$ $u=\ln x$
指数函数	$y=ae^{bx}$	$b>0$；$b<0$	$v=\ln y$ $u=x$
	$y=ae^{b/x}$	$b<0$；$b>0$	$v=\ln y$ $u=\frac{1}{x}$
对数函数	$y=a+b\ln x$	$b>0$；$b<0$	$v=y$ $u=\ln y$
S 型曲线	$y=\frac{1}{a+be^{-x}}$		$v=\frac{1}{y}$ $u=e^{-x}$

回归曲线的形式如何确定?当可用专业知识来确定时应尽可能利用专业知识,此外也可与典型的函数图象(见表 7.5.2) 对照选用。此时可能有多种选择方案,对本例来讲可选用

$$y = a + b\frac{1}{x} \tag{7.5.1}$$

也可选用

$$y = a \cdot x^b \tag{7.5.2}$$

等。

因此在用曲线去拟合数据时产生了两个问题:一是回归方程中的参数如何估计;二是几个曲线回归方程如何比较其优劣。

7.5.2 参数估计

诸如(7.5.1)、(7.5.2) 等回归方程中估计参数的方法之一是“线性化”方法,即通过某种变换,使方程化为一元线性回归的形式。

譬如在(7.5.1) 中,只要令 $u = \frac{1}{x}$,则(7.5.1) 就化为

$$y = a + bu$$

从而可以采用一元线性回归方程来描述 y 与 u 间的统计规律性,继而可利用最小二乘估计(7.4.8) 求出 a 和 b。

又如对(7.5.2),可两边取对数,$\ln y = \ln a + b\ln x$,那么令 $v = \ln y, u = \ln x$,则(7.5.2) 便化为

$$v = b_0 + bu$$

v 关于 u 的统计规律性可用一元线性回归描述,同样可用(7.4.8) 求出 b_0 与 b,这里 $a = e^{b_0}$。

一般讲,在一些特定场合,可令

$$v = f_1(y), \quad u = f_2(x) \tag{7.5.3}$$

使 v 与 u 的统计规律可用一元线性函数 $v = a + bu$ 去描述。从而由 $(x_i, y_i), i = 1,2,\cdots,n$,通过变换(7.5.3) 得 $(u_i, v_i), i = 1,2,\cdots,n$,这里 $u_i = f_2(x_i), v_i = f_1(y_i)$。再对 $(u_i, v_i), i = 1,2,\cdots,n$ 用公式(7.4.8) 求出 a 与 b,从而可得曲线回归方程。表 7.5.2 的各种场合都可采用这一方法。

下面我们对例 7.5.1 选用回归曲线(7.5.2) 来叙述其计算过程。

先将原始数据作变换,令 $u = \ln x, v = \ln y$,变换后的数据列于表 7.5.3,计算过程列于表 7.5.4。

表 7.5.3　变换后的数据及拟合值与残值

i	x_i	y_i	$u_i=\ln x_i$	$v_i=\ln y_i$	$\hat{y}_i$	$e_i=y_i-\hat{y}_i$
1	1.5	7.0	0.4055	1.9459	7.1665	−0.1665
2	4.5	4.8	1.5041	1.5686	4.4885	0.3115
3	7.5	3.6	2.0149	1.2809	3.6109	−0.0109
4	10.5	3.1	2.3514	1.1314	3.1288	−0.0288
5	13.5	2.7	2.6027	0.9933	2.8112	−0.1112
6	16.5	2.5	2.8034	0.9163	2.5809	−0.0809
7	19.5	2.4	2.9704	0.8755	2.4037	−0.0037
8	22.5	2.3	3.1135	0.8329	2.2616	0.0384
9	25.5	2.2	3.2387	0.7885	2.1442	0.0558

表 7.5.4　计算表

$\sum_i u_i = 21.0046$　　$N = 9$　　$\sum_i v_i = 10.3333$

$\bar{u} = 2.3338$　　$\bar{v} = 1.1481$

$\sum_i u_a^2 = 55.6551$　　$\sum_i u_i v_i = 21.2912$

$\frac{1}{n}(\sum_i u_a)^2 = 49.0215$　　$\frac{1}{n}(\sum_i u_i)(\sum_i v_i) = 24.1163$

$l_{uu} = 6.6336$　　$l_{uv} = -2.8251$

$b = \frac{l_{uv}}{l_{uu}} = -0.4259$

$b_0 = \bar{v} - b\bar{u} = 2.1421$

$$\therefore \hat{v} = 2.1421 - 0.4259u \tag{7.5.4}$$

在方程(7.5.4)中用原变量代入，有

$$\ln\hat{y} = 2.1421 - 0.4259\ln x$$

即

$$\hat{y} = 8.5173 \cdot x^{-0.4259} \tag{7.5.5}$$

当选用曲线回归方程(7.5.1)时，类似可求得曲线回归方程：

$$\hat{y} = 2.2254 + 7.6213/x \tag{7.5.6}$$

7.5.3 回归曲线的比较

在例 7.5.1 中我们已求得了两个曲线回归方程(7.5.5) 与(7.5.6)，当然我们还可选用其它形式。因此需要对它们加以比较，以选出较好的方程，常用的准则有两个：

(1) 相关指数 R。

相关指数的定义类似于一元线性回归方程中的相关系数，定义为

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \overline{y})^2} \tag{7.5.7}$$

R^2 大表示观测值 y_i 与拟合值 $\hat{y}_i$ 比较靠近，也就意味着从整体上看，n 个点的散布离曲线较近。因此选 R^2 大的方程为好，有的书上也称 R^2 为决定系数。显然 $R^2 \leqslant 1$。

(2) 剩余标准差 s。

剩余标准差的定义类似于一元线性回归方程中 σ 的估计，定义为

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \tag{7.5.8}$$

我们可以将 s 看成是平均残差平方和的算术根，自然其值小的方程为好。

下面求例 7.5.1 中方程(7.5.5) 对应的 R^2 与 s。为此必须先求出各个观测点上的拟合值 $\hat{y}_i = 8.5173 \cdot x_i^{-0.4259}$ 及对应的残差 $e_i = y_i - \hat{y}_i$，它们已一起列在表 7.5.3 中，从而得

$$\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0.1492$$

此外还可求得 $\sum_i (y_i - \overline{y})^2 = 20$，因而(7.5.5) 对应的相关指数 R 的平方及剩余标准差 s 分别为

$$R^2 = 1 - \frac{0.1492}{20} = 0.9925$$

$$s = \sqrt{\frac{0.1492}{9 - 2}} = 0.1460$$

类似可求得(7.5.6) 对应的残差平方和 $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = 1.2854$，从而

$$R^2 = 0.9357, \quad s = 0.4285$$

从两者比较可知(7.5.5) 对应的 R^2 大，s 小，故选用(7.5.5) 比(7.5.6) 为好。

其实上面两个准则所选方程总是一致的，因为 s 小必有残差平方和小，从而 R^2 必定大。不过，这两个量从两个角度给出我们定量的概念。R^2 的大小给出了总体上拟合程度的好坏，s 给出了观测点与回归曲线偏离的一个量值。所以，通常在实际问题中两者都求出，供使用者从不同角度去认识所拟合的曲线回归。

附　　表

统计数表

附表1 二项分布表

$P(X\leqslant x)=$

n	x	p								
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664
	1	0.9927	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636
	2	0.9978	0.9841	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983

$\sum_{k=0}^{x}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.2500	0.2025	0.1600	0.1225	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0225
0.7500	0.6975	0.6400	0.5775	0.5100	0.4375	0.3600	0.2775	0.1900	0.0975
0.1250	0.0911	0.0640	0.0429	0.0270	0.0156	0.0080	0.0034	0.0010	0.0001
0.5000	0.4252	0.3520	0.2817	0.2160	0.1563	0.1040	0.0607	0.0280	0.0073
0.8750	0.8336	0.7840	0.7254	0.6570	0.5781	0.4880	0.3859	0.2710	0.1426
0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
0.3125	0.2415	0.1792	0.1265	0.0837	0.0508	0.0272	0.0120	0.0037	0.0005
0.6875	0.6090	0.5248	0.4370	0.3483	0.2617	0.1808	0.1095	0.0523	0.0140
0.9375	0.9085	0.8704	0.8215	0.7599	0.6836	0.5904	0.4780	0.3439	0.1855
0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
0.1875	0.1312	0.0870	0.0540	0.0308	0.0156	0.0067	0.0022	0.0005	0.0000
0.5000	0.4069	0.3174	0.2352	0.1631	0.1035	0.0579	0.0266	0.0086	0.0012
0.8125	0.7438	0.6630	0.5716	0.4718	0.3672	0.2627	0.1648	0.0815	0.0226
0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8319	0.7627	0.6723	0.5563	0.4095	0.2262
0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0109	0.0046	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
0.3438	0.2553	0.1792	0.1174	0.0705	0.0376	0.0170	0.0059	0.0013	0.0001
0.6563	0.5585	0.4557	0.3529	0.2557	0.1694	0.0989	0.0473	0.0159	0.0022
0.8906	0.8364	0.7667	0.6809	0.5798	0.4661	0.3446	0.2235	0.1143	0.0328
0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.8824	0.8220	0.7379	0.6229	0.4686	0.2649
0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0288	0.0129	0.0047	0.0012	0.0002	0.0000
0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1260	0.0706	0.0333	0.0121	0.0027	0.0002
0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.3529	0.2436	0.1480	0.0738	0.0257	0.0038
0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.6706	0.5551	0.4233	0.2834	0.1497	0.0444
0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9176	0.8665	0.7903	0.6794	0.5217	0.3017
0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0352	0.0181	0.0085	0.0036	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.1445	0.0885	0.0498	0.0253	0.0113	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
0.3633	0.2604	0.1737	0.1061	0.0580	0.0273	0.0104	0.0029	0.0004	0.0000
0.6367	0.5230	0.4059	0.2936	0.1941	0.1138	0.0563	0.0214	0.0050	0.0004
0.8555	0.7799	0.6846	0.5722	0.4482	0.3215	0.2031	0.1052	0.0381	0.0058
0.9648	0.9368	0.8936	0.8309	0.7447	0.6329	0.4967	0.3428	0.1869	0.0572
0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9424	0.8999	0.8322	0.7275	0.5695	0.3366

附表 1 （续 1）

n	x	p 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044
	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0043	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0253	0.0100	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000
0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.0988	0.0489	0.0196	0.0056	0.0009	0.0000
0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.2703	0.1657	0.0856	0.0339	0.0083	0.0006
0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.5372	0.3993	0.2618	0.1409	0.0530	0.0084
0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8040	0.6997	0.5638	0.4005	0.2252	0.0712
0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9596	0.9249	0.8658	0.7684	0.6126	0.3698
0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0106	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
0.3770	0.2616	0.1662	0.0949	0.0473	0.0197	0.0064	0.0014	0.0001	0.0000
0.6230	0.4956	0.3669	0.2485	0.1503	0.0781	0.0328	0.0099	0.0016	0.0001
0.8281	0.7340	0.6177	0.4862	0.3504	0.2241	0.1209	0.0500	0.0128	0.0010
0.9453	0.9004	0.8327	0.7384	0.6172	0.4744	0.3222	0.1798	0.0702	0.0115
0.9893	0.9767	0.9536	0.9140	0.8507	0.7560	0.6242	0.4557	0.2639	0.0861
0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9718	0.9437	0.8926	0.8031	0.6513	0.4013
0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0059	0.0022	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0327	0.0148	0.0059	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1133	0.0610	0.0293	0.0122	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.2744	0.1738	0.0994	0.0501	0.0216	0.0076	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000
0.5000	0.3669	0.2465	0.1487	0.0782	0.0343	0.0117	0.0027	0.0003	0.0000
0.7256	0.6029	0.4672	0.3317	0.2103	0.1146	0.0504	0.0159	0.0028	0.0001
0.8867	0.8089	0.7037	0.5744	0.4304	0.2867	0.1611	0.0694	0.0185	0.0016
0.9673	0.9348	0.8811	0.7999	0.6873	0.5448	0.3826	0.2212	0.0896	0.0152
0.9941	0.9861	0.9698	0.9394	0.8870	0.8029	0.6779	0.5078	0.3026	0.1019
0.9995	0.9986	0.9964	0.9912	0.9802	0.9578	0.9141	0.8327	0.6826	0.4312
0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.1938	0.1117	0.0573	0.0255	0.0095	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0386	0.0143	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000
0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1178	0.0544	0.0194	0.0046	0.0005	0.0000
0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.2763	0.1576	0.0726	0.0239	0.0043	0.0002
0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.5075	0.3512	0.2054	0.0922	0.0256	0.0022
0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.7472	0.6093	0.4417	0.2642	0.1109	0.0196
0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9150	0.8416	0.7251	0.5565	0.3410	0.1184
0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9862	0.9683	0.9313	0.8578	0.7176	0.4596

附表 1 （续 2）

n	x	p 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279
	5	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268
	6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204
	5	0.9999	0.9977	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522
	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0112	0.0041	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0461	0.0203	0.0078	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1334	0.0698	0.0321	0.0126	0.0040	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.2905	0.1788	0.0977	0.0462	0.0182	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
0.5000	0.3563	0.2288	0.1295	0.0624	0.0243	0.0070	0.0013	0.0001	0.0000
0.7095	0.5732	0.4256	0.2841	0.1654	0.0802	0.0300	0.0075	0.0009	0.0000
0.8666	0.7721	0.6470	0.4995	0.3457	0.2060	0.0991	0.0342	0.0065	0.0003
0.9539	0.9071	0.8314	0.7217	0.5794	0.4157	0.2527	0.1180	0.0342	0.0031
0.9888	0.9731	0.9421	0.8868	0.7975	0.6674	0.4983	0.3080	0.1339	0.0245
0.9983	0.9951	0.9874	0.9704	0.9363	0.8733	0.7664	0.6017	0.3787	0.1354
0.9999	0.9996	0.9987	0.9963	0.9903	0.9762	0.9450	0.8791	0.7458	0.4867
0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0083	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0315	0.0103	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000
0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.0933	0.0383	0.0116	0.0022	0.0002	0.0000
0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
0.9713	0.9368	0.8757	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0301
0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9525	0.8990	0.8021	0.6433	0.4154	0.1530
0.9999	0.9998	0.9992	0.9976	0.9932	0.9822	0.9560	0.8972	0.7712	0.5123
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0037	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0176	0.0063	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0592	0.0255	0.0093	0.0028	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1509	0.0769	0.0338	0.0124	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.3036	0.1818	0.0950	0.0422	0.0152	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
0.5000	0.3465	0.2131	0.1132	0.0500	0.0173	0.0042	0.0006	0.0000	0.0000
0.6964	0.5478	0.3902	0.2452	0.1311	0.0566	0.0181	0.0036	0.0003	0.0000
0.8491	0.7392	0.5968	0.4357	0.2784	0.1484	0.0611	0.0168	0.0023	0.0001
0.9408	0.8796	0.7827	0.6481	0.4845	0.3135	0.1642	0.0617	0.0127	0.0006
0.9824	0.9576	0.9095	0.8273	0.7031	0.5387	0.3518	0.1773	0.0556	0.0055
0.9963	0.9893	0.9729	0.9383	0.8732	0.7639	0.6020	0.3958	0.1841	0.0362
0.9995	0.9983	0.9948	0.9858	0.9647	0.9198	0.8329	0.6814	0.4510	0.1710
1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9953	0.9866	0.9648	0.9126	0.7941	0.5367

附表 1 （续 3）

n	x	p 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0001	0.0003	0.0001
	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010
	2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066
	3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281
	4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853
	5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976
	6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660
	7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629
	8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000
	1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006
	2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041
	3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184
	4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596
	5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471
	6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902
	7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743
	8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
	1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003
	2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025
	3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120
	4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411
	5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077
	6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258
	7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720

0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2272	0.1241	0.0581	0.0229	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0257	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.0744	0.0271	0.0070	0.0011	0.0001	0.0000
0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.1753	0.0796	0.0267	0.0056	0.0005	0.0000
0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.3402	0.1897	0.0817	0.0235	0.0033	0.0001
0.9616	0.9147	0.8334	0.7108	0.5501	0.3698	0.2018	0.0791	0.0170	0.0009
0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.7541	0.5950	0.4019	0.2101	0.0684	0.0070
0.9970	0.9934	0.9817	0.9549	0.9006	0.8029	0.6482	0.4386	0.2108	0.0429
0.9997	0.9990	0.9967	0.9902	0.9939	0.9365	0.8593	0.7161	0.4853	0.1892
1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9900	0.9719	0.9257	0.8147	0.5599
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0064	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0245	0.0086	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0717	0.0301	0.0106	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1662	0.0826	0.0348	0.0120	0.0032	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.3145	0.1834	0.0919	0.0383	0.0127	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
0.5000	0.3374	0.1989	0.0994	0.0403	0.0124	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000
0.6855	0.5257	0.3595	0.2128	0.1046	0.0402	0.0109	0.0017	0.0001	0.0000
0.8338	0.7098	0.5522	0.3812	0.2248	0.1071	0.0377	0.0083	0.0008	0.0000
0.9283	0.8529	0.7361	0.5803	0.4032	0.2347	0.1057	0.0319	0.0047	0.0001
0.9755	0.9404	0.8740	0.7652	0.6113	0.4261	0.2418	0.0987	0.0221	0.0012
0.9936	0.9816	0.9536	0.8972	0.7981	0.6470	0.4511	0.2444	0.0826	0.0088
0.9988	0.9959	0.9877	0.9673	0.9226	0.8363	0.6904	0.4802	0.2382	0.0503
0.9999	0.9994	0.9979	0.9933	0.9807	0.9499	0.8818	0.7475	0.5182	0.2078
1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9925	0.9775	0.9369	0.8332	0.5819
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0210	0.0054	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.0596	0.0193	0.0043	0.0005	0.0000	0.0000
0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.1407	0.0569	0.0163	0.0027	0.0002	0.0000

附表 1 （续 4）

n	x	p 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015
	3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777
	6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727
	7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169
	8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0015	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049
	4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189
	5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8024	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553
	6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299
	7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520
	8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143
	9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

续表

0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.2783	0.1390	0.0513	0.0118	0.0012	0.0000
0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4656	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
0.9846	0.9598	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4990	0.2798	0.0982	0.0109
0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.9009	0.7759	0.5497	0.2265
1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0835	0.0342	0.0116	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1796	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0105	0.0023	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
0.5000	0.3290	0.1861	0.0875	0.0326	0.0089	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
0.6762	0.5060	0.3325	0.1855	0.0839	0.0287	0.0067	0.0008	0.0000	0.0000
0.8204	0.6831	0.5122	0.3344	0.1820	0.0775	0.0233	0.0041	0.0003	0.0000
0.9165	0.8273	0.6919	0.5188	0.3345	0.1749	0.0676	0.0163	0.0017	0.0000
0.9682	0.9223	0.8371	0.7032	0.5261	0.3322	0.1631	0.0537	0.0086	0.0002
0.9904	0.9720	0.9304	0.8500	0.7178	0.5346	0.3267	0.1444	0.0352	0.0020
0.9978	0.9923	0.9770	0.9409	0.8668	0.7369	0.5449	0.3159	0.1150	0.0132
0.9996	0.9985	0.9945	0.9830	0.9538	0.8887	0.7631	0.5587	0.2946	0.0665
1.0000	0.9998	0.9992	0.9969	0.9896	0.9690	0.9171	0.8015	0.5797	0.2453
1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9958	0.9856	0.9544	0.8649	0.6226
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1133	0.0409	0.0100	0.0013	0.0001	0.0000
0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	0.0000
0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	0.0000
0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0673	0.0113	0.0003
0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	0.0026
0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	0.0159
0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7939	0.5951	0.3231	0.0755
1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	0.2642
1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9968	0.9885	0.9612	0.8784	0.6415

附表 2 泊松分布表

$$P(X\leqslant x)=\sum_{k=0}^{x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.02	0.980	1.000								
0.04	0.961	0.999	1.000							
0.06	0.942	0.998	1.000							
0.08	0.923	0.997	1.000							
0.10	0.905	0.995	1.000							
0.15	0.861	0.990	0.999	1.000						
0.20	0.819	0.982	0.999	1.000						
0.25	0.779	0.974	0.998	1.000						
0.30	0.741	0.963	0.996	1.000						
0.35	0.705	0.951	0.994	1.000						
0.40	0.670	0.938	0.992	0.999	1.000					
0.45	0.638	0.925	0.989	0.999	1.000					
0.50	0.607	0.910	0.986	0.998	1.000					
0.55	0.577	0.894	0.982	0.998	1.000					
0.60	0.549	0.878	0.977	0.997	1.000					
0.65	0.522	0.861	0.972	0.996	0.999	1.000				
0.70	0.497	0.844	0.966	0.994	0.999	1.000				
0.75	0.472	0.827	0.959	0.993	0.999	1.000				
0.80	0.449	0.809	0.953	0.991	0.999	1.000				
0.85	0.427	0.791	0.945	0.989	0.989	1.000				
0.90	0.407	0.772	0.937	0.987	0.998	1.000				
0.95	0.387	0.754	0.929	0.984	0.997	1.000				
1.00	0.368	0.736	0.920	0.981	0.996	0.999	1.000			
1.1	0.333	0.699	0.900	0.974	0.995	0.999	1.000			
1.2	0.301	0.663	0.879	0.966	0.992	0.998	1.000			
1.3	0.273	0.627	0.857	0.957	0.989	0.998	1.000			
1.4	0.247	0.592	0.833	0.946	0.986	0.997	0.999	1.000		
1.5	0.223	0.558	0.809	0.934	0.981	0.996	0.999	1.000		
1.6	0.202	0.525	0.783	0.921	0.976	0.994	0.999	1.000		
1.7	0.183	0.493	0.757	0.907	0.970	0.992	0.998	1.000		
1.8	0.165	0.463	0.731	0.891	0.964	0.990	0.997	0.999	1.000	
1.9	0.150	0.434	0.704	0.875	0.956	0.987	0.997	0.999	1.000	
2.0	0.135	0.406	0.677	0.857	0.947	0.983	0.995	0.999	1.000	

附表 2 （续 1）

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.2	0.111	0.355	0.623	0.819	0.928	0.975	0.993	0.998	1.000	
2.4	0.091	0.308	0.570	0.779	0.904	0.964	0.989	0.997	0.999	1.000
2.6	0.074	0.267	0.518	0.736	0.877	0.951	0.983	0.995	0.999	1.000
2.8	0.061	0.231	0.469	0.692	0.848	0.935	0.976	0.992	0.998	0.999
3.0	0.050	0.199	0.423	0.647	0.815	0.916	0.966	0.988	0.996	0.999
3.2	0.041	0.171	0.380	0.603	0.781	0.895	0.955	0.983	0.994	0.998
3.4	0.033	0.147	0.340	0.558	0.744	0.871	0.942	0.977	0.992	0.997
3.6	0.027	0.126	0.303	0.515	0.706	0.844	0.927	0.969	0.988	0.996
3.8	0.022	0.107	0.269	0.473	0.668	0.816	0.909	0.960	0.984	0.994
4.0	0.018	0.092	0.238	0.433	0.629	0.785	0.889	0.949	0.979	0.992
4.2	0.015	0.078	0.210	0.395	0.590	0.753	0.867	0.936	0.972	0.989
4.4	0.012	0.066	0.185	0.359	0.551	0.720	0.844	0.921	0.964	0.985
4.6	0.010	0.056	0.163	0.326	0.513	0.686	0.818	0.905	0.955	0.980
4.8	0.008	0.048	0.143	0.294	0.476	0.651	0.791	0.887	0.944	0.975
5.0	0.007	0.040	0.125	0.265	0.440	0.616	0.762	0.867	0.932	0.968
5.2	0.006	0.034	0.109	0.238	0.406	0.581	0.732	0.845	0.918	0.960
5.4	0.005	0.029	0.095	0.213	0.373	0.546	0.702	0.822	0.903	0.951
5.6	0.004	0.024	0.082	0.191	0.342	0.512	0.670	0.797	0.886	0.941
5.8	0.003	0.021	0.072	0.170	0.313	0.478	0.638	0.771	0.867	0.929
6.0	0.002	0.017	0.062	0.151	0.285	0.446	0.606	0.744	0.847	0.916

λ \ x	10	11	12	13	14	15	16
2.8	1.000						
3.0	1.000						
3.2	1.000						
3.4	0.999	1.000					
3.6	0.999	1.000					
3.8	0.998	0.999	1.000				
4.0	0.997	0.999	1.000				
4.2	0.996	0.999	1.000				
4.4	0.994	0.998	0.999	1.000			
4.6	0.992	0.997	0.999	1.000			
4.8	0.990	0.996	0.999	1.000			
5.0	0.986	0.995	0.998	0.999	1.000		
5.2	0.982	0.993	0.997	0.999	1.000		
5.4	0.977	0.990	0.996	0.999	1.000		
5.6	0.972	0.988	0.995	0.998	0.999	1.000	
5.8	0.965	0.984	0.993	0.997	0.999	1.000	
6.0	0.957	0.980	0.991	0.996	0.999	0.999	1.000

附表 2 （续 2）

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.2	0.002	0.015	0.054	0.134	0.259	0.414	0.574	0.716	0.826	0.902
6.4	0.002	0.012	0.046	0.119	0.235	0.384	0.542	0.687	0.803	0.886
6.6	0.001	0.010	0.040	0.105	0.213	0.355	0.511	0.758	0.780	0.869
6.8	0.001	0.009	0.034	0.093	0.192	0.327	0.480	0.628	0.755	0.850
7.0	0.001	0.007	0.030	0.082	0.173	0.301	0.450	0.599	0.729	0.830
7.2	0.001	0.006	0.025	0.072	0.156	0.276	0.420	0.569	0.703	0.810
7.4	0.001	0.005	0.022	0.063	0.140	0.253	0.392	0.539	0.676	0.788
7.6	0.001	0.004	0.019	0.055	0.125	0.231	0.365	0.510	0.648	0.765
7.8	0.000	0.004	0.016	0.048	0.112	0.210	0.338	0.481	0.620	0.741
8.0	0.000	0.003	0.014	0.042	0.100	0.191	0.313	0.453	0.593	0.717
8.5	0.000	0.002	0.009	0.030	0.074	0.150	0.256	0.386	0.523	0.653
9.0	0.000	0.001	0.006	0.021	0.055	0.116	0.207	0.324	0.456	0.587
9.5	0.000	0.001	0.004	0.015	0.040	0.089	0.165	0.269	0.392	0.522
10.0	0.000	0.000	0.003	0.010	0.029	0.067	0.130	0.220	0.333	0.458

λ \ x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6.2	0.949	0.975	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000			
6.4	0.939	0.969	0.986	0.994	0.997	0.999	1.000			
6.6	0.927	0.963	0.982	0.992	0.997	0.999	0.999	1.000		
6.8	0.915	0.955	0.978	0.990	0.996	0.998	0.999	1.000		
7.0	0.901	0.947	0.973	0.987	0.994	0.998	0.999	1.000		
7.2	0.887	0.937	0.967	0.984	0.993	0.997	0.999	0.999	1.000	
7.4	0.871	0.926	0.961	0.980	0.991	0.996	0.998	0.999	1.000	
7.6	0.854	0.915	0.954	0.976	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000	
7.8	0.835	0.902	0.945	0.971	0.986	0.993	0.997	0.999	1.000	
8.0	0.816	0.888	0.936	0.966	0.983	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000
8.5	0.763	0.849	0.909	0.949	0.973	0.986	0.993	0.997	0.999	0.999
9.0	0.706	0.803	0.876	0.926	0.959	0.978	0.989	0.995	0.998	0.999
9.5	0.645	0.752	0.836	0.898	0.940	0.967	0.982	0.991	0.996	0.998
10.0	0.583	0.697	0.792	0.864	0.917	0.951	0.973	0.986	0.993	0.997

λ \ x	20	21	22
8.5	1.000		
9.0	1.000		
9.5	0.999	1.000	
10.0	0.998	0.999	1.000

附表 2 （续 3）

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.5	0.000	0.000	0.002	0.007	0.021	0.050	0.102	0.179	0.279	0.397
11.0	0.000	0.000	0.001	0.005	0.015	0.038	0.079	0.143	0.232	0.341
11.5	0.000	0.000	0.001	0.003	0.011	0.028	0.060	0.114	0.191	0.289
12.0	0.000	0.000	0.001	0.002	0.008	0.020	0.046	0.090	0.155	0.242
12.5	0.000	0.000	0.000	0.002	0.005	0.015	0.035	0.070	0.125	0.201
13.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.011	0.026	0.054	0.100	0.166
13.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.019	0.041	0.079	0.135
14.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.006	0.014	0.032	0.062	0.109
14.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.010	0.024	0.048	0.088
15.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.018	0.037	0.070

λ \ x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10.5	0.521	0.639	0.742	0.825	0.888	0.932	0.960	0.978	0.988	0.994
11.0	0.460	0.579	0.689	0.781	0.854	0.907	0.944	0.968	0.982	0.991
11.5	0.402	0.520	0.633	0.733	0.815	0.878	0.924	0.954	0.974	0.986
12.0	0.347	0.462	0.576	0.682	0.772	0.844	0.899	0.937	0.963	0.979
12.5	0.297	0.406	0.519	0.628	0.725	0.806	0.869	0.916	0.948	0.969
13.0	0.252	0.353	0.463	0.573	0.675	0.764	0.835	0.890	0.930	0.957
13.5	0.211	0.304	0.409	0.518	0.623	0.718	0.798	0.861	0.908	0.942
14.0	0.176	0.260	0.358	0.464	0.570	0.669	0.756	0.827	0.883	0.923
14.5	0.145	0.220	0.311	0.413	0.518	0.619	0.711	0.790	0.853	0.901
15.0	0.118	0.185	0.268	0.363	0.466	0.568	0.664	0.749	0.819	0.875

λ \ x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
10.5	0.997	0.999	0.999	1.000						
11.0	0.995	0.998	0.999	1.000						
11.5	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000					
12.0	0.988	0.994	0.997	0.999	0.999	1.000				
12.5	0.983	0.991	0.995	0.998	0.999	0.999	1.000			
13.0	0.975	0.986	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000			
13.5	0.965	0.980	0.989	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000		
14.0	0.952	0.971	0.983	0.991	0.995	0.997	0.999	0.999	1.000	
14.5	0.936	0.960	0.976	0.986	0.992	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000
15.0	0.917	0.947	0.967	0.981	0.989	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000

附表 2 （续 4）

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	0.000	0.001	0.004	0.010	0.022	0.043	0.077	0.127	0.193	0.275
17	0.000	0.001	0.002	0.005	0.013	0.026	0.049	0.085	0.135	0.201
18	0.000	0.000	0.001	0.003	0.007	0.015	0.030	0.055	0.092	0.143
19	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.009	0.018	0.035	0.061	0.098
20	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.005	0.011	0.021	0.039	0.066
21	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.006	0.013	0.025	0.043
22	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.015	0.028
23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.009	0.017
24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.005	0.011
25	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.006

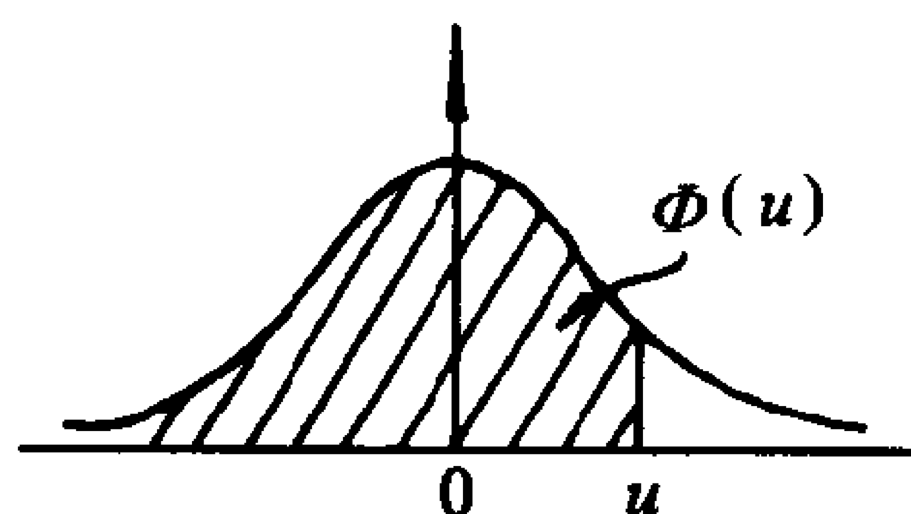
λ \ x	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
16	0.368	0.467	0.566	0.659	0.742	0.812	0.868	0.911	0.942	0.963
17	0.281	0.371	0.468	0.564	0.655	0.736	0.805	0.861	0.905	0.937
18	0.208	0.287	0.375	0.496	0.562	0.651	0.731	0.799	0.855	0.899
19	0.150	0.215	0.292	0.378	0.469	0.561	0.647	0.725	0.793	0.849
20	0.105	0.157	0.221	0.297	0.381	0.470	0.559	0.644	0.721	0.787
21	0.072	0.111	0.163	0.227	0.302	0.384	0.471	0.558	0.640	0.716
22	0.048	0.077	0.117	0.169	0.232	0.306	0.387	0.472	0.556	0.637
23	0.031	0.052	0.082	0.123	0.175	0.238	0.310	0.389	0.472	0.555
24	0.020	0.034	0.056	0.087	0.128	0.180	0.243	0.314	0.392	0.473
25	0.012	0.022	0.038	0.060	0.092	0.134	0.185	0.247	0.318	0.394

λ \ x	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
16	0.987	0.987	0.993	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000		
17	0.959	0.975	0.985	0.991	0.995	0.997	0.999	0.999	1.000	
18	0.932	0.955	0.972	0.983	0.990	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000
19	0.893	0.927	0.951	0.969	0.980	0.988	0.993	0.996	0.998	0.999
20	0.843	0.888	0.922	0.948	0.966	0.978	0.987	0.992	0.995	0.997
21	0.782	0.838	0.883	0.917	0.944	0.963	0.976	0.985	0.991	0.994
22	0.712	0.777	0.832	0.877	0.913	0.940	0.959	0.973	0.983	0.989
23	0.635	0.708	0.772	0.827	0.873	0.908	0.936	0.956	0.971	0.981
24	0.554	0.632	0.704	0.768	0.823	0.868	0.904	0.932	0.953	0.969
25	0.473	0.553	0.629	0.700	0.763	0.818	0.863	0.900	0.929	0.950

λ \ x	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
19	0.999	1.000								
20	0.999	0.999	1.000							
21	0.997	0.998	0.999	0.999	1.000					
22	0.994	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000				
23	0.989	0.993	0.996	0.997	0.999	0.999	1.000			
24	0.979	0.987	0.992	0.995	0.997	0.998	0.999	0.999	1.000	
25	0.966	0.978	0.985	0.991	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000	

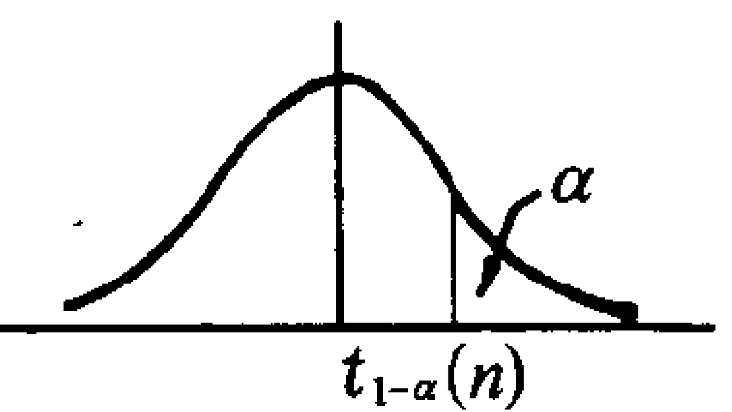
附表 3 正态分布表

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-t^2/2}dt$$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.2951	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998									
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									
6.0	0.999999999									

附表 4　t 分布分位数 $t_{1-\alpha}(n)$ 表

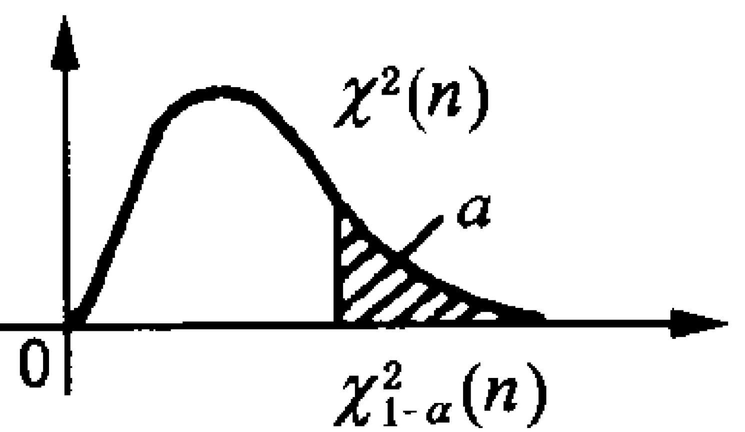


$$P\{t(n)>t_{1-\alpha}(n)\}=\alpha$$

n	α = 0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	n	α = 0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574	24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
2	0.8165	1.8866	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409							
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322	27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
							28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554							
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1698	32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
							33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	35	0.6818	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123							
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467	37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
							38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784							
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0360	2.5280	2.8453	42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
							43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314	44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073							

附表 5　χ^2 分布分位数 $\chi^2_{1-\alpha}(n)$ 表

$$P\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(n)\} = \alpha$$



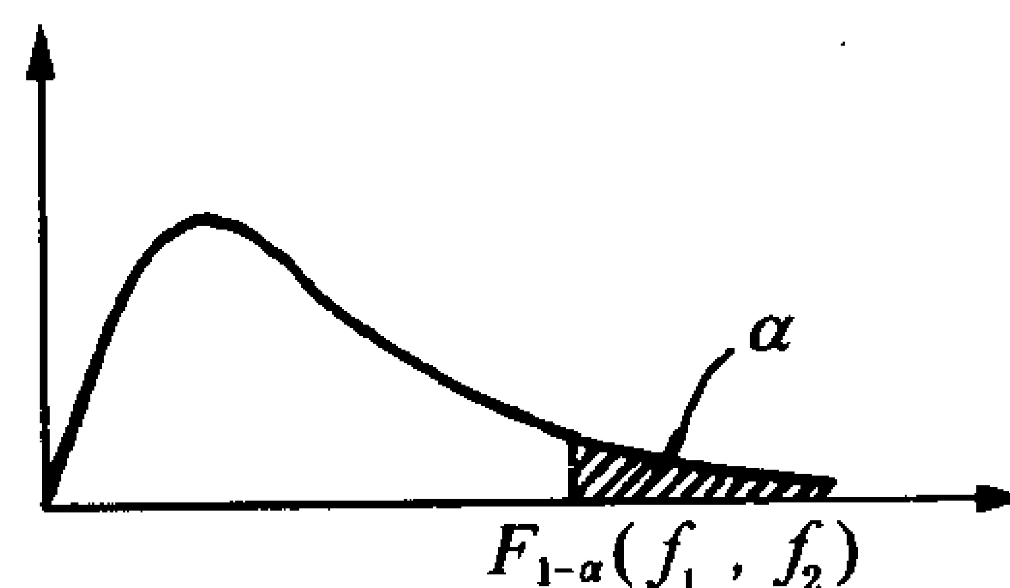
n	α												
	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.000157	0.000628	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.286	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
4	0.297	0.492	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.068
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578

附表 5 （续）

n	α												
	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.669	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

附表 6　F 分布分位数 $F_{1-\alpha}(f_1,f_2)$表

$$P(F \geqslant F_{1-\alpha}(f_1,f_2))=\alpha$$



f_2	$1-\alpha$	f_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03
	.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9
	.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241
	.975	648	800	864	900	922	937	948	957	963
	.99	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
	.995	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
	.999	405280	500000	540380	562500	576400	585940	592870	598140	602280
2	.50	0.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33
	.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
	.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
	.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199
	.999	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4
3	50	0.585	0.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17
	.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.975	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
	.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
	.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9
	.999	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9
4	.50	0.549	0.828	0.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10
	.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
	.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1
	.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5

附表 6 （续 1）

f_2	$1-\alpha$	f_1 1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	.50	0.528	0.799	0.907	0.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
	.995	22.3	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8
	.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	27.2
6	.50	0.515	0.780	0.886	0.942	0.977	1.00	1.02	1.03	1.04
	.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4
	.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7
7	.50	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.00	1.01	1.02
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.995	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.86	8.51
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3
8	50	0.499	0.757	0.860	0.915	0.948	0.971	0.988	1.00	1.01
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
	.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8
9	50	0.494	0.749	0.852	0.906	0.939	0.962	0.978	0.990	1.00
	.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35

附表 6 （续 2）

f_2	$1-\alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
	.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1
10	.50	0.490	0.743	0.845	0.899	0.932	0.954	0.971	0.983	0.992
	.90	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.96
12	.50	0.484	0.735	0.835	0.888	0.921	0.943	0.959	0.972	0.981
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.38	2.24	2.21
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48
15	.50	0.478	0.726	0.826	0.878	0.911	0.933	0.949	0.960	0.970
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.975	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
20	.50	0.472	0.718	0.816	0.868	0.900	0.922	0.938	0.950	0.959
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
24	.50	0.469	0.714	0.812	0.863	0.895	0.917	0.932	0.944	0.953
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91

(Column heads 1–9 are values of f_1.)

附表 6 （续 3）

f_2	$1-\alpha$	f_1=1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80
30	.50	0.466	0.709	0.807	0.858	0.890	0.912	0.927	0.939	0.948
	.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.975	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.995	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
	.999	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
60	.50	0.461	0.701	0.798	0.849	0.880	0.901	0.917	0.928	0.937
	.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.975	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.995	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
	.999	12.0	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
120	.50	0.458	0.697	0.793	0.844	0.875	0.896	0.912	0.923	0.932
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
	.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
	.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
	.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
	.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
	.999	11.4	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38
∞	.50	0.455	0.693	0.789	0.839	0.870	0.891	0.907	0.918	0.927
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88
	.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
	.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.66
	.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10

附表 6 （续 4）

f_2	$1-\alpha$	f_1 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
1	.50	2.04	2.07	2.09	2.12	2.13	2.15	2.17	2.18	2.20
	.90	60.2	60.7	61.2	61.7	62.0	62.3	62.8	63.1	63.1
	.95	242	244	246	248	249	250	252	253	254
	.975	969	977	985	993	997	1001	1010	1014	1018
	.99	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6313	6339	6366
	.995	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25253	25359	25464
	.999	605620	610670	615760	620910	623500	626100	631340	633970	636620
2	.50	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.43	1.43	1.44
	.90	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
	.95	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	.975	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
	.99	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	200
	.999	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	50	1.18	1.20	1.21	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.27
	.90	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
	.95	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.57	8.55	8.53
	.975	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	13.9	13.9
	.99	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.3	26.2	26.1
	.995	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.1	42.0	41.8
	.999	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	124.5	124.0	123.5
4	.50	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.18	1.18	1.19
	.90	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
	.95	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
	.975	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.36	8.31	8.26
	.99	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
	.995	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.6	19.5	19.3
	.999	48.1	47.4	46.8	46.1	45.8	45.4	44.7	44.4	44.1
5	.50	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.14	1.14	1.15
	.90	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.11
	.95	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.43	4.40	4.37
	975	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.12	6.07	6.02

附表 6 （续 5）

f_2	$1-\alpha$	f_1 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
	.99	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.20	9.11	9.02
	.995	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.4	12.3	12.1
	.999	26.9	26.4	25.9	25.4	25.1	24.9	24.3	24.1	23.8
6	.50	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12
	.90	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.76	2.74	2.72
	.95	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.74	3.70	3.67
	.975	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	4.96	4.90	4.85
	.99	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.06	6.97	6.88
	.995	10.2	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.12	9.00	8.88
	.999	18.4	18.0	17.6	17.1	16.9	16.7	16.2	16.0	15.7
7	.50	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10
	.90	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.51	2.49	2.47
	.95	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.30	3.27	3.23
	.975	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.25	4.20	4.14
	.99	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.82	5.74	5.65
	.995	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.31	7.19	7.08
	.999	14.1	13.7	13.3	12.9	12.7	12.5	12.1	11.9	11.7
8	.50	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09
	.90	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
	.95	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.01	2.97	2.93
	.975	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.78	3.73	3.67
	.99	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.03	4.95	4.86
	.995	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.18	6.06	5.95
	.999	11.5	11.2	10.8	10.5	10.3	10.1	9.73	9.53	9.33
9	.50	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.07	1.07	1.08
	.90	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.21	2.18	2.16
	.95	3.14	3.07	3.01	2.24	2.90	2.86	2.79	2.75	2.71
	975	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.45	3.39	3.33
	.99	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.48	4.40	4.31
	.995	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.41	5.30	5.19
	.999	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.19	8.00	7.81

附表 6 （续 6）

f_2	$1-\alpha$	f_1 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
10	.50	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07
	.90	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.11	2.08	2.06
	.95	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.62	2.58	2.54
	.975	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.20	3.14	3.08
	.99	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.08	4.00	3.91
	.995	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.86	4.75	4.64
	.999	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.12	6.94	6.76
12	.50	0.989	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.05	1.05	1.06
	.90	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.96	1.93	1.90
	.95	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.38	2.34	2.30
	.975	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.85	2.79	2.72
	.99	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.54	3.45	3.36
	.995	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.12	4.01	3.90
	.999	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.76	5.59	5.42
15	.50	0.977	0.989	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05
	.90	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76
	.95	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.16	2.11	2.07
	.975	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.52	2.46	2.40
	.99	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.05	2.96	2.87
	.995	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.48	3.37	3.26
	.999	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.64	4.48	4.31
20	.50	0.966	0.977	0.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.03
	.90	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.68	1.64	1.61
	.95	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.95	1.90	1.84
	.975	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.22	2.16	2.09
	.99	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.61	2.52	2.42
	.995	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	2.92	2.81	2.69
	.999	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.70	3.54	3.38
24	.50	0.961	0.972	0.983	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03
	.90	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.61	1.57	1.53
	.95	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.84	1.79	1.73
	.975	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.08	2.01	1.94

附表 6 （续 7）

f_2 $1-\alpha$	f_1								
	10	12	15	20	24	30	60	120	∞
.99	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.53	2.40	2.31	2.21
.995	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.66	2.55	2.43
.999	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.29	3.14	2.97
30 .50	0.955	0.966	0.978	0.989	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02
.90	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.54	1.50	1.46
.95	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.74	1.68	1.62
.975	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	1.94	1.87	1.79
.99	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.21	2.11	2.01
.995	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.42	2.30	2.18
.999	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	2.92	2.76	2.59
60 .50	0.945	0.956	0.967	0.978	0.983	0.989	1.00	1.01	1.01
.90	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.40	1.35	1.29
.95	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.53	1.47	1.39
.975	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.67	1.58	1.48
.99	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.84	1.73	1.60
.995	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	1.96	1.83	1.69
.999	3.54	3.32	3.08	2.83	2.69	2.55	2.25	2.08	1.89
120 .50	0.939	0.950	0.961	0.972	0.978	0.983	0.994	1.00	1.01
.90	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.32	1.26	1.19
.95	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.43	1.35	1.25
.975	2.16	2.05	1.95	1.82	1.76	1.69	1.53	1.43	1.31
.99	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.66	1.53	1.38
.995	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.75	1.61	1.43
.999	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	1.95	1.77	1.54
∞ .50	0.934	0.945	0.956	0.967	0.972	0.978	0.989	0.994	1.00
.90	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.24	1.17	1.00
.95	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.32	1.22	1.00
.975	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.39	1.27	1.00
.99	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.47	1.32	1.00
.995	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.53	1.36	1.00
.999	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.66	1.45	1.00

附表 7　随机数表

53 74 23 99 67	61 32 28 69 84	94 62 67 86 24	98 33 41 19 95	47 53 53 38 09
63 38 06 86 54	99 00 65 26 94	02 82 90 23 07	79 62 67 80 60	75 91 12 81 19
35 80 53 21 46	06 72 17 10 91	25 21 31 75 96	49 28 24 00 49	55 65 79 78 07
63 43 36 82 69	65 51 18 37 88	61 38 44 12 45	32 92 85 88 65	54 34 81 85 35
98 25 37 55 26	01 91 82 81 46	74 71 12 94 97	24 02 71 37 07	03 92 13 66 75
02 63 21 17 69	71 50 80 89 56	38 15 70 11 48	43 40 45 86 98	00 83 26 91 03
64 55 22 21 82	48 22 28 06 00	61 54 13 43 91	82 78 12 23 29	06 66 24 12 27
85 07 26 13 89	01 10 07 82 04	59 63 69 36 03	69 11 15 83 80	13 29 54 19 28
58 54 16 24 15	51 54 44 82 00	62 61 65 04 69	38 18 65 18 97	85 72 13 49 21
35 85 27 84 87	61 48 64 56 26	90 18 48 13 26	37 70 15 42 57	65 65 80 39 07
03 92 18 27 46	57 99 16 96 56	30 33 72 85 22	84 64 38 56 98	99 01 30 98 64
62 63 30 27 59	37 75 41 66 48	86 97 80 61 45	23 53 04 01 63	45 76 08 64 27
08 45 93 15 22	60 21 75 46 91	93 77 27 85 42	23 88 61 08 84	69 62 03 42 73
07 08 55 18 40	45 44 75 13 90	24 94 96 61 02	57 55 66 83 15	73 42 37 11 61
01 85 89 95 66	51 10 19 34 88	15 84 97 19 75	12 76 39 46 78	64 63 91 08 25
72 84 71 14 35	19 11 58 49 26	50 11 17 17 76	86 31 57 20 18	95 60 78 46 75
88 78 28 16 84	13 52 53 94 53	75 45 69 30 96	73 89 65 70 31	99 17 43 48 76
45 17 75 65 57	23 40 19 72 12	25 12 74 75 67	60 40 60 81 19	24 62 01 61 16
96 76 28 12 54	22 01 11 94 25	71 96 16 16 83	68 64 36 74 45	19 59 50 88 92
43 31 67 72 30	24 02 94 03 63	38 32 36 66 02	69 36 38 25 39	48 03 45 15 22
50 44 66 44 21	66 06 53 05 62	68 15 54 35 02	42 35 48 96 32	14 52 41 52 48
22 66 22 15 86	26 63 75 41 99	58 42 36 72 24	58 37 52 18 51	03 37 18 39 11
96 24 40 14 51	23 22 30 88 57	95 67 47 29 83	94 69 40 06 07	18 16 36 78 86
31 73 91 61 19	60 20 72 93 48	98 57 07 23 69	65 95 39 69 58	56 80 30 19 44
78 60 73 99 84	43 89 94 36 45	56 69 47 07 41	90 22 91 07 12	78 35 34 08 72

附表 8 正态性检验统计量 W 的系数 $a_i(n)$ 的值

i \ n	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2	—	0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3	—	—	—	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141
4	—	—	—	—	—	0.0561	0.0947	0.1224
5	—	—	—	—	—	—	—	0.0399

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253	0.3232	0.3211
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553	0.2561	0.2565
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027	0.2059	0.2085
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587	0.1641	0.1686
6	—	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7	—	—	—	0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837	0.0932	0.1013
8	—	—	—	—	—	0.0196	0.0359	0.0496	0.0612	0.0711
9	—	—	—	—	—	—	—	0.0163	0.0303	0.0422
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0140

i \ n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254
2	0.3185	0.3156	0.3126	0.3098	0.3069	0.3043	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944
3	0.2578	0.2571	0.2563	0.2554	0.2543	0.2533	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487
4	0.2119	0.2131	0.2139	0.2145	0.2148	0.2151	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148
5	0.1736	0.1764	0.1787	0.1807	0.1822	0.1836	0.1848	0.1857	0.1864	0.1870
6	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630
7	0.1092	0.1150	0.1201	0.1245	0.1283	0.1316	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415
8	0.0804	0.0878	0.0941	0.0997	0.1046	0.1089	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219
9	0.0530	0.0618	0.0696	0.0764	0.0823	0.0876	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036
10	0.0263	0.0368	0.0459	0.0539	0.0610	0.0672	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862
11	—	0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0668
12	—	—	—	0.0107	0.0200	0.0284	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537
13	—	—	—	—	—	0.0094	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381
14	—	—	—	—	—	—	—	0.0084	0.0159	0.0227
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0076

i \ n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964
2	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774	0.2755	0.2737
3	0.2475	0.2463	0.2451	0.2439	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391	0.2380	0.2368
4	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110	0.2104	0.2098
5	0.1874	0.1878	0.1880	0.1882	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881	0.1880	0.1878
6	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691

附表 8 （续）

i \ n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
7	0.1433	0.1449	0.1463	0.1475	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513	0.1520	0.1526
8	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356	0.1366	0.1376
9	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140	0.1160	0.1179	0.1196	0.1211	0.1225	0.1237
10	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075	0.1092	0.1108
11	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947	0.0967	0.0986
12	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824	0.0848	0.0870
13	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706	0.0733	0.0759
14	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441	0.0484	0.0523	0.0559	0.0592	0.0622	0.0651
15	0.0144	0.0206	0.0262	0.0314	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481	0.0515	0.0546
16	—	0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0409	0.0444
17	—	—	—	0.0062	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264	0.0305	0.0343
18	—	—	—	—	—	0.0057	0.0110	0.0158	0.0203	0.0244
19	—	—	—	—	—	—	—	0.0053	0.0101	0.0146
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0049

i \ n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3803	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1865	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.1286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0892	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.0731	0.0748	0.0764
16	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21	—	0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22	—	—	—	0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23	—	—	—	—	—	0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24	—	—	—	—	—	—	—	0.0037	0.0071	0.0104
25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0035

附表9 正态性检验统计量 W 的 α 分位数 W_α 表

n \ α	0.01	0.05	0.10	n \ p	0.01	0.05	0.10
				26	0.891	0.920	0.933
				27	0.894	0.923	0.935
3	0.753	0.767	0.789	28	0.896	0.924	0.936
4	0.687	0.748	0.792	29	0.898	0.926	0.937
5	0.686	0.762	0.806	30	0.900	0.927	0.939
6	0.713	0.788	0.826	31	0.902	0.929	0.940
7	0.730	0.803	0.838	32	0.904	0.930	0.941
8	0.749	0.818	0.851	33	0.906	0.931	0.942
9	0.764	0.829	0.859	34	0.908	0.933	0.943
10	0.781	0.842	0.869	35	0.910	0.934	0.944
11	0.792	0.850	0.876	36	0.912	0.935	0.945
12	0.805	0.859	0.883	37	0.914	0.936	0.946
13	0.814	0.866	0.889	38	0.916	0.938	0.947
14	0.825	0.874	0.895	39	0.917	0.939	0.948
15	0.835	0.881	0.901	40	0.919	0.940	0.949
16	0.844	0.887	0.906	41	0.920	0.941	0.950
17	0.851	0.892	0.910	42	0.922	0.942	0.951
18	0.858	0.897	0.914	43	0.923	0.943	0.951
19	0.863	0.901	0.917	44	0.924	0.944	0.952
20	0.868	0.905	0.920	45	0.926	0.945	0.953
21	0.873	0.908	0.923	46	0.927	0.945	0.953
22	0.878	0.911	0.926	47	0.928	0.946	0.954
23	0.881	0.914	0.928	48	0.929	0.947	0.954
24	0.884	0.916	0.930	49	0.929	0.947	0.955
25	0.888	0.918	0.931	50	0.930	0.947	0.955

附表 10　正态性检验统计量 Y 的 α 分位数 Y_α 表

n \ α	0.005	0.025	0.05	0.95	0.975	0.995
50	−3.91	−2.74	−2.21	0.937	1.06	1.24
60	−3.81	−2.68	−2.17	0.997	1.13	1.34
70	−3.73	−2.64	−2.14	1.05	1.19	1.42
80	−3.67	−2.60	−2.11	1.08	1.24	1.48
90	−3.61	−2.57	−2.09	1.12	1.28	1.54
100	−3.57	2.54	−2.07	1.14	1.31	1.59
150	−3.41	−2.45	−2.00	1.23	1.42	1.75
200	−3.30	−2.39	−1.96	1.29	1.50	1.85
250	−3.23	−2.35	−1.93	1.33	1.55	1.93
300	−3.17	−2.32	−1.91	1.36	1.58	1.98
350	−3.13	−2.29	−1.89	1.38	1.61	2.03
400	−3.09	−2.27	−1.87	1.40	1.63	2.06
450	−3.06	−2.25	−1.86	1.41	1.65	2.09
500	−3.04	−2.24	−1.85	1.42	1.67	2.11
550	−3.02	−2.23	−1.84	1.43	1.68	2.14
600	−3.00	−2.22	−1.83	1.44	1.69	2.15
650	−2.98	−2.21	−1.83	1.45	1.70	2.17
700	−2.97	−2.20	−1.82	1.46	1.71	2.18
750	−2.96	−2.19	−1.81	1.47	1.72	2.20
800	−2.94	−2.18	−1.81	1.47	1.73	2.21
850	−2.93	−2.18	−1.80	1.48	1.74	2.22
900	−2.92	−2.17	−1.80	1.48	1.74	2.23
950	−2.91	−2.16	−1.80	1.49	1.75	2.24
1000	−2.91	−2.16	−1.79	1.49	1.75	2.25

附表 11　多重比较的 $q_{1-\alpha}(r, f)$ 表

(α=0.10)

f \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	8.93	13.4	16.4	18.5	20.2	21.5	22.6	23.6	24.5	27.6	29.7
2	4.13	5.73	6.77	7.54	8.14	8.63	9.05	9.41	9.72	10.9	11.7
3	3.33	4.47	5.20	5.74	6.16	6.51	6.81	7.06	7.29	8.12	8.68
4	3.01	3.98	4.59	5.03	5.39	5.68	5.93	6.14	6.33	7.02	7.50
5	2.85	3.72	4.26	4.66	4.98	5.24	5.46	5.65	5.82	6.44	6.86
6	2.75	3.56	4.07	4.44	4.73	4.97	5.17	5.34	5.50	6.07	6.47
7	2.68	3.45	3.93	4.28	4.55	4.78	4.97	5.14	5.28	5.83	6.19
8	2.63	3.37	3.83	4.17	4.43	4.65	4.83	4.99	5.13	5.64	6.00
9	2.59	3.32	3.76	4.08	4.34	4.54	4.72	4.87	5.01	5.51	5.85
10	2.56	3.27	3.70	4.02	4.26	4.47	4.64	4.78	4.91	5.40	5.73
11	2.54	3.23	3.66	3.96	4.20	4.40	4.57	4.71	4.84	5.31	5.63
12	2.52	3.20	3.62	3.92	4.16	4.35	4.51	4.65	4.78	5.24	5.55
13	2.50	3.18	3.59	3.88	4.12	4.30	4.46	4.60	4.72	5.18	5.48
14	2.49	3.16	3.56	3.85	4.08	4.27	4.42	4.56	4.68	5.12	5.43
15	2.48	3.14	3.54	3.83	4.05	4.23	4.39	4.52	4.64	5.08	5.38
16	2.47	3.12	3.52	3.80	4.03	4.21	4.36	4.49	4.61	5.04	5.33
17	2.46	3.11	3.50	3.78	4.00	4.18	4.33	4.46	4.58	5.01	5.30
18	2.45	3.10	3.49	3.77	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.98	5.26
19	2.45	3.09	3.47	3.75	3.97	4.14	2.29	4.42	4.53	4.95	5.23
20	2.44	3.08	3.46	3.74	3.95	4.12	4.27	4.40	4.51	4.92	5.20
24	2.42	3.05	3.42	3.69	3.90	4.07	4.21	4.34	4.44	4.85	5.12
30	2.40	3.02	3.39	3.65	3.85	4.02	4.16	4.28	4.38	4.77	5.03
40	2.38	2.99	3.35	3.60	3.80	3.96	4.10	4.21	4.32	4.69	4.95
60	2.36	2.96	3.31	3.56	3.75	3.91	4.04	4.16	4.25	4.62	4.86
120	2.34	2.93	3.28	3.52	3.71	3.86	3.99	4.10	4.19	4.54	4.78
∞	2.33	2.90	3.24	3.48	3.66	3.81	3.93	4.04	4.13	4.47	4.69

附表 11 （续 1） （α=0.05）

f \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	55.4	59.6
2	6.08	8.33	9.80	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	15.7	16.8
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	10.5	11.2
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.66	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.72	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	7.14	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.76	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.48	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	6.28	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	6.11	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.98	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.88	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.79	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.71	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.65	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.59	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.54	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.50	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.46	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.43	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.32	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	5.21	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	5.11	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	5.00	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.90	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.80	5.01

附表 11 （续 2） （$\alpha=0.01$）

f \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	277	298
2	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	35.4	37.9
3	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	18.5	19.8
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	13.5	14.4
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2	11.2	11.9
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.95	10.5
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	9.12	9.65
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.55	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	8.13	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.81	8.22
11	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.56	7.95
12	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	7.36	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	7.19	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	7.05	7.39
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.93	7.26
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.82	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.73	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.65	6.97
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.58	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.52	6.82
24	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.33	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	6.14	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.96	6.21
60	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.78	6.01
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.61	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.45	5.65

附表 12　F_{max}的分位数表

(α=0.05)

f \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39.0	87.5	142	202	266	333	403	475	550	526	704
3	15.4	27.8	39.2	50.7	62.0	72.9	83.5	93.9	104	114	124
4	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.1	44.6	48.0	51.4
5	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7	20.8	22.9	24.7	26.5	28.2	29.9
6	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6	19.7	20.7
7	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3	15.1	15.8
8	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7	12.2	12.7
9	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91	10.3	10.7
10	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66	9.01	9.34
12	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00	7.25	7.48
15	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59	5.77	5.93
20	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37	4.49	4.59
30	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29	3.36	3.39
60	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30	2.33	2.36
∞	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

(α=0.01)

f \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47.5	85	120	151	184	216	249	281	310	337	361
4	23.2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14.9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11.1	15.5	19.1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20	22	23	24	26	27
8	7.50	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9	19.8	21
9	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3	16.0	16.6
10	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9	13.4	13.9
12	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9	10.2	10.6
15	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5	7.8	8.0
20	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	5.8	5.9
30	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
60	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7
∞	1.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

附表 13 G_{max}的分位数表

(α=0.05)

r \ f	1	2	3	4	5	6	7
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8772	0.8534	0.8332
3	0.9669	0.8709	0.7977	0.7457	0.7071	0.6771	0.6530
4	0.9065	0.7679	0.6841	0.6287	0.5895	0.5598	0.5365
5	0.8412	0.6838	0.5981	0.5441	0.5065	0.4783	0.4564
6	0.7808	0.6161	0.5321	0.4803	0.4447	0.4184	0.3980
7	0.7271	0.5612	0.4800	0.4307	0.3974	0.3726	0.3535
8	0.6798	0.5157	0.4377	0.3910	0.3595	0.3362	0.3185
9	0.6385	0.4775	0.4027	0.3584	0.3286	0.3067	0.2901
10	0.6020	0.4450	0.3733	0.3311	0.3029	0.2823	0.2666
12	0.5410	0.3924	0.3264	0.2880	0.2624	0.2439	0.2299
15	0.4709	0.3346	0.2758	0.2419	0.2195	0.2034	0.1911
20	0.3894	0.2705	0.2205	0.1921	0.1735	0.1602	0.1501
24	0.3434	0.2354	0.1907	0.1656	0.1493	0.1374	0.1286
30	0.2929	0.1980	0.1593	0.1377	0.1237	0.1137	0.1061
40	0.2370	0.1576	0.1259	0.1082	0.0968	0.0887	0.0827
60	0.1737	0.1131	0.0895	0.0765	0.0682	0.0623	0.0583
120	0.0998	0.0632	0.0495	0.0419	0.0371	0.0337	0.0312
∞	0	0	0	0	0	0	0

r \ f	8	9	10	16	36	144	∞
2	0.8159	0.8010	0.7880	0.7341	0.6602	0.5813	0.5000
3	0.6333	0.6167	0.6025	0.5466	0.4748	0.4031	0.3333
4	0.5175	0.5017	0.4884	0.4366	0.3720	0.3093	0.2500
5	0.4387	0.4241	0.4118	0.3645	0.3066	0.2513	0.2000
6	0.3817	0.3682	0.3568	0.3135	0.2612	0.2119	0.1667
7	0.3384	0.3259	0.3154	0.2756	0.2278	0.1833	0.1429
8	0.3043	0.2926	0.2829	0.2462	0.2022	0.1616	0.1250
9	0.2768	0.2659	0.2568	0.2226	0.1820	0.1446	0.1111
10	0.2541	0.2439	0.2353	0.2032	0.1655	0.1308	0.1000
12	0.2187	0.2098	0.2020	0.1737	0.1403	0.1100	0.0833
15	0.1815	0.1736	0.1671	0.1429	0.1144	0.0889	0.0667
20	0.1422	0.1357	0.1303	0.1108	0.0879	0.0675	0.0500
24	0.1216	0.1160	0.1113	0.0942	0.0743	0.0567	0.0417
30	0.1002	0.0958	0.0921	0.0771	0.0604	0.0457	0.0333
40	0.0780	0.0745	0.0713	0.0595	0.0462	0.0347	0.0250
60	0.0552	0.0520	0.0497	0.0411	0.0316	0.0234	0.0167
120	0.0292	0.0279	0.0266	0.0218	0.0165	0.0120	0.0083
∞	0	0	0	0	0	0	0

附表 13 （续） $\alpha=0.01$

r \ f	1	2	3	4	5	6	7
2	0.9999	0.9950	0.9794	0.9586	0.9373	0.9172	0.8988
3	0.9933	0.9423	0.8831	0.8335	0.7933	0.7606	0.7335
4	0.9676	0.8643	0.7814	0.7212	0.6761	0.6410	0.6129
5	0.9279	0.7885	0.6957	0.6329	0.5875	0.5531	0.5259
6	0.8828	0.7218	0.6258	0.5635	0.5195	0.4866	0.4608
7	0.8376	0.6644	0.5685	0.5080	0.4659	0.4347	0.4105
8	0.7945	0.6152	0.5209	0.4627	0.4226	0.3932	0.3704
9	0.7544	0.5721	0.4810	0.4251	0.3870	0.3592	0.3378
10	0.7175	0.5358	0.4469	0.3934	0.3572	0.3308	0.3106
12	0.6528	0.4751	0.3919	0.3428	0.3099	0.2861	0.2680
15	0.5747	0.4069	0.3317	0.2882	0.2593	0.2386	0.2228
20	0.4799	0.3297	0.2654	0.2288	0.2048	0.1877	0.1748
24	0.4247	0.2871	0.2295	0.1970	0.1759	0.1608	0.1495
30	0.3632	0.2412	0.1913	0.1635	0.1454	0.1327	0.1232
40	0.2940	0.1915	0.1508	0.1281	0.1135	0.1033	0.0957
60	0.2151	0.1171	0.1069	0.0902	0.0796	0.0722	0.0668
120	0.1225	0.0759	0.0585	0.0489	0.0429	0.0387	0.0357
∞	0	0	0	0	0	0	0

r \ f	8	9	10	16	36	144	∞
2	0.8823	0.8674	0.8539	0.7949	0.7067	0.6062	0.5000
3	0.7107	0.6912	0.6743	0.6059	0.5153	0.4230	0.3333
4	0.5897	0.5702	0.5536	0.4884	0.4057	0.3251	0.2500
5	0.5037	0.4854	0.4697	0.4094	0.3351	0.2644	0.2000
6	0.4401	0.4229	0.4084	0.3529	0.2858	0.2229	0.1667
7	0.3911	0.3751	0.3616	0.3105	0.2494	0.1929	0.1429
8	0.3522	0.3373	0.3248	0.2779	0.2214	0.1700	0.1250
9	0.3207	0.3067	0.2950	0.2514	0.1992	0.1521	0.1111
10	0.2945	0.2813	0.2704	0.2297	0.1811	0.1376	0.1000
12	0.2535	0.2419	0.2320	0.1961	0.1535	0.1157	0.0833
15	0.2104	0.2002	0.1918	0.1612	0.1251	0.0934	0.0667
20	0.1646	0.1567	0.1501	0.1248	0.0960	0.0709	0.0500
24	0.1406	0.1338	0.1283	0.1060	0.0810	0.0595	0.0417
30	0.1157	0.1100	0.1054	0.0867	0.0658	0.0480	0.0333
40	0.0898	0.0853	0.0816	0.0668	0.0503	0.0363	0.0250
60	0.0625	0.0594	0.0567	0.0461	0.0344	0.0245	0.0167
120	0.0334	0.0316	0.0302	0.0242	0.0178	0.0125	0.0083
∞	0	0	0	0	0	0	0

附表 14　检验相关系数 $\rho=0$ 的临界值表

$n-2$	5%	1%	$n-2$	5%	1%	$n-2$	5%	1%
1	0.997	1.000	16	0.468	0.590	35	0.325	0.418
2	0.950	0.990	17	0.456	0.575	40	0.304	0.393
3	0.878	0.959	18	0.444	0.561	45	0.288	0.372
4	0.811	0.917	19	0.443	0.549	50	0.273	0.354
5	0.754	0.874	20	0.423	0.537	60	0.250	0.325
6	0.707	0.834	21	0.413	0.526	70	0.232	0.302
7	0.666	0.798	22	0.404	0.515	80	0.217	0.283
8	0.632	0.765	23	0.396	0.505	90	0.205	0.267
9	0.602	0.735	24	0.388	0.496	100	0.195	0.254
10	0.576	0.708	25	0.381	0.487	125	0.174	0.228
11	0.553	0.684	26	0.374	0.478	150	0.159	0.208
12	0.532	0.661	27	0.367	0.470	200	0.138	0.181
13	0.514	0.641	28	0.361	0.463	300	0.113	0.143
14	0.497	0.623	29	0.355	0.456	400	0.098	0.123
15	0.482	0.606	30	0.349	0.449	1000	0.062	0.081

参考文献

[1] 克拉梅:《统计学数学方法》,上海科技出版社,1966。

[2] 陈希孺:《概率论与数理统计》,中国科学技术大学出版社,1992。

[3] 复旦大学编:《概率论(第一册概率论基础)》,人民教育出版社,1979。

[4] 魏宗舒等编:《概率论与数理统计教程》,高等教育出版社,1983。

[5] 王铭文主编:《概率论与数理统计》,辽宁人民出版社,1983。

[6] 陈家鼎等编:《概率统计讲义》,人民教育出版社,1980。

[7] 谢尔登·罗斯:《概率论初级教程》,人民教育出版社,1981。

[8] 茆诗松、王静龙编:《数理统计》,华东师范大学出版社,1990。

[9] 傅权、胡蓓华:《基本统计方法教程》,华东师范大学出版社,1989。

[10] 维恩堡,G.H:《数理统计初级教程》,山西人民出版社,1986。

[11] 中国科学院数学研究所统计组:《方差分析》,科学出版社,1977。

[12] 周纪芗:《回归分析》,华东师范大学出版社,1993。

[13] 华东师范大学数学系:《概率论与数理统计习题集》,人民教育出版社,1982。

[14] 施皮格尔,M.P:《概率统计的理论和习题》,上海科学技术出版社,1988。

[15] 张尧庭,陈汉峰:《贝叶斯统计推断》,科学出版社,1991。

[16] 特罗高夫切夫,A. 等:《概率论习题集》,上海翻译出版公司,1989。

[17] 项可风,吴启光:《试验设计与数据分析》,上海科学技术出版社,1989。

[18] 徐钟济:《蒙特卡罗方法》,科学出版社。

[19] 《统计方法应用国家标准汇编(2)》,中国标准出版社,1989。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝概率论与数理统计　（第二版）
作者＝茆诗松　周纪芗编著
页数＝４２１
ＳＳ号＝１０４４７９８２
出版日期＝２０００年０７月第２版

前言
目录
第一章　随机事件及其概率
１．１　随机事件及其运算
１．１．１　随机现象
１．１．２　基本空间（样本空间）
１．１．３　随机事件
１．１．４　必然事件与不可能事件
１．１．５　事件间的关系
１．１．６　事件的运算
１．２　事件的概率
１．２．１　事件的概率
１．２．２　排列与组合概要
１．２．３　古典方法
１．２．４　频率方法
１．２．５　主观方法
１．３　概率的性质
１．４　独立性
１．４．１　两个事件的独立性
１．４．２　多个事件的独立性
１．４．３　试验的独立性
１．４．４　ｎ重贝努里试验
１．５　条件概率
１．５．１　条件概率
１．５．２　条件概率的性质
１．５．３　全概率公式
１．５．４　贝叶斯公式
第二章　随机变量及其概率分布
２．１　随机变量
２．１．１　随机变量
２．１．２　随机变量的概率分布
２．１．３　概率的可列可加性公理
２．２　离散随机变量
２．２．１　离散随机变量的分布列
２．２．２　离散随机变量的数学期望
２．２．３　二项分布
２．２．４　泊松分布
２．２．５　超几何分布
２．３　连续随机变量
２．３．１　连续随机变量的概率密度函数
２．３．２　连续随机变量的分布函数
２．３．３　随机变量函数的分布
２．３．４　连续随机变量的数学期望
２．３．５　正态分布
２．３．６　伽玛分布
２．３．７　贝塔分布
２．４　方差
２．４．１　随机变量函数的数学期望
２．４．２　方差
２．４．３　方差的性质
２．４．４　切比雪夫不等式
２．４．５　贝努里大数定律
２．５　随机变量的其它特征数
２．５．１　矩

２．５．２　变异系数
２．５．３　偏度
２．５．４　峰度
２．５．５　中位数
２．５．６　分位数
２．５．７　众数
第三章　多维随机变量
３．１　多维随机变量及其联合分布
３．１．１　多维随机变量
３．１．２　联合分布函数
３．１．３　多维离散随机变量
３．１．４　多维连续随机变量
３．２　随机变量的独立性
３．２．１　随机变量的独立性
３．２．２　随机变量函数的独立性
３．２．３　最大值最小值的分布
３．２．４　卷积公式
３．３　多维随机变量的特征数
３．３．１　多维随机变量函数的数学期望
３．３．２　数学期望与方差的运算性质
３．３．３　协方差
３．３．４　相关系数
３．４　条件分布与条件期望
３．４．１　条件分布的概念
３．４．２　离散随机变量的条件分布
３．４．３　连续随机变量的条件分布
３．４．４　构造联合分布
３．４．５　条件期望
３．５　中心极限定理
３．５．１　一个重要现象
３．５．２　独立同分布下的中心极限定理
３．５．３　二项分布的正态近似
３．５．４　独立不同分布下的中心极限定理
第四章　统计量及其分布
４．１　总体与样本
４．１．１　总体与个体
４．１．２　样本
４．１．３　从样本去认识总体
４．１．４　正态概率纸
４．２．　统计量与抽样分布
４．２．１　统计量及其分布
４．２．２　样本均值及其分布
４．２．３　样本方差与样本标准差
４．２．４　样本的高阶矩
４．３　次序统计量及其分布
４．３．１　次序统计量的概念
４．３．２　次序统计量的抽样分布
４．３．３　样本极差
４．３．４　样本中位数与ｐ分位数
４．３．５　箱线图
４．３．６　用随机模拟方法寻找统计量的近似分布
第五章　参数估计
５．１　知法估计
５．１．１　矩法估计的基本点

５．１．２　分布中未知参数的矩法估计
５．２　点估计优劣的评价标准
５．２．１　无偏性
５．２．２　有效性
５．２．３　均方误差准则
５．２．４　相合性
５．３　极大似然估计
５．３．１　极大似然估计的思想与概念
５．３．２　求极大似然估计的方法
５．３．３　极大似然估计的不变原则
５．３．４　极大似然估计的渐近正态性
５．４　区间估计
５．４．１　区间估计的概念
５．４．２　枢轴量法
５．４．３　正态均值μ的置信区间（σ已知）
５．４．４　正态均值μ的置信区间（σ未知）
５．４．５　正态方差σ２与标准差σ的置信区间
５．４．６　两个正态均值差的置区间
５．４．７　两个正态方差比的置信区间
５．５　单侧置信限
５．５．１　单侧置信限的概念
５．５．２　基于连续分布函数构造置信限
５．５．３　基于阶梯分布函数构造置信限
５．６　比率ｐ的置信区间
５．６．１　小样本场合下ｐ的置信区间
５．６．２　大样本场合下ｐ的近似置信区间
５．７　贝叶斯估计
５．７．１　统计推断中的三种信息
５．７．２　贝叶斯公式的密度函数形式
５．７．３　共轭先验分布
５．７．４　贝叶斯点估计
５．７．５　贝叶斯区间估计
第六章　假设检验
６．１　假设检验的概念与步骤
６．１．１　什么是假设检验
６．１．２　假设
６．１．３　两类错误
６．１．４　水平为ａ的检验
６．１．５　假设检验问题的类型
６．２　正态总体参数的假设检验
６．２．１　关于均值的检验
６．２．２　关于方差的检验
６．２．３　关于两个正态总体方差的检验
６．２．４　关于两个正态总体均值的检验
６．３　比率ｐ的检验
６．３．１　关于比率ｐ的检验
６．３．２　两个比率的比较
６．４　泊松分布参数λ的检验
６．５　检验的ｐ值
６．６　广义似然比检验
６．７　ｘ２拟合优度检验
６．７．１　总体可分为有限类，且总体分布不含未知参数
６．７．２　总体可分为有限类，且总体分布含有未知参数
６．７．３　总体为连续分布的情况

６．７．４　列联表的独立性检验
６．８　正态性检验
６．８．１　小样本（３≤ｎ≤５０）场合的Ｗ检验
６．８．２　大样本（ｎ〉５０）场合的Ｄ检验
第七章　方差分析和回归分析
７．１　单因子方差分析
７．１．１　问题的提出
７．１．２　单因子方差分析的统计模型
７．１．３　检验方法
７．１．４　效应与误差方差的估计
７．１．５　重复数相同的方差方析
７．２　多重比较
７．２．１　重复数相等场合的Ｔ法
７．２．２　重复数不等场合的Ｓ法
７．３　方差齐性检验
７．３．１　样本容量相等场合
７．３．２　样本容量不等场合
７．４　一元线性回归
７．４．１　一元线性回归模型
７．４．２　回归系数的最小二乘估计
７．４．３　最小二乘的估计的性质
７．４．４　回归方程的显著性检验
７．４．５　利用回归方程作预测
７．４．６　重复观察（试验）的情况
７．５　可化为一元线性回归的曲线回归
７．５．１　模型的确定
７．５．２　参数估计
７．５．３　回归曲线的比较
附录：统计数表
附表１　二项分布表
附表２　泊松分布表
附表３　正态分布表
附表４　ｔ分布分位数ｔ１－ａ（ｎ）表
附表５　ｘ２分布分位数ｘ１－ａ（ｎ）表
附表６　Ｆ分布分位数Ｆ１－ａ（ｆ１，ｆ２）表
附表７　随机数表
附表８　正态性检验统计量Ｗ的系数ａｉ（ｎ）的值
附表９　正态性检验统计量Ｗ的ａ分位数Ｗａ表
附表１０　正态性检验统计量Ｙ的ａ分位数Ｙａ表
附表１１　多重比较的ｑ１－ａ（ｒ，ｆ）表
附表１２　Ｆｍａｘ的分位数表
附表１３　Ｇｍａｘ的分位数表
附表１４　检验相关系数ρ＝０的临界值表
参考文献